

REIMAN ISTVÁN, DOBOS SÁNDOR


NEMZETKÖZI MATEMATIKAI DIÁKOLIMPIÁK

1959–2003

Reiman István, Dobos Sándor

Nemzetközi Matematikai
Diákolimpiák
1959–2003

Typotex 2003, Budapest

Ez a könyv az illetékes kuratórium döntése alapján az  támogatásával a Felsőoktatási Pályázatok Irodája által lebonyolított Tankönyvtámogatási Program keretében jelent meg.

A könyv kiadását a  is támogatta.

©Reiman István, Dobos Sándor, Typotex; 2003

Lektorálta: Kós Géza, Dobos Sándor

ISBN 963 9548 04 9

Témakör: matematikai példatár

Kedves Olvasó!

Önre gondoltunk, amikor a könyv előkészítésén munkálkodtunk. Kapcsolatunkat szorosabbra fűzhetjük, ha belép a Typoklubba, ahonnan értesülhet új kiadványainkról, akcióinkról, programjainkról, és amelyet a www.typotex.hu címen érhet el. Honlapunkon megtalálhatja az egyes könyvekhez tartozó hibajegyzéket is, mert sajnos hibák olykor előfordulnak.

Kiadja a Typotex kiadó, az 1795-ben alapított

Magyar Könyvkiadók és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.

Felelős kiadó: Votisky Zsuzsa

Tördelés: Fried Katalin

Borítóterv: Tóth Norbert

Terjedelem: 42,75 (A/5) ív

Készült a Dabas Jegyzet Kft. nyomdájában

Felelős vezető Marosi Attila

1. Előszó

Ez a könyv a Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák 1959–2003 közötti versenyének a történetét, eredményeit és feladatait tartalmazza, megoldásaikkal együtt. A felhasznált, kevésbé ismert tételeket, összefüggéseket egy kiegészítő fejezetben foglaltuk össze, ezekre a megoldásoknál szögletes zárójelekbe tett sorszámok utalnak; ezek egy része az előző könyv megfelelő kiegészítéseire vonatkozik.

Köszönettel tartozunk Hódi Endrének, Pelikán Józsefnek, Pataki Jánosnak, Benczúr Péternek, Dobos Sándornak, akik a csapat vezetésével, illetve vezető-helyetteseként segítségünkre voltak az anyag összegyűjtésében és Kós Gézának az 1–35. Olimpiák anyagának a gondos lektorálásáért és mindazoknak, akik észrevételeikkel, megjegyzéseikkel támogatták munkánkat.

Külön ki kell emelnünk azt a rendkívüli lelkiismeretességet és nagy hozzáértést, amellyel Fried Katalin e könyvnek és előzményének a szövegszerkesztését végezte, és ezzel sokat tett e könyvek használhatóságának érdekében; hálásan köszönjük a munkáját.

Reiman István

2. A nemzetközi versenyek helye a matematikai nevelésben

A Matematikai és Physikai Társulat 1894. június 22-iki ülésén a következő határozatot hozta:

„A matematika s a physika tanításának és tanulásának sikerességét emelendő, a Matematikai és Physikai Társulat minden év őszén az illető évben hazai nyilvános középiskolán érettségi vizsgálatot tett tanulók között Budapesten és Kolozsvárott matematikai és physikai versenyt rendez, oly célzattal, hogy a versenyzőknek a nevezett szaktárgyak művelésére való rátermettsége megállapíttassék”.

E határozathozatalra az adott alkalmat, hogy a Társulat elnökét, báró Eötvös Lorándot, vallás- és közoktatási miniszterré nevezték ki; a verseny díját is Eötvös-díjnak nevezték el. Ez a verseny azóta is létezik, a háborúk okozta néhány év kimaradásán kívül minden évben megrendezik, a második világháború után kettévált a Társulat matematikai és fizikai részre, s ennek megfelelően a fizika verseny kapta meg Eötvös nevét, a matematikai részt pedig a verseny egyik legelkeltebb gondozójáról, Kürschák Józsefről nevezték el; ez a verseny egyébként a világ legrégebben folyamatosan megtartott matematikai versenye.

A cél megjelölése itt világos: tehetségkutatás, de egyben a tanítás és tanulás sikerességének az emelése is, tehát nyilvánvalóan eleve számítottak a versenyezés ösztönző erejére is.

A versenyezés, mint a matematikai nevelés eszköze, mintegy százéves múlt-ra tekint vissza; kb. a miénkkel egyidőben jelentek meg néhány országban a matematikai versenyek, de általában nem váltak folyamattá, és rendszerint valamilyen matematikai folyóirat feladatmegoldási versenyeként jelentkeztek. A két világháború között a középiskolák versenyrendszere kibővült, a már említett Eötvös-versenyen kívül — amely mindvégig társulati jelleggel működött — a budapesti tankerület is rendezett több tantárgyból tantárgyi versenyeket, ezeken középiskolás diákok vehettek részt, de tárgyként egy iskolából csak egy versenyző indulhatott.

A második világháború után szélesedett ki országossá és minden diák számára hozzáférhetővé a versenyrendszer. Ennek eredményeként matematikából ma már minden 10–18 év közötti diák számára létezik korosztályának megfelelő matematikai verseny, központi állami (minisztériumi), ill. társulati szervezésben; az országos jellegűeken kívül számos helyi vagy körzeti verseny is ad lehetőséget a képességeiket összemérni óhajtó diákoknak.

Magyarországon tehát a nemzetközi versenyeket jóval megelőzték a nemzeti versenyek; a legtöbb országban azonban a nemzeti versenyek éppen a nemzetközi olimpiák hatására alakultak ki. Ennek megfelelően az országok többségében

olyan a versenyszervezet, hogy annak csúcsán a nemzetközi diákolimpia áll, és ennek megfelelően az olimpiai csapatokat a hazai hivatalos versenyek eredménye alapján állítják össze. Nálunk ez az egyeztetés nem sikerült, mivel a hazai versenyek szabályzata eltér attól az általánosan elfogadott szabálytól, mely szerint a versenyen semmiféle írásbeli segédeszköz sem használható; a hazai versenyek egy része hagyományosan megengedi a könyvek használatát. Így a csapatok tagjait külön versenyeken kell kiválogatni.

A versenyek pedagógiai szerepét — mint minden oktatási tevékenységet — sokan vitatják.

A versenyek mellett szokás felhozni, hogy a fiatalok általában szeretik összemérni az erejüket, a versenyre való felkészülés módot ad a matematika esetleg iskolán kívüli — érdekesebb — részeinek megismerésére, ösztönzőleg hathat a tanulásra. Példának hozták fel, hogy a versenyek győztesei között a matematika jónéhány, világhírűvé emelkedett tudósa megtalálható. Kiváló matematikusok nyilatkoztak úgy, hogy számukra sokat jelentettek a versenyek; a versenyekre való felkészülés lehetőséget adott látóköriük szélesedésére, kapcsolataik kibővítésére. A verseny módot ad arra a diákoknak, hogy tudásuk szintjét az ország hasonló korú diákjainak a tudásával hasonlítsák össze; egy ilyen összemérés számos későbbi csalódást akadályozhat meg. A nemzetközi versenyeken elért jó eredmény az egész ország megbecsülését és elismerését növelheti.

Ezzel szemben áll az a vélemény, hogy sok kiváló matematikusunk egyáltalán nem rendelkezik jó versenyeredményekkel; a versenyeken ért kudarc a tanulóknak egy életre elveheti a kedvét a matematikától. Az életben gyorsabban boldogulnak azok a matematikusok, akik már kora ifjúságukban beletanulnak a matematika egy speciális fejezetébe, egyetlen témában szereznek nagy jártasságot, és így abban korán érhetnek el új tudományos eredményeket, ami végeredményben a matematikusi sikerek alapja; a versenyekre — különösen a nemzetközi olimpiára — való felkészülés viszont rendkívül széles, és egyre bővülő ismeretkört tételez fel, aminek nagy részét nem fogja pályája során felhasználni. A versenyek túlhalmozása anarchiát eredményezhet az iskolában; a versenyzők kivételezett helyzete pedig ugyanott meglehetősen rossz pedagógiai légkört teremt. A tehetséggondozás szempontjából nézve is károsak a versenyek; hiszen az állam a versenyek szervezésével teljesíteni véli a tehetségek gondozása terén rá háruló kötelezettségeket, ennek az eredményeként sok tehetség kallódik el.

Ezek mellett az ellenérvek mellett nem mehetünk el szótlantul, hiszen tartalmaznak bizonyos részigazságokat; minden esetre rámutatnak arra, hogy a versenyeztetés is — mint a pedagógiai tevékenységek mindegyike — nagy körültkintést igényel. Mindenekelőtt fontos, hogy a diákokkal már akkor megértessék, amikor először találkoznak versenyekkel, hogy a verseny nem kizárólagos módja a megmérettetésnek, és inkább játéknak kell tekinteni, mint vizsgának. Aki

a versenyen jó eredményt ér el, az biztosan jó matematikus is lehet (a „matematikus” itt nem feltétlenül hivatást jelent), viszont anélkül is lehet valaki jó matematikus, hogy versenyeredményei lennének. A versenyek van egy pszichológiai terhelő momentuma: az időre való elkészülés, ami lényegében távol áll a matematikai munkától; úgy menjenek el versenyezni, mintha játszani mennének; nyújtsák becsületes tudásuk legjobbját, de a siker hiányából még nem lehet a tényleges tudásra következtetni.

A versenyek helyes pedagógiai légköre, az anarchia elkerülése az iskola megfelelő vezetésével biztosítható, feltéve, hogy az általános tanügyi rendelkezések ennek nem mondanak ellent.

Arról, hogy egy diák jövője szempontjából az egyetlen témával vagy a sok-témájú feladatokkal való foglalkozás ígérkezik-e gyümölcsözőbbnek, csak egyénként lehetne — nem mindig megbízható — képet adni; az e tárgyról vitatkozók mindkét lehetőség mellett tudnának tapasztalati tényekkel érvelni. Mi ehhez csak annyit jegyeznénk meg, hogy a legjobb matematikusok széles körű tudással rendelkeznek; s volt, aki úgy szerzett a matematika számos területén alkotásra képes ismereteket, hogy közben egy-két tárgykörben igen mélyre is hatolt.

A nemzetközi olimpiákkal kapcsolatban is többször elhangzik az az aggodalom, hogy ez is a sportolimpiák szomorú sorsára jut, mondván, az olimpiákat az egészségesebb életért, az ifjúságot erre készítető nemes vetélkedésért újították fel egy évszázaddal ezelőtt, s ma már az egészséget gyakran tönkretevő versenysport nagyrészt üzleti vállalkozássá alakult át.

A helyzet szerencsére itt azért más. Az aggodalmakat azok a hírek váltották ki, amelyek szerint vannak csapatok, amelyek egész évi tanulmányi munkája az olimpiára való felkészülésnek van alárendelve, tanévi munkájuk túlnyomó része az olimpiára való felkészülésből áll. Ez azt jelentené, hogy számukra az olimpia a tanulást ösztönző, tehát elősegítő eszközből céllá változott, tehát elvesztette eredeti rendeltetését.

Ha valóban ez is lenne a helyzet, ezt nem tarthatnánk túlságosan tragikusnak. Igaz, hogy ezzel az olimpia eszméje valamit veszít eredeti szépségéből, de még az ilyen felkészülési mód sem jelent semmi szerencsétlenséget: a versenyzők nagyobb tudásra, gyakorlatra tesznek szert, olyanra, amit még 50–60 év múltán is gyümöcsöztethetnek, legfeljebb képzettségükben mutatkozhatnak némi hiányok, egyoldalúságok.

Természetesen egy ilyen „direkt” felkészítés elvben és gyakorlatban is lehetséges, és kétségtelen előnyt jelent azokkal szemben, akik elvi vagy anyagi okok miatt ilyenben nem részesülnek, bár — példák mutatják — még az ilyen intenzív felkészítés sem tudja minden esetben garantálni a várt sikeres szereplést. Az is nyilvánvaló viszont, hogy az olimpia mai nagy követelményei mellett előkészítés nélkül egy csapat sem számíthat jó eredményre; a felkészülés módja tehát az olimpiához szorosan kapcsolódó pedagógiai kérdés.

Magyarországon rendszeres előkészítés az első előre ismert időpontú olimpiái, a III. (veszprémi) olimpia óta van. Az előkészítést mindvégig a Bolyai János Matematikai Társulat irányította; szervezete szorosan kapcsolódott a Társulat kereteiben működő Ifjúsági Matematikai Kör tevékenységéhez. Az Ifjúsági Matematikai Kört a középiskolás diákok egy csoportja alakította meg 1952. december 18-án azzal a céllal, hogy a középiskolás anyagon túl is foglalkozzanak matematikával. Első elnökké az alapító diákok egyikét választották meg; később a Társulat egy-egy tanárt bízott meg a Kör patronálásával. Ennek a tevékenysége szélesült ki az idők folyamán, és feladatának tekintette az olimpiái előkészítést is. 1976-tól az oktatással foglalkozó minisztérium is segítséget nyújtott országosan mintegy 10–12 olimpiái előkészítő szakkör működtetéséhez.

Ezek a szakkörök általában hetente vagy kéthetenként jönnek össze egy-egy félnapra, és ezalatt főként feladatmegoldással foglalkoznak; általában havonta egy-egy olyan előadás is elhangzik, amely a tágabb matematikai ismeretterjesztést szolgálja. A tanév végén, az olimpiát megelőző időszakban a csapat tagjai 2–3 hetes táborozáson szoktak részt venni, ami már közvetlenül a felkészülést szolgálja.

A résztvevő országok számának a bővülésével és az olimpia évtizedeinek a növekedésével már némi tapasztalati alapunk lehet arra, hogy megvizsgáljuk, melyek azok a tényezők, amelyek egy ország jó olimpiái szereplését elősegíthetik.

1. *A csapatok tagjainak a kiválasztása.* Ez a legtöbb országban előzetes versenyek (válogató-versenyek) alapján történik. Nálunk is ez a helyzet, de sajnos az a kör, amelyből a válogatás alapjául szolgáló diákok kikerülnek, rendkívül szűk, és sok esetlegességet tartalmaz. Általában: a tehetségek felkutatása és a velük való foglalkozás ma nálunk még gyerekcipőben jár, bár kétségtelenül sokminden történt ennek az érdekében.

Ha áttekintjük azokat a területeket, iskolákat, ahonnan egyáltalán kikerültek már versenyzők, megfigyelhetjük, hogy mennyi lehetőség lenne még tehetségek felkutatására, felfedezésére.

Egyébként nincs olyan biztos módszer, amely szavatolni tudná, hogy a tanulók egy adott köréből hogyan lehet azokat kiválasztani, akik várhatóan legjobban állják meg a helyüket az olimpián. Több évi tapasztalat szerint nagyobb a remény azoknak a helytállására, akik már hosszabb időn keresztül jó eredményeket mutatnak fel, mint azokénak, akik egy versenyen tűnnek csak ki. Ez a tény arra mutat, hogy egyetlen válogatóverseny eredménye még nem ad biztos támpontot.

2. *Az ország iskolarendszere.* Az olimpiái eredmények azt bizonyítják, hogy a legjobbak eredményei és az ország matematikai oktatásának a színvonala között nem lehet egyértelmű kapcsolatra következtetni; egyszerűen azért, mert a legjobbak csaknem minden országban az iskoláknak egy viszonylag szűk köréből kerülnek ki. A speciális matematikai tagozatú osztályok létrehozása óta

(1963) nálunk különösen élesen bizonyosodott ez be, hiszen 1963 óta az olimpiai versenyzők 70%-a speciális matematikai tagozaton tanult, viszont speciális matematika osztálya (többéves átlagban) csak a gimnáziumok 6–8%-ának van.

Ez egyébként azt is jelenti, hogy a matematika tagozatos osztályok léte elősegíti a jó olimpiai szereplést.

Biztos azonban, hogy az ország átlagosan jó (ill. a többi országéhoz hasonlóan: viszonylagosan jó) matematika oktatása tükröződik a nemzetközi versenyeredményeken is, hiszen ez bővíti azoknak a körét, akik olimpiai csapattagként számításba jöhetnek; viszont több példát is tudunk mutatni arra, hogy az átlagosan gyenge matematika tanítással rendelkező országok is kitűnő versenyeredményt érhetnek el. (A sportban is tudunk erre több példát is felsorakoztatni: pl. öttusában Magyarország évtizedeken át a világ vezető „hatalmai” közé tartozott, holott az öttusa hazánkban nagyon kevesek sportja.)

3. *A versenyezésre való felkészülés szellemi háttere.* Ezen gyakorlatilag két tényezőt értünk: a megfelelő felkészítő pedagógusokat és a felkészüléshez szükséges irodalmat.

A felkészítés széleskörű matematikai ismereteket tételez fel, és annak az irodalmi anyagnak az ismeretét, amely az éppen „futó”, tehát a világ matematikai versenyein szereplő feladatokkal foglalkozik, hiszen a feladatok nagy része éppen a „divatos” témákból kerül ki. Ehhez az is szükséges, hogy a matematika tanárok olyan képzésben részesüljenek, amelyek ilyen típusú munkához megfelelő alapot nyújtanak.

Óriási előnyben vannak azoknak az országoknak a fiataljai, amelyek nagy számban hozzáférhetnek olyan könyvekhez, folyóiratokhoz — méghozzá az ország nyelvén —, amely elemi matematikai témákkal, problémákkal foglalkoznak. Ilyenek birtokában még tanári vezetés híján is kitűnő matematikai képzettségre tehetnek szert. Az ilyen könyvkiadás terén kezdetben, a második világháborút követő két évtizedben a Szovjetunió messze megelőzte minden országot; a szovjet műholdak megjelenése után aztán az Amerikai Egyesült Államokban is egyre nagyobb számban jelentek meg az ilyen könyvek, s jelenleg világszerte fennülőben van az ilyen jellegű könyvkiadás.

A magyar diákoknak nagy segítséget nyújt a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok léte, cikkei és feladatanyaga; az olimpiai felkészülést segítő irodalomban azonban nagyon szegények vagyunk; megfelelő anyagi támogatás nélkül ebből a helyzetből nem képzelhető el kiút.

A felkészülésben segítenek a sok helyen megjelenő nemzetközi versenyek; ezek közül néhányat már hosszabb ideje rendszeresen megrendeznek (pl. az osztrák–lengyel versenyt). 1990 óta Magyarország és Izrael között van ilyen versenykapcsolat; felváltva rendezik meg tavaszonként a két országban; ennek érdekessége az a terjedőben lévő versenyforma, amelyben a verseny egy részében

egy-egy csapat közösen old meg feladatokat. Eredményesnek bizonyult, hogy különböző országok a felkészülés folyamán közös „táborozást” rendeznek; ilyen van néhány éve a román és a magyar csapat között.

4. *Az eredményes versenyzés társadalmi megbecsülése.* A világ sokmillió, matematikát tanuló diákja közül az élmezőnybe kerülni: nem kis teljesítmény; olyan, amely méltán elvárhatja annak az országnak a megbecsülését, amelynek a színeiben ezt az eredményt elérték. (Tudatosan nem teszünk most összehasonlítást a sporteredmények és a szellemi eredmények között, bár a versenyzés mindkét kategóriában jellemző, a ténykedés szerepe azonban lényegesen különböző, hiszen a sporteredmények megbecsülése az állam „panem et circenses” jellegű ősi kötelmei közé tartozik). A nemzetközi olimpiák eredményeit számos országban kezdettől fogva nagyra értékelték, a legmagasabb állami méltóságok fogadják hazatérésük után a jól szereplő csapatokat; eszmei és anyagi jutalomban részesítik őket; a sajtó foglalkozik a teljesítményükkel. Egy-egy olimpiának maga az államfő volt a fővédnöke, s ritkán fordul elő, hogy a kormánynak legalább egy tagja ne vegyen részt az olimpia valamely rendezvényén.

Ezek a gesztus-jellegű megnyilvánulások társadalmi hatásúak, és ösztönző szerepük rendkívül nagy lehet. Még növeli ezt a hatást, ha — mint ez számos országban megvan — az egyetemek, főiskolák kiemelt ösztöndíjat ígérnek a náluk továbbtanuló versenyzőknek.

Néhány éve nálunk is hagyománnyá vált, hogy a kormányfő és az iskolai ügyekkel foglalkozó miniszter fogadja és megjutalmazza a versenyen eredményesen szereplőket és felkészítőiket. Időnként a hírközlő szervek (sajtó) is foglalkoznak az eredményekkel; ezek közül is ki kell emelni az Élet és Tudomány c. lap e tárgyú cikkeit.

5. *Az ország gazdasági és demográfiai adottságai.* Elvben ma bármely ország csapatának reális lehetősége van arra, hogy bekerüljön a verseny élmezőnyében (élmezőnyön most a résztvevők 25%-át értjük); a kérdés csupán az, hogy rendelkezésre állnak-e azok a személyi és anyagi feltételek, amelyek az ehhez szükséges előkészítéshez kellenek, és egyáltalán: lényegesnek találják-e csapatuk élmezőnyben való szereplését.

Kétségtelen, hogy tízmillió diákból nagyobb eséllyel lehet hat versenyző-tehetséget kiválasztani, mint néhány százezerből, ezért a nagy nemzetek nyerési esélyei jobbak a kis létszámúakénál; s nagyon valószínű, hogy hosszabb távon a nagy nemzetek csapatai fogják elfoglalni az élmezőnyt. Ehhez még az is hozzájárulhat, hogy a nagy nemzetek költségvetésében egy olimpiai csapat költségei csak mikroszkopikus nagyságrendűek, míg kis nemzeteknél már az utazási költségek előteremtése is néha reménytelen vállalkozásnak tűnhet.

Ma még azonban az élmezőny tekintélyes részét a kis nemzetek teszik ki. Ennek egyszerűen az az oka, hogy nem minden ország törekszik arra, hogy az

olimpián feltétlenül jó helyet érjen el. A kis nemzeteknek — különösen akkor, ha gazdasági helyzetük sem rózsás — elsőrendű érdeke, hogy kitermeljék a magukban rejlő szellemi kincset, és ezzel segítsenek országuk helyzetén, s ez egyelőre még relatív eredményeiben is megmutatkozik.

Egy ország olimpiai csapatának a teljesítményét igazán csak lehetőségeik figyelembe vételével lehet tárgyilagosan értékelni.

A magyar diákok eredményei messze meghaladják azt a szintet, amit lehetőségeik szerint tőlük elvárható lenne, s nyugodtan állíthatjuk, hogy méltán váltották ki a matematikus világ megbecsülését. Szeretnénk, ha ezt az eredményességet továbbra is tartani tudnánk; mivel azonban egyre növekszik azoknak a nemzeteknek a száma, amelyek be akarnak törni az élmezőnybe, ennek csak akkor lesz a következő évezredben reális lehetősége, ha az a feltételrendszer, amely eredményeiket elősegíti, a jövőben biztosítva lesz. Ehhez mindenekelőtt meg kellene teremteni a matematikai tehetségek felkutatásának és gondozásának az egész országra kiterjedő rendszerét; gondoskodni kell olyan tanárokról, akik erre a munkára alkalmasak; el kell látni az érdeklődő diákokat megfelelő irodalmi anyaggal; növelni kell azoknak a diákoknak a társadalmi megbecsülését, akik a kötelező tananyagon túl is érnek el a tudomány terén eredményeket.

A tehetségesek felkarolása első sorban nem az olimpia érdekeit szolgálja, hanem nemzeti érdek; az olimpiát úgy kell tekinteni, mint a cél elérését elősegítő eszközt. A tehetséggondozásban résztvevők *lehetnek* egy időpontban az olimpiai csapat tagjai, de nem ez a fő céljuk, hanem tudásuk, készségeik fejlesztése; annak a tehetségkincsnek a felszínre hozása és gyümölcösztetése, amely bennük rejlik, és amit munkájuk, hivatásuk számtalan területén hasznosítani tudnak.

Az olimpián részt vevő csapatok számának az utóbbi évtizedben bekövetkezett rohamos növekedése olyan szervezési kérdéseket vet fel, amelyek esetleg tartalmi változással is járhatnak.

A díjak elosztásának a rendszere azt célozza, hogy lehetőleg egyetlen csapat se távozzék az olimpiáról valamilyen siker élménye nélkül, viszont az élmezőny erősödése szükségképpen a feladatok nehezebbé tételét eredményezi. Ennek következtében egyre nagyobb a távolság az élmezőny és a leszakadók eredménye között. Ennek kiküszöbölésére merült fel az a gondolat, hogy az országokat esetleg két osztályba sorolnák az eddig elért teljesítményük alapján, közöttük az átjárhatóságot újabb eredmények biztosítanák.

A felduzzadt versenyzőlétszám csökkentésére született az a javaslat, hogy minden ország háromtagú „alaps csapatot” küldhet az olimpiára, és ez a létszám 1–3 újabb versenyzővel bővíthetne az előző év eredményétől függően. Ugyancsak felmerült az a gondolat is, hogy a nagylétszámú zsűri helyett egy kisebb (10–12-es) testület lássa el a zsűri eddigi feladatait.

Ezek az ötletek általában nem találtak kedvező fogadtatásra, az ellenzők főként pedagógiai érveket hoztak fel a javaslatok ellen. Mivel a javaslatok háttérben túlnyomó részt anyagi megfontolások húzódtak meg, és úgy látszik, hogy

a következő évtizedben az olimpia rendezésére vállalkozóknak nincsenek anyagi nehézségei, a fenti elképzelések egyelőre lekerültek a napirendről; a létszám további növekedése azonban ezeket a kérdéseket előbb-utóbb valószínűleg fel fogja vetni.

A nemzetközi matematikai olimpiák kétségtelenül legnehezebb pedagógiai feladata a verseny tárgyának, a hat megoldandó feladatnak az összeállítása, kiválogatása. Ez mindenekelőtt azt a kérdést veti fel, hogy milyennek kell lennie egy versenyfeladatnak.

Erre a kérdésre az Eötvös–Kürschák versenyek rendezői kezdettől fogva világos választ adtak; ennek lényege a következőkben foglalható össze:

a feladat első sorban a versenyzők tudásának a mélységét s ne a mennyiségét tegye próbára; lehetőleg érdekes legyen a mondanivalója vagy az eredménye vagy az eredményhez vezető útja; létezzék a feladatnak olyan megoldása, amely belefér a versenyen arányosan rászabott időbe.

Megjegyezzük, hogy több ország, főként azok, amelyek versenyeik szervezésében követték a magyar tapasztalatokat, a feladatok kiválasztásánál igyekeztek a fenti elvet követni. Abban általában meg szoktak egyezni a feladatok javasloái, hogy a fenti elvek helyesek, de ennek gyakorlati megvalósításakor az elvek értelmezése már korántsem egyöntetű.

Vannak, akik abban látják egy feladat „szépségét”, ill. versenyre való alkalmasságát, hogy a versenyzőknek megoldásuk közben számos alesetet kell figyelembe venniük, a megoldás lényegének a meglátása mellett még sok és hosszadalmas elemzést kell a teljes megoldáshoz elvégezniük; ez a szemlélet — amelyet egyébként nem tarthatunk túl szerencsésnek — több olimpiai feladaton nyomonkövethető. Az olimpiák eddigi feladatanyaga mindezek ellenére igen tanulságos, és tanulmányozása alkalmas a matematikai látókör szélesítésére is.

Az olimpia pedagógiai problémái közé tartozik a díjazás kérdése is. A tárgyilagosságra való törekvés hozta létre azt az elvet, hogy a résztvevők 50%-a kapjon díjat, és az első, második és harmadik díjak aránya 1:2:3 legyen. Ez kezdetben jól működött, mert nagyjából egyezett azzal a régebbi gyakorlattal, hogy a díjazás feltétele a legalább 50%-os teljesítmény legyen, és az első díjat közel 100%-os teljesítményért adják. Viszont pl. a 34. olimpián már 26%-os teljesítménnyel is kaptak a versenyzők díjat, és az első díjhoz elegendő volt a pontok 71%-ának megszerzése; az ilyen különbségek természetes velejárói a nagy létszámnövekedésnek, különösen akkor, ha viszonylag sok a gyenge teljesítmény, s ezzel az a paradox helyzet áll elő, hogy a gyenge eredmények tömege segít hozzá a díjakhoz. Megoldásnak tűnhet az, hogyha az alsó díjhatárnál nemcsak a létszámot, hanem bizonyos teljesítményt is figyelembe vennének.

3. A Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák története

1959 júliusában Románia Matematikai és Fizikai Társulata „az ország felszabadulásának 15-ik és a Társulat alapításának 10-ik évfordulója alkalmából” matematikai versenyre hívta meg a szocialista tábor 8–8 középiskolás diákját az akkor Oraşul Stalinnak (Sztálinvárosnak) nevezett Brassóba. A versenyt Nemzetközi Matematikai Olimpiának nevezték el, és olyan sikeresnek bizonyult, hogy elhatározták, ezt a kezdeményezést folytatni kell. (A magyar elnevezésben hagyományosan a Diákolimpia megjelölés szerepel.)

Az első olimpián 7 ország 52 versenyzője vett részt, az országoknak egy meglehetősen szűk köréből. Az első résztvevők aligha gondoltak arra, hogy ez a kezdeményezés megéri 45-ik évét, és a világ legkiterjedtebb, minden földrészt átfogó hatalmas szellemi versenyévé válik.

Bár a versenyek külső formájukban sokat változtak az évek folyamán, tartalmukban lényegében megőrizték a kezdetkor kialakult elveket. Ezek legfőbb vonásai: a verseny egyéni; a versenyzők két napon át 3–3 feladatot oldanak meg írásban a saját nyelvükön; a feladatokat a csapatok vezetőiből álló zsűri állítja össze, a megoldásokat először a csapatok vezetői értékelik, az értékelést a zsűri korrigálja, ill. véglegesíti; a zsűri dönt a díjak odaítéléséről.

Ezeknek az elveknek a gyakorlati megvalósítása az idők folyamán természetesen változott. Az első versenytől eltekintve a csapatoknak két vezetője van. Az egyik — tényleges vezető — a nemzetközi zsűrinek is tagja —, már a csapatok előtt érkezik a rendező országba, és részt vesz a feladatok összeállításában. A feladatokat előre bekérik; a rendezők ezeket úgy készítik elő, hogy a zsűrinek a rendelkezésre álló két nap alatt megkönnyítsék a dolgát. A zsűritag feladata a már összeállított feladatsor lefordítása a hivatalos nyelvről a versenyzők nyelvére.

Az értékelés koordinálását a negyedik olimpiától kezdve koordinációs bizottság végzi, az ötödiktől kezdve ez a rendező ország matematikusaiból áll, akiknek a véleményét a zsűri hagyja jóvá, ill. módosíthatja.

A csapat második vezetője (a helyettes vagy pedagógiai vezető) általában a versenyzőkkel együtt tartózkodik az olimpia folyamán, a verseny befejezéséig a csapatokkal együtt el van különítve a zsűri tagjaitól.

Mindaz, amit a versenyek szervezeti felépítéséről eddig elmondtunk, szokás, de nem törvény; a törvény ugyanis feltételezne egy törvényhozót és végrehajtót (ellenőrzőt); a diákolimpiák legfőbb jellemzője azonban az, hogy ilyen szerv nem létezik. Nincs tehát olyan szervezet — mint pl. a sportegyesületeké —, amelynek a versenyekkel kapcsolatban döntési joga lenne. Jogilag tehát minden olimpia az előzőektől és a következőktől független rendezvény: a meghívó ország közli a meghívottakkal a verseny által összeállított szabályzatát, és a meghívott dönthet, hogy hajlandó-e az e szabály szerint rendezett versenyen részt venni, vagy sem.

A valóság azonban az, hogy ezek a szervezeti szabályok teljes mértékben megfelelnek a kialakult szokásoknak, és aligha fordulhat elő, hogy valamely ország azért nem vesz részt az olimpián, mert nem tetszik neki a szabályzat.

Ennek a központi testület nélküli rendezvénynek egyetlen kényes pontja mutatkozott meg az elmúlt évek folyamán: a meghívottak listája. Elvben minden rendező meghívja az előző évi résztvevőket a következő évi versenyre, de ezt nem mindig tartották be; ez az a pont, amelyben az egyébként nagyon békés és barátságos rendezvényekbe a politika közbeszólt. Korábban ez nagyon ritkán fordult elő, az utóbbi években azonban — éppen az ilyen típusú kérdések megoldására — szükségesnek látszott egy nemzetek feletti szervezet létrehozása.

Egy ilyen testület valóban össze is állt, előbb Site Committee, majd Advisory Board néven működik; tevékenységi köre azonban csak ajánlások megfogalmazásából állhat, mert hivatalos nemzetközi elismertetése egyelőre várat magára. Ennek a testületnek a feladatai közé tartozik a rendezésre jelentkezők kiválasztása is; ez eddig még lényegében zökkenőmentesen sikerült; jelenleg már közel egy évtizedre megállapodtak az olimpia színhelyében. Szerencsés körülmény, hogy a rendezésre egyre több jelentkező akad; ellentétben azzal a korábbi gyakorlattal, hogy gyakran nehéz volt rendezésre vállalkozó országot találni. Ennek oka természetesen az a nagy anyagi teher, ami a rendezőkre hárul; a jelenleg szokásos rendszerben az olimpia teljes költségét — beleértve a versenyzők és hivatalos kísérőik ellátását — a rendezők fedezik.

A legjobb eredményt elért versenyzőket díjazzák. Ez kezdettől fogva úgy történik, hogy a koordináció, ill. zsűri által jóváhagyott elért pontszámok alapján összeállítják a versenyzők sorrendjét (az azonos pontszámot elérték helyezési rendje megegyezik), és kijelölik az I., II., ill. III. díjak ponthatárát. Mivel a díjhatárok megállapításánál számos objektívnek előadott szubjektív érv vetődött fel, és az egész véget érni nem akaró vitákra adott alkalmat, lassan kialakult egy mára már működő rendszer, amely a szubjektivitást kiküszöböli a díjhatárok megállapításánál. Ennek lényege a következő:

minden feladat teljes megoldása 7 pontot ér, egy feladatra egy versenyző legfeljebb 7 pontot kaphat;

a versenyzők 50%-át díjazzák I., II. vagy III. díjjal. A díjazottak között az első, második, ill. harmadik díjat kapottak aránya 1 : 2 : 3.

(Mivel azonos pontszámúaknak azonos díjat kell kapniuk, ezek az arányok kis mértékben módosulhatnak.)

Ez a rendszer számos előnye mellett bizonyos hátrányokkal is rendelkezik; erről bővebben szoltunk az első fejezetben.

Hagyományosan a versenyek egy részében különdíjat (speciális díjat, dicséretet) is osztottak ki, ennek odaítélése azonban gyakran váltott ki jogos bírálatot: ezeket a díjakat általában a „különlegesen szép megoldásért” indoklással ítélték oda; kitűnt viszont, hogy egy megoldás „szép” vagy „nem szép” voltát objektíven nagyon ritkán lehet eldönteni; bár voltak olyan megoldások, amelyek szépségét és értékes voltát általánosan elismerték; az odaítélés indoklása vagy megtagadása olykor komolytalannak tetszett. (Ebben az is szerepet játszott, hogy a különdíjakról mindig egy hosszadalmas és fárasztó zsűriülés utolsó mozzanataként döntöttek.)

Nincs tisztázva teljesen a feladatanyag matematikai háttérének a kérdése: milyen előismeretet tételeznek fel a feladat kitűzői, és milyen tételanyag az, amit a versenyzők indoklás, ill. bizonyítás nélkül felhasználhatnak a megoldásokban. Külső szemlélő számára ez természetesen képtelenségnek tűnik; olyan, mintha a terepfutásnál úgy indítanák el a versenyzőket, hogy megjelölik a célt, de sem az útvonalat, sem a felhasználható segédeszközöket nem közölnék. A valóságban ez azért nem komoly hiány: az idők folyamán kialakult egy tételkör, amelynek hallgatólágosan elfogadott kereteit csak nagyon óvatosan bővítetik; bár többször hangzottak el olyan érvelések, amelyek a feladatanyagot az eddig kevésbé bevont területek felé (pl. valószínűségelmélet, egyes algebrai, ill. analízisbeli fejezetek) kívánják bővíteni.

Nagyon nehéz volt a versenyzőnek a felkészítés folyamán feltett kérdésre válaszolni: le kell-e ennek a bizonyítását írni, be kell-e ezt bizonyítani; elfogadják-e ezt bizonyítás nélkül? Mára lassanként kialakult az a helyzet, hogy általában minden olyan állítást elfogadnak bizonyítás nélkül, amelynek a tartalma „általánosan ismert”; bár ezen területen valószínűleg mindig akadnak vitatható pontok.

Az előbbi nehézségek arra készítetik a feladatok összeállítóit, hogy a megoldásokhoz szükséges ismeretanyagnak inkább a mélységére, mint a mennyiségére építsenek.

A verseny alapelve, hogy a versenyzők és vezetőik becsületére épít. Bár a verseny korrektségét több rendszabállyal (elkülönítés, felügyelet) próbálják biztosítani, a verseny tisztasága csakis a résztvevők becsületességén múlik. A zsűri mindössze egy-két alkalommal kényszerült arra, hogy a versenyszabályok megsértése miatt szankciókat alkalmazzon. Természetesen már kezdettől fogva felerősült egy olyan versenyrendszer kidolgozásának az igénye, amely kizárna minden csalási lehetőséget; ez egyrészt igen megnehezítené a versenyzők dolgát (pl. csak bizonyos nyelveken lehetne dolgozatot írni), másrészt rendkívül megnövelné a rendezés költségeit, és erősen korlátozná a résztvevők körét. Elképzelhető azonban, hogy a távolabbi jövőben ilyen típusú változtatásra sor kerülhet.

A kezdetektől fogva megmaradt az olimpiáknak az ifjúsági találkozó jellege; a versenyzők átlag 3–4 napot a rendező ország megismerésére, közös kirándulásokra, játékokra fordíthatnak; a versenyeken kívül a hozzájuk kapcsolódó rendezvények is gyakran nyújtanak egy életre szóló élményt a résztvevő fiataloknak.

Többször próbálkoztak azzal a rendezők, hogy a vezetők és a versenyzők részére matematikai jellegű foglalkozásokat (előadásokat) szervezzenek; ez azonban a program zsúfoltsága és nyelvi nehézségek miatt sohasem járt sikerrel.

Egy-egy írásbeli verseny időtartama kezdetben 3 és 5 óra között változott, később 4 és fél órára állandósult.

A versenyzők személyére ki szokták kötni, hogy a rendezés évében valamilyen középiskola tanulójának kell lennie, és megadják életkorának felső határát (ez 19–20 év szokott lenni).

A következőkben rövid összefoglalót adunk minden egyes olimpiáról; közöljük az eredménytáblázatot is. Ez tartalmazza a csapatok létszámát (L), az I., II. és III. díjasok számát (I., II., III.), ezeket a díjakat az utolsó két évtizedben már általában arany-, ezüst- és bronzérmes helyeknek nevezték, a ténylegesen kiadott érmeknek megfelelően. Az első három olimpián IV. díj jelleggel „dicséreteket” is osztottak ki, ezek számát a III. díjasok számához + jellel kapcsoltuk hozzá, és a továbbiakban III. díjként számítottuk be, mivel a későbbiekben ezt a kategóriát lényegében beolvasztották a III. díjasok közé. Nincs feltüntetve a táblázatban a különböző címen kiadott különdíjak száma sem, az előbbieken már elmondott okok miatt; hasonlóan nem tüntettük fel a néhány évben vigaszdíj jelleggel kiosztott oklevelek számát sem, ilyeneket adtak pl. azoknak, akiknek legalább egy feladatra teljes megoldásuk volt, de díjat nem kaptak (a díjak elnyeréséhez egyébként nincs szükség teljesen megoldott feladatra). A P-vel jelölt oszlopba kerül az egyes versenyzők által szerzett pontok összege és a H oszlopba a csapat e pontszámok alapján elért (nem hivatalos) helyezési sorrendje.

Ehhez az utóbbihoz jegyezzük meg, hogy az olimpiákon nincs csapatverseny, elvben csak egyéni teljesítményeket néznek (a helyezést persze mindenki kiszámítja). Azt is meg kell jegyeznünk, hogy a versenyek többségén nem készült hivatalos eredménylista, ill. ilyen nem tettek közzé; a közölt pontszámok ezért részben magánjellegű értesüléseken alapulnak, és természetesen ez a helyzet a különböző helyeken közölt eredménylistákkal is. Ezért egy-két (nem lényeges) helyen listáink különbözhetnek a más helyen közölt eredményektől.

Itt jegyezzük meg, hogy az olykor közzétett hivatalos számítógépes eredménylisták is számos hibás adatot, illetve ellentmondást tartalmaznak.

Az eredménytáblázat utolsó sora tartalmazza rendre a versenyzők, az I., II.- és III.-díjasok számát, majd összehasonlításként azt a maximális pontszámot, amelyet egy (teljes létszámú) csapat elérhet (pl. $8 \cdot 40 = 320$ azt jelenti, hogy legfeljebb 8 versenyző egyenként legfeljebb 40 pontot, a csapat pedig 320 pontot érhetett el).

A magyar küldöttség vezetői az egyes olimpiákon (a 20. kivételével): Vezető (zsűri tag): 1.–28.: Hódi Endre; 29., 31.–34.: Pelikán József, akit tízévi tagsága után az Advisory Board elnökévé választottak (2002); 30.: Pataki János. Helyettes: 2.–4.: Késedi Ferenc; 5.: Bakos Tibor; 6–14., 16.–28., 30., 32.–33.: Reiman István, 15.: Pelikán József; 29., 31., 34.: Pataki János; 35.–37.: Benczúr Péter; 38.–44.: Dobos Sándor.

1. 1959. Brassó, Románia

Az első olimpiát kellemes baráti légkörben, nagyon szép természeti környezetben rendezték meg Brassóban, az eredményhirdetés és zárőnnepség Bukarestben volt. A magyar csapatot az abban az évben a hazai versenyeken legjobban szerepelt diákokból állították össze; a versenyre való indulás még egy kissé „út az ismeretlenbe” jellegű volt, mert senki sem tudott semmi biztosat arról, milyen lesz a verseny. Végül is minden olyan jól sikerült, hogy elhatározták: ezt folytatni kell. Külön öröm volt a magyar diákok jó szereplése.

2. 1960. Sinaia, Románia

A magyar csapat:

1. Bollobás Béla (Budapest, Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium, II. o.) III. díj;
2. Csanak György (Debrecen, Fazekas Mihály Gimnázium, IV. o.) I. díj;
3. Halász Gábor (Budapest, II. Rákóczi Ferenc Gimnázium, IV. o.) II. díj;
4. Katona Gyula (Budapest, Kandó Kálmán Híradás- és Műszeripari Technikum, IV. o.);
5. Mezei Ferenc (Budapest, II. Rákóczi Ferenc Gimnázium, III. o.);
6. Muszély György (Budapest, Vörösmarty Mihály Gimnázium, III. o.) III. díj;
7. Szász Domokos (Budapest, Eötvös József Gimnázium, IV. o.) dicséret;
8. Tihanyi Ambrus (Budapest, Apáczai Csere János Gimnázium, III. o.).

1. 1959. Brassó, 7 résztvevő

	L.	I.	II.	III.	Pont	Hely
Bulgária	8	0	0	+ 1	131	4
Csehszlovákia	8	1	0	+ 4	192	3
Lengyelország	8	0	0	+ 1	122	5
Magyarország	8	1	1	2 + 1	233	2
Németország (Dem.)	8	0	0	0	40	7
Románia	8	1	2	2 + 1	249	1
Szovjetunió	4	0	0	1 + 2	111	6
Összesen:	52	3	3	5 + 10	max.: 8 · 40 = 320	

2. 1960. Sinaia, Románia

Már-már úgy látszott, hogy az olimpiák sora rendező híján megszakad, azonban az utolsó pillanatban Románia, hogy biztosítsa a folytonosságot, meghívót küldött az előző olimpia résztvevőinek, de ezek közül már csak öten tudtak részt venni a Kárpátok déli lejtőjén elhelyezkedő festői szépségű Sinaiában rendezett versenyen. A csapatok kirándultak Brassóba és a román tengerpart szép üdülőhelyeire is. Magyarország bejelentette, hogy megrendezi a következő évi olimpiát.

A magyar csapat:

1. Bollobás Béla (Budapest, Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium, III. o.) I. díj;
2. Fritz József (Mosonmagyaróvár, Kossuth Lajos Gimnázium, III. o.) II. díj;
3. Gagy Pálffy András (Budapest, Széchenyi István Gimnázium, III. o.);
4. Grüner György (Mosonmagyaróvár, Kossuth Lajos Gimnázium, III. o.);
5. Hahn János (Szeged, Gépipari Technikum, IV. o.);
6. Komlós János (Budapest, Apáczai Csere János Gimnázium, IV. o.) dicséret;
7. Mezei Ferenc (Budapest, II. Rákóczi Ferenc Gimnázium, IV. o.) I. díj;
8. Muszély György (Budapest, Vörösmarty Mihály Gimnázium, IV. o.) II. díj.

2. 1960. Sinaia, 5 résztvevő

	L.	I.	II.	III.	Pont	Hely
Bulgária	8	0	0	1 + 2	175	4
Csehszlovákia	8	1	1	2 + 2	257	1
Magyarország	8	2	2	+ 1	248	2–3
Németország (Dem.)	8	0	0	+ 1	38	5
Románia	8	1	1	1 + 1	248	2–3
Összesen:	40	4	4	4 + 7	max.: $8 \cdot 45 = 360$	

3. 1961. Veszprém, Magyarország

Erre az olimpiára már készültek a csapatok; Magyarországon ettől kezdve folyik rendszeres, az egész tanévre kiterjedő felkészítés. Itt vezették be, hogy az előre bekért és válogatott feladatokból a versenyzők megérkezése előtt a vezetők-ből álló zsűri összeállítja a feladatokat, és kidolgozza értékelési szempontjaikat. A versenyzők az akkoriban kötelezőnek számító gyárlátogatáson („Sztálinváros”) kívül megismerkedtek a Balatonnal és Budapest nevezetességeivel is. A verseny hangulata nagyon barátságos, mondhatnánk családias volt, itt újólág megerősítették a résztvevők, hogy ezeket a versenyeket folytatni kell.

A magyar csapat:

1. Bollobás Béla (Budapest, Apáczai Csere János Gimnázium, IV. o.) I. díj;
2. Fritz József (Mosonmagyaróvár, Kossuth Lajos Gimnázium, IV. o.) dicséret;
3. Gálfi László (Budapest, I. István Gimnázium, IV. o.) III. díj;
4. Góth László (Budapest, Könyves Kálmán Gimnázium, IV. o.) dicséret;
5. Juhász István (Budapest, Madách Imre Gimnázium, IV. o.) II. díj;
6. Kéry Gerzson (Sopron, Széchenyi István Gimnázium, III. o.) II. díj;
7. Kóta József (Tatabánya, Árpád Gimnázium, III. o.) I. díj;
8. Simonovits Miklós (Budapest, Radnóti Miklós Gimnázium, III. o.) II. díj.

3. 1961. Veszprém, 6 résztvevő

	L.	I.	II.	III.	Pont	Hely
Bulgária	8	0	0	+ 1	108	6
Csehszlovákia	8	0	0	1 + 3	159	4
Lengyelország	8	1	0	+ 6	203	2
Magyarország	8	2	3	1 + 2	270	1
Németország (Dem.)	8	0	0	1 + 3	146	5
Románia	8	0	1	1 + 4	197	3
Összesen:	48	3	4	4 + 18	max.: $8 \cdot 40 = 320$	

5. 1963. Boroszló (Wroclaw), Lengyelország

4. 1962. Hluboká, Csehszlovákia

A verseny színhelye a dél-csehszerzági Hluboká várkastélya, a Moldva mel-
léki, romantikus gótikus stílusban épített várkastély, minden résztvevő számára
emlékezetes élményt nyújtott. Ettől kezdve a Szovjetunió rendszeres résztvevője
az olimpiának. A versenyeket egy jól sikerült prágai kirándulás zárta be.

A magyar csapat tagjai:

1. Benczúr András (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.)
III. díj;
2. Gálfi László (Budapest, I. István Gimnázium, IV. o.) II. díj;
3. Gyárfás András (Budapest, Toldy Ferenc Gimnázium, III. o.);
4. Kéri Gerzson (Sopron, Széchenyi István Gimnázium, IV. o.) I. díj;
5. Kóta József (Tatabánya, Árpád Gimnázium, IV. o.) II. díj;
6. Sebestyén Zoltán (Celldömölk, Berzsenyi Dániel Gimnázium, IV. o.) I. díj;
7. Simonovits Miklós (Budapest, Radnóti Miklós Gimnázium, IV. o.) III. díj;
8. Szidarovszky Ferenc (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III.
o.) II. díj.

4. 1962. Hluboká, 7 résztvevő

	L.	I.	II.	III.	Pont	Hely
Bulgária	8	0	1	2	196	6
Csehszlovákia	8	0	1	3	212	4–5
Lengyelország	8	0	1	3	212	4–5
Magyarország	8	2	3	2	289	1
Németország (Dem.)	8	0	1	0	153	7
Románia	8	0	3	3	257	3
Szovjetunió	8	2	2	2	263	2
Összesen:	56	4	12	15	max.: $8 \cdot 46 = 368$	

5. 1963. Boroszló (Wroclaw), Lengyelország

Az Odera-parti egyetemi város adott otthont az 5. olimpiának. Két jelen-
tős mozzanat az olimpia történetében: a lengyel rendezők bevezetik a feladatok
koordinálását, a feladatokat itt a küldöttségek vezetőiből és helyetteseiből álló
bizottság is átnézte; továbbá: meghívták az akkoriban még eléggé bizonytalan
politikai megítélésű Jugoszláviát; a jugoszláv részvétel volt a kapunyitás a világ-
ra, az első lépés a verseny kiszélesítése irányában.

A magyar csapat:

1. Corrádi Gábor (Győr, Szt. Benedek-rendi Czuczor Gergely Gimnázium, III. o.) III. díj;
2. Fazekas Patrik (Mosonmagyaróvár, Kossuth Lajos Gimnázium, IV. o.) II. díj;
3. Gerencsér László (Budapest, II. Rákóczi Ferenc Gimnázium, III. o.) II. díj;
4. Lovász László (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, I. o.) II. díj;
5. Makai Endre (Budapest, Eötvös József Gimnázium, II. o.) III. díj;
6. Máté Attila (Szeged, Radnóti Miklós Gimnázium, IV. o.) III. díj;
7. Pelikán József (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, I. o.) II. díj;
8. Szidarovszky Ferenc (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) II. díj.

5. 1963. Boroszló, 8 résztvevő

	L.	I.	II.	III.	Pont	Hely
Bulgária	8	0	0	3	145	6
Csehszlovákia	8	1	0	1	151	5
Jugoszlávia	8	1	2	1	162	4
Lengyelország	8	0	0	2	134	8
Magyarország	8	0	5	3	234	2
Németország (Dem.)	8	0	0	3	140	7
Románia	8	1	1	3	191	3
Szovjetunió	8	4	3	1	271	1
Összesen:	64	7	11	17	max.: $8 \cdot 40 = 320$	

6. 1964. Moszkva, Szovjetunió

A még újnak számító moszkvai egyetem a verseny és a szállás helyszíne. Megjelent az első ázsiai résztvevő: Mongólia. Maradandó újítás: a rendező ország saját matematikusaiból koordinációs bizottságot alakít, ezek minden dolgot felülvizsgálhatnak és értékelnek.

A magyar csapat:

1. Berkes István (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, II. o.) II. díj;
2. Corrádi Gábor (Győr, Szt. Benedek-rendi Czuczor Gergely Gimnázium, IV. o.);
3. Freud Róbert (Budapest, Bolyai János Gimnázium, III. o.);
4. Gerencsér László (Budapest, II. Rákóczi Ferenc Gimnázium, IV. o.) I. díj;
5. Komor Tamás (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.);

7. 1965. Berlin, Német Demokratikus Köztársaság

6. Lovász László (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, II. o.) I. díj;
7. Makai Endre (Budapest, Eötvös József Gimnázium, III. o.) III. díj;
8. Pelikán József (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, II. o.) I. díj.

6. 1964. Moszkva, 9 résztvevő

	L.	I.	II.	III.	Pont	Hely
Bulgária	8	0	0	3	198	5
Csehszlovákia	8	0	2	2	194	7
Jugoszlávia	8	0	1	1	155	9
Lengyelország	8	1	1	3	209	4
Magyarország	8	3	1	1	253	2
Mongólia	8	0	0	1	169	8
Németország (Dem.)	8	0	1	2	196	6
Románia	8	0	2	3	213	3
Szovjetunió	8	3	1	3	269	1
Összesen:	72	7	9	19	max.: 8 · 42 = 336	

7. 1965. Berlin, Német Demokratikus Köztársaság

A főváros melletti Berlin–Bogensee főiskoláján német alapossággal és hatalmas szervezési apparátussal rendezték meg a hetedik olimpiát. Első „nyugati” résztvevőként ott voltak finn rokonaink is. A csapatok egy nagyszabású országnéző túrán vettek részt; megcsodálták a naumburgi székesegyházat, Goethe és Liszt weimari házát, az éppen helyreállított drezdai képtárat, Potsdam királyi kertjeit és az alig négy éves berlini falat. A résztvevő országok száma először éri el a tízet.

A magyar csapat:

1. Berkes István (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.) II. díj;
2. Elekes György (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, II. o.) III. díj;
3. Laczkovich Miklós (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.) III. díj;
4. Lovász László (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.) I. díj;
5. Makai Endre (Budapest, Eötvös József Gimnázium, IV. o.) I. díj;
6. Pelikán József (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.) I. díj;
7. Pósa Lajos (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.) II. díj;
8. Szalay Sándor (Debrecen, Fazekas Mihály Gimnázium, II. o.).

7. 1965. Berlin, 10 résztvevő

	L.	I.	II.	III.	Pont	Hely
Bulgária	8	0	0	1	93	8
Csehszlovákia	8	0	1	3	159	6
Finnország	8	0	0	0	62	10
Jugoszlávia	8	0	0	2	137	7
Lengyelország	8	0	1	3	178	4
Magyarország	8	3	2	2	244	2
Mongólia	8	0	0	0	63	9
Németország (Dem.)	8	0	2	3	175	5
Románia	8	0	4	3	222	3
Szovjetunió	8	5	2	0	281	1
Összesen:	80	8	12	17	max.: $8 \cdot 40 = 320$	

8. 1966. Szófia, Bulgária

A magyar csapat először utazott repülővel az olimpiára, a verseny után nagy körutat tettek az országban; jártak a várnai tengerparton és a szerencsétlen emlékű csata színhelyén; megtekintették Tirnovo, Plovdiv, Burgasz nevezetességeit, Szófia környékének romantikus üdülőhelyeit.

A magyar csapat:

1. Babai László (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, II. o.) II. díj;
2. Berkes László (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.);
3. Elekes György (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.);
4. Laczkovich Miklós (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) II. díj;
5. Lovász László (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) I. díj;
6. Pelikán József (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) I. díj;
7. Pósa Lajos (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) I. díj;
8. Surányi László (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.) III. díj.

8. 1966. Szófia, 9 résztvevő

	L.	I.	II.	III.	Pont	Hely
Bulgária	8	0	1	3	236	6
Csehszlovákia	8	0	1	2	215	8
Jugoszlávia	8	0	2	1	224	7
Lengyelország	8	1	4	1	269	4
Magyarország	8	3	2	1	281	2
Mongólia	8	0	0	0	90	9

Németország (Dem.)	8	3	3	0	280	3
Románia	8	1	1	2	257	5
Szovjetunió	8	5	1	1	293	1
Összesen:	72	13	15	11	max.: $8 \cdot 40 = 320$	

9. 1967. Cetinje, Jugoszlávia

A színhely romantikus: egy falu a sziklák tetején, Montenegró régi fővárosa. Látványban feledhetetlen élményt nyújtott a környék: Budva kellemes tengerpartja, a Cattarói-öböl, Ragúza (Dubrovnik) Velencére emlékeztető belvárosa, a Lovcsen csúcsa, amelyre 30°-os hőségben hóakadály zárta el az utat, a Moracsa folyó sziklás kanyonja. Ez a verseny az olimpia jövője szempontjából igen jelentős volt: megjelentek rajta először a nyugati országok diákjai: Anglia, Franciaország, Olaszország, Svédország küldött csapatokat; részvételük egyelőre tapasztalatszerző jellegű volt, részvételük volt a kezdete az olimpia világversennyé válásának.

A magyar csapat:

1. Babai László (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.) II. díj;
2. Csirmaz László (Budapest, I. István Gimnázium, II. o.) II. díj;
3. Elekes György (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) I. díj;
4. Hoffman György (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) II. díj;
5. Laborcei Zoltán (Győr, Révai Miklós Gimnázium, IV. o.) III. díj;
6. Pintz János (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, II. o.) III. díj;
7. Surányi László (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) I. díj;
8. Szűcs András (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.) III. díj.

9. 1967. Cetinje, 13 résztvevő

	L.	I.	II.	III.	Pont	Hely
Anglia	8	1	2	4	231	4
Bulgária	8	1	0	1	159	6–7
Csehszlovákia	8	0	1	3	159	6–7
Franciaország	5	0	0	0	41	13
Jugoszlávia	8	0	0	3	136	8
Lengyelország	8	0	0	1	101	11
Magyarország	8	2	3	3	251	3
Mongólia	8	0	0	1	87	12
Németország (Dem.)	8	3	3	1	257	2

Olaszország	6	0	1	1	110	10
Románia	8	1	1	4	214	5
Svédország	8	0	0	2	135	9
Szovjetunió	8	3	3	2	275	1
Összesen:	99	11	14	26	$8 \cdot 42 = 336$	

10. 1968. Moszkva, Szovjetunió

Moszkva ekkor egy megújuló, fejlődő város bíztaó képét nyújtotta, s a vendéglátás is kifogástalan volt. Még arra is jutott idő, hogy két napon át Szentpétervár (akkor: Leningrád) nevezetességeit megtekintsék a csapatok. A verőfényes moszkvai nyarat csak az utolsó nap döbbenetes politikai híre árnyékolta be: hivatalosan elítélték a prágai tavaszt.

A magyar csapat:

1. Babai László (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) I. díj;
2. Csirmaz László (Budapest, I. István Gimnázium, III. o.) I. díj;
3. Kóczy László (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, II. o.) II. díj;
4. Lempert László (Budapest, Radnóti Miklós Gimnázium, II. o.) II. díj;
5. Mérő László (Budapest, Berzsenyi Dániel Gimnázium, IV. o.) II. díj;
6. Mihaletzky György (Budapest, Piarista Gimnázium, III. o.) I. díj;
7. Pintz János (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.) I. díj;
8. Szűcs András (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) II. díj.

10. 1968. Moszkva, 12 résztvevő

	L.	I.	II.	III.	Pont	Hely
Anglia	8	3	2	2	263	4
Bulgária	8	0	3	1	204	9
Csehszlovákia	8	2	4	0	248	7
Jugoszlávia	8	0	0	3	177	10
Lengyelország	8	2	3	2	262	5
Magyarország	8	3	3	2	291	3
Mongólia	8	0	0	0	74	12
Németország (Dem.)	8	5	3	0	304	1
Olaszország	8	0	0	1	132	11
Románia	8	1	1	2	208	8
Svédország	8	1	2	5	256	6
Szovjetunió	8	5	1	2	298	2
Összesen:	96	22	22	20	$\text{max.: } 8 \cdot 40 = 320$	

11. 1969. Bukarest, Románia

Tovább bővül a résztvevők köre. A főváros környékén kívül a csapatok erdélyi városokat is felkerestek. Az olimpia idején jutott fel az első ember a Holdra; ezt egy kicsit matematikai eredményként is ünnepelték; külön öröm volt a magyar diákok jó szereplése.

A magyar csapat:

1. Bajmóczi Ervin (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, II. o.) II. díj;
2. Csirmaz László (Budapest, I. István Gimnázium, IV. o.) II. díj;
3. Fiala Tibor (Budapest, II. Rákóczi Ferenc Gimnázium, IV. o.) I. díj;
4. Lempert László (Budapest, Radnóti Miklós Gimnázium, III. o.);
5. Mihaletzky György (Budapest, Piarista Gimnázium, IV. o.) II. díj;
6. Pintz János (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) III. díj;
7. Ruzsa Imre (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, II. o.) II. díj;
8. Soós Miklós (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.).

11. 1969. Bukarest, 14 résztvevő

	L.	I.	II.	III.	Pont	Hely
Anglia	8	1	1	1	193	5
Belgium	8	0	0	0	57	13
Bulgária	8	0	0	3	189	6
Csehszlovákia	8	0	0	3	170	8
Franciaország	8	0	1	0	119	11
Hollandia	8	0	0	0	51	14
Jugoszlávia	8	0	2	2	181	7
Lengyelország	8	0	1	0	119	10
Magyarország	8	1	4	2	247	1
Mongólia	8	0	0	1	120	9
Németország (Dem.)	8	0	4	4	240	2
Románia	8	0	4	2	219	4
Svédország	8	0	0	0	104	12
Szovjetunió	8	1	3	3	231	3
Összesen:	112	3	20	21	max.: $8 \cdot 40 = 320$	

12. 1970. Keszthely, Magyarország

A legjobban sikerült magyar rendezésű olimpia. A Balaton közelsége és a jó elhelyezés már biztosította a siker felét. Kitűnően szerepelt a magyar csapat, példamutató munkát végeztek a koordinátorok; szívélyes volt a vendéglátás. Először vett részt a már régóta várt szomszéd: Ausztria. Egy szomorú mozzanatot: a zsűri kezdeti elnökének, Hajós György professzornak, ez volt az utolsó közéleti szereplése. A záróünnepség a budapesti műegyeten volt.

A magyar csapat:

1. Bajmóczi Ervin (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.) I. díj;
2. Borzsák Péter (Budapest, I. István Gimnázium, IV. o.) III. díj;
3. Füredi Zoltán (Budapest, Móricz Zsigmond Gimnázium, II. o.) II. díj;
4. Gönczi István (Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium, IV. o.) I. díj;
5. Kóczy László (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) III. díj;
6. Lempert László (Budapest, Radnóti Miklós Gimnázium, IV. o.) III. díj;
7. Ruzsa Imre (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, , III. o.) I. díj;
8. Szendrei Ágnes (Szeged, Ságvári Endre Gyakorló Gimnázium, III. o.).

12. 1970. Keszthely, 14 résztvevő

	L.	I.	II.	III.	Pont	Hely
Anglia	8	1	0	6	180	6
Ausztria	8	0	0	1	104	12
Bulgária	8	0	0	3	145	7–8
Csehszlovákia	8	0	0	4	145	7–8
Franciaország	8	0	1	4	141	9
Hollandia	8	0	0	1	87	13
Jugoszlávia	8	0	3	3	209	4
Lengyelország	8	0	0	1	105	11
Magyarország	8	3	1	3	233	1
Mongólia	8	0	0	1	58	14
Németország (Dem.)	8	1	2	4	221	2–3
Románia	8	0	3	4	208	5
Svédország	8	0	0	2	110	10
Szovjetunió	8	2	1	3	221	2–3
Összesen:	112	7	11	40	max.: $8 \cdot 40 = 320$	

13. 1971. Zsolna, Csehszlovákia

A csapatok Pozsonyban gyülekeztek, s a gyönyörű Vág völgyön utaztak fel Zsolnára, érintve az ősi egyetemi várost, Nagyszombatot. A verseny egy zsolnai főiskolán volt, az eredményhirdetés és záróünnepség Pozsonyban. Közben emlékezetes kirándulások Zsolna környékén, a bajmóci várban, majd a Tátrában. Még egy kiemelkedő magyar siker. Megjelent az olimpián az első amerikai csapat: Kuba.

14. 1972. Toruń, Lengyelország

A magyar csapat:

1. Bajmóczi Ervin (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) II. díj;
2. Füredi Zoltán (Budapest, Mórícz Zsigmond Gimnázium, III. o.) II. díj;
3. Frankl Péter (Kaposvár, Táncsics Mihály Gimnázium, IV. o.) I. díj;
4. Göndöcs Ferenc (Győr, Révai Miklós Gimnázium, IV. o.) I. díj;
5. Komjáth Péter (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) I. díj;
6. Móri Tamás (Budapest, Berzsényi Dániel Gimnázium, III. o.) II. díj;
7. Nagy András (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) II. díj;
8. Ruzsa Imre (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) I. díj.

13. 1971. Zsolna, 15 résztvevő

	L.	I.	II.	III.	Pont	Hely
Anglia	8	0	1	4	110	5–6
Ausztria	8	0	0	4	82	7
Bulgária	8	0	0	0	39	12
Csehszlovákia	8	0	0	1	55	9
Franciaország	8	0	0	0	38	13
Hollandia	8	0	0	2	48	10
Jugoszlávia	8	0	0	2	71	8
Kuba	4	0	0	0	9	15
Lengyelország	8	1	0	4	118	4
Magyarország	8	4	4	0	255	1
Mongólia	8	0	0	0	26	14
Németország (Dem.)	8	1	1	4	142	3
Románia	8	0	1	4	110	5–6
Svédország	7	0	0	2	43	11
Szovjetunió	8	1	5	2	205	2
Összesen:	115	7	12	29	max.: 8 · 40 = 320	

14. 1972. Toruń, Lengyelország

A csapatok Varsóból indultak a verseny színhelyére, Kopernikus épülő–szépülő szülővárosába, amely már feledni látszott azokat a borzalmakat, amelyek határában 1945 őszéig végbementek. Az oda- és visszaút számos nevezetesség meglátogatásával volt összekötve, többek között Poznań városa és Gniezno, a lengyel királyok régi koronázóhelye. A záróünnepségek a varsói egyetemen voltak.

A magyar csapat:

1. Győri Ervin (Kaposvár, Táncsics Mihály Gimnázium, IV. o.) III. díj;
2. Füredi Zoltán (Budapest, Móricz Zsigmond Gimnázium, IV. o.) I. díj;
3. Kiss Emil (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, II. o.) III. díj;
4. Kollár István (Budapest, Móricz Zsigmond Gimnázium, IV. o.) II. díj;
5. Komornik Vilmos (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) I. díj;
6. Móri Tamás (Budapest, Berzsényi Dániel Gimnázium, IV. o.) II. díj;
7. Pálffy Péter Pál (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.) II. díj;
8. Tuza Zsolt (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) I. díj.

14. 1972. Toruń. 14 résztvevő

	L.	I.	II.	III.	Pont	Hely
Anglia	8	0	2	4	179	5
Ausztria	8	0	0	5	136	7–8
Bulgária	8	0	0	2	120	10
Csehszlovákia	8	0	0	4	130	9
Hollandia	8	0	0	0	51	12
Jugoszlávia	8	0	0	3	136	7–8
Kuba	3	0	0	0	14	14
Lengyelország	8	1	1	1	160	6
Magyarország	8	3	3	2	263	2
Mongólia	8	0	0	0	49	13
Németország (Dem.)	8	1	3	4	239	3
Románia	8	1	3	1	206	4
Svédország	8	0	0	2	60	11
Szovjetunió	8	2	4	2	270	1
Összesen:	107	8	16	30	max.: $8 \cdot 40 = 320$	

15. 1973. Moszkva, Szovjetunió

Öt év után ismét Moszkva a gazdája az olimpiáknak. A résztvevők száma tovább emelkedik. Az elmaradhatatlan moszkvai városnézés most kibővül néhány, Moszkvától északra fekvő kisváros: Zagorszk és Rosztov történelmi emlékeinek megtekintésével. Finnország és Franciaország ismét bekapcsolódik a versenybe.

A magyar csapat:

1. Ablonczy Péter (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) III. díj;
2. Kiss Emil (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.) II. díj;
3. Kollár János (Budapest, Piarista Gimnázium, III. o.) I. díj;
4. Pálffy Péter Pál (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) II. díj;

16. 1974. Erfurt, Német Demokratikus Köztársaság

5. Pröhle Péter (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.) III. díj;
6. Simányi Nándor (Budapest, József Attila Gimnázium, III. o.) III. díj;
7. Sparing László (Szombathely, Nagy Lajos Gimnázium, II. o.) III. díj;
8. Veres Sándor (Debrecen, Fazekas Mihály Gimnázium, III. o.) III. díj.

15. 1973. Moszkva, 16 résztvevő

	L.	I.	II.	III.	Pont	Hely
Anglia	8	1	0	5	164	5
Ausztria	8	0	0	6	144	8
Bulgária	8	0	0	1	96	12–13
Csehszlovákia	8	0	1	4	149	7
Finnország	8	0	0	2	86	14
Franciaország	8	0	3	1	153	6
Hollandia	8	0	0	2	96	12–13
Jugoszlávia	8	0	0	5	137	10
Kuba	5	0	0	1	42	16
Lengyelország	8	0	2	4	174	4
Magyarország	8	1	2	5	215	2
Mongólia	8	0	0	1	65	15
Németország (Dem.)	8	0	3	4	188	3
Románia	8	0	1	3	141	9
Svédország	8	0	1	1	99	11
Szovjetunió	8	3	2	3	254	1
Összesen:	125	5	15	48	max.: $8 \cdot 40 = 320$	

16. 1974. Erfurt, Német Demokratikus Köztársaság

Erfurt, a virágok városa fogadta a megnövekedett mezőnyt; első alkalommal vett részt az USA és Vietnam csapata. A zárőnnepségre Berlinbe utaztak a csapatok, ahol bőséges program várta a diákokat; a városnézést összekapcsolták egy hajókirándulással a Spree folyón; megtekintették a potsdami konferencia színhelyét és a treptowi szovjet emlékművet, de a csodálatos pergamoni oltárt is; az új TV-toronyból át lehetett tekinteni a fallal körülvett nyugati városrészre. Bizonyára furcsán néztek volna arra, aki kijelenti, hogy néhány év múlva ennek a falnak egy darabját a Tabánban Budán kuriózumként fogják mutogatni. . .

A magyar csapat:

1. Csuka Gábor (Budapest, Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium, IV. o.) III. díj;
2. Kertész Gábor (Budapest, I. István Gimnázium, IV. o.) II. díj;
3. Kiss Emil (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) II. díj;
4. Kollár János (Budapest, Piarista Gimnázium, IV. o.) I. díj;

5. Pröhle Péter (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) III. díj;
6. Simányi Nándor (Budapest, József Attila Gimnázium, IV. o.) III. díj;
7. Somogyi Antal (Budapest, Móricz Zsigmond Gimnázium, IV. o.);
8. Sparing László (Szombathely, Nagy Lajos Gimnázium, III. o.) II. díj.

16. 1974. Erfurt, 18 résztvevő

	L.	I.	II.	III.	Pont	Hely
Am. Egy. Államok	8	0	5	3	243	2
Anglia	8	0	1	3	188	9
Ausztria	8	1	1	4	212	6
Bulgária	8	0	1	4	171	11
Csehszlovákia	8	0	0	2	158	12
Finnország	8	0	0	1	111	16
Franciaország	8	1	1	3	194	8
Hollandia	8	0	0	1	112	15
Jugoszlávia	8	2	1	2	216	5
Kuba	7	0	0	0	65	17
Lengyelország	8	0	0	2	138	14
Magyarország	8	1	3	3	237	3
Mongólia	8	0	0	0	60	18
Németország (Dem.)	8	0	5	2	236	4
Románia	8	1	1	3	199	7
Svédország	8	1	1	0	187	10
Szovjetunió	8	2	3	2	256	1
Vietnam	5	1	1	2	146	13
Összesen:	140	10	24	37	max.: $8 \cdot 40 = 320$	

17. 1975. Burgasz, Bulgária

A bolgár tengerparti város az olimpia színhelye, itt már érezhető a „török világ” közelsége. Szép kirándulások a tengerpart mentén, majd egy élményekkel teli út Szófiába. A Sipka-szorosnál most nem volt „minden csendes”, nyüzsgöttek a turisták; Tirnovóban végig lehetett tekinteni a bolgár történelmet; a záróünnepség a Szófia egyetemen volt azzal a kellemes érzéssel, hogy a magyar csapat szerezte meg a legtöbb pontot. Jól sikerült búcsúest a főváros fölé magasodó hegység egy előkelő vendéglőjében.

A magyar csapat:

1. Bagó Balázs (Győr, Révai Miklós Gimnázium, IV. o.) III. díj;
2. Éltető László (Budapest, Berzsényi Dániel Gimnázium, IV. o.) II. díj;
3. Jakab Tibor (Budapest, Berzsényi Dániel Gimnázium, IV. o.) II. díj;
4. Neumann Attila (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) III. díj;

5. Seress Ákos (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, II. o.) III. díj;
6. Soukup Lajos (Budapest, I. László Gimnázium, III. o.) II. díj;
7. Sparing László (Szombathely, Nagy Lajos Gimnázium, IV. o.) II. díj;
8. Surján Péter (Budapest, Móricz Zsigmond Gimnázium, IV. o.) II. díj.

17. 1975. Burgasz, 17 résztvevő

	L.	I.	II.	III.	Pont	Hely
Am. Egy. Államok	8	3	1	3	247	3
Anglia	8	2	2	3	239	5
Ausztria	8	1	1	2	192	6
Bulgária	8	0	1	4	186	7
Csehszlovákia	8	0	0	2	162	12
Franciaország	8	1	1	1	176	9
Görögország	8	0	1	0	95	15
Hollandia	8	0	0	1	67	17
Jugoszlávia	8	0	1	1	163	11
Lengyelország	8	0	1	1	124	14
Magyarország	8	0	5	3	258	1
Mongólia	8	0	0	1	75	16
Németország (Dem.)	8	0	4	4	249	2
Románia	8	0	1	3	180	8
Svédország	8	0	2	0	160	13
Szovjetunió	8	1	3	4	246	4
Vietnam	7	0	1	3	175	10
Összesen:	135	8	25	36	max.: 8 · 40 = 320	

Az olimpiák történelmében ezzel a versennyel korszak zárult le. Eddig ezeket a szocialista tömbhöz tartozó országok rendezvényeinek lehetett tekinteni, amelyekre „vendégeket” is meghívtak. A következő olimpiát már a „vasfüggöny másik oldalán” rendezték, s ezzel erőteljessé vált az a folyamat, amely végül egy regionális verseny világvérsennyé való kiszélesítését eredményezte.

Itt kell megemlékeznünk azokról, akik a kezdeti időkben együttesen megőrizték — sokszor nem kis nehézségek árán — az olimpia eszmeiségét, annak nemcsak szólamokban megnyilvánuló baráti hangulatát, biztosították folyamatoságát, és hozzájárultak matematikai színvonalának az emeléséhez. Közéjük tartoznak Bulgáriából Alipi Nikolov Matejev, Sztojan Budurov; Csehszlovákiából Rudolf Zelinka, Ján Vyšin, František Zítek; Lengyelországból Mieczyslaw Czyżykowski, Andrzej Mąkowski; Magyarországról Hódi Endre; Németországból (NDK) Johannes Gronitz, Herbert Titze, Wolfgang Engel; Romániából Tiberiu Roman, Gheorghe D. Simionescu és a Szovjetunióból Jelena Alexandrovna Morozova, Ivan Szemjonovics Petrakov.

18. 1976. Lienz, Ausztria

Kelet-Tirol csodálatos fekvésű központja (olv. li-enc) adott otthont az első „nyugati” olimpiának, ott, ahol a Dráva nevű patak beleömlik egy Isel nevű folyóba, és attól kezdve Dráva néven futnak kelet felé. A zsűri a világnak talán legjobb fekvésű iskolájában Marienblutban ülésezett, az ablakon a Grossglockner tekintett be. Számos rendezvény, kirándulás tette emlékezetessé az olimpiát: séta a Grossglockner gleccseren, átkelés az Alpok hágóin, Mozart városa: Salzburg és persze Bécs, a császárváros; záróünnepség a Burghan, a díjazottak értékes ajándékokat kaptak, amikre a magyar pénzügyőrök súlyos vámot róttak ki.

A magyar csapat:

1. Bodó Zalán (Budapest, I. István Gimnázium, III. o.) III. díj;
2. Húsvéti Tamás (Székesfehérvár, Teleki Blanka Gimnázium, IV. o.) III. díj;
3. Magyar Zoltán (Budapest, Jedlik Ányos Gimnázium, III. o.) II. díj;
4. Miklós Dezső (Budapest, Berzsenyi Dániel Gimnázium, IV. o.) III. díj;
5. Moussong Gábor (Tatabánya, Árpád Gimnázium, IV. o.) III. díj;
6. Sali Attila (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, II. o.);
7. Seress Ákos (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.) II. díj;
8. Soukup Lajos (Budapest, I. László Gimnázium, IV. o.) II. díj.

18. 1976. Lienz, 18 résztvevő

(Versenyen kívül indult az NSZK két diákja)

	L.	I.	II.	III.	Pont	Hely
Am. Egy. Államok	8	1	4	1	188	3
Anglia	8	2	4	1	214	2
Ausztria	8	1	2	5	167	5
Bulgária	8	0	2	6	174	4
Csehszlovákia	8	0	1	3	116	12–13
Finnország	8	0	0	1	52	16
Franciaország	8	1	3	1	165	6
Görögország	8	0	0	0	50	17
Hollandia	8	0	0	1	78	15
Jugoszlávia	8	0	1	3	116	12–13
Kuba	3	0	0	0	16	18
Lengyelország	8	0	0	6	138	9
Magyarország	8	0	3	4	160	7
Németország (Dem.)	8	0	2	3	142	8
Románia	8	0	1	3	118	11
Svédország	8	0	1	3	120	10
Szovjetunió	8	4	3	1	250	1
Vietnam	8	0	1	3	112	14
Összesen:	139	9	28	45	max.: $8 \cdot 40 = 320$	

19. 1977. Belgrád, Jugoszlávia

A versenyt a belgrádi úttörővárosban rendezték meg, kellemes körülményeket biztosítva a versenynek. Ugyanitt megkísérelték, hogy a diákok ismertessék a megoldásaikat a többiekkel, de ez nyelvi nehézségek miatt nem nagyon sikerült. Érdekes hajókirándulás a kazáni szorosban az új vaskapu erőműhöz, némi pillantással Magyarország régi hatáira. Megjelent a versenyen az első afrikai csapat: Algéria; a résztvevő országok száma 20 fölé emelkedik.

A magyar csapat:

1. Balázs Iván József (Budapest, Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) III. díj;
2. Bodó Zalán (Budapest, I. István Gimnázium, IV. o.) III. díj;
3. Csikós Balázs (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.);
4. Homonnay Géza (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) II. díj;
5. Ivanyos Gábor (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.);
6. Knébel István (Budapest, József Attila Gimnázium, IV. o.) II. díj;
7. Magyar Zoltán (Budapest, Jedlik Ányos Gimnázium, IV. o.) I. díj;
8. Seress Ákos (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) II. díj.

19. 1977. Belgrád, 21 résztvevő

	L.	I.	II.	III.	Pont	Hely
Algéria	3	0	0	0	17	21
Am. Egy. Államok	8	2	3	1	202	1
Anglia	8	1	3	3	190	3–4
Ausztria	8	1	1	2	151	12
Belgium	7	0	0	0	33	19
Bulgária	8	0	3	3	172	6
Csehszlovákia	8	0	3	2	161	9
Finnország	8	0	0	1	88	16
Franciaország	8	1	0	0	126	14
Hollandia	8	1	2	3	185	5
Jugoszlávia	8	0	3	3	159	10
Kuba	4	0	0	0	41	18
Lengyelország	8	1	2	2	157	11
Magyarország	8	1	3	2	190	3–4
Mongólia	8	0	0	0	49	17
Németország (Dem.)	8	2	1	1	163	8
Németország (Szöv.)	8	1	1	4	165	7
Olaszország	5	0	0	0	22	20
Románia	8	0	1	2	122	15
Svédország	8	1	1	2	137	13
Szovjetunió	8	1	2	4	192	2
Összesen:	155	13	29	35	max.: 8 · 40 = 320	

20. 1978. Bukarest, Románia

Az egyetlen olimpia, amelyen nem vett részt magyar csapat. Hivatalos magyar közlemény szerint a magyar művelődési miniszterhez nem érkezett meg a meghívás; ennek híjával nem küldtek magyar diákokat a versenyre. A politikai háttér nyilvánvaló abból a tényből, hogy rajtunk kívül a Szovjetunió és az NDK csapata sem vett részt ezen az olimpián; a távolmaradás indítékát tehát nem Budapesten kell keresni. Ez a jubileumi olimpia egyébként egyike volt a legszínvonalasabb olimpiáknak.

20. 1978. Bukarest, 17 résztvevő

	L.	I.	II.	III.	Pont	Hely
Am. Egy. Államok	8	1	3	3	225	2
Anglia	8	1	2	2	201	3
Ausztria	8	0	3	2	174	9
Bulgária	8	0	1	3	182	7
Csehszlovákia	8	0	2	3	195	5
Finnország	8	0	0	2	118	13
Franciaország	8	0	2	4	179	8
Hollandia	8	0	1	1	157	11
Jugoszlávia	8	0	1	2	171	10
Kuba	4	0	0	2	68	15
Lengyelország	8	0	0	2	156	12
Mongólia	8	0	0	0	61	17
Németország (Szöv.)	8	1	0	3	184	6
Románia	8	2	3	2	237	1
Svédország	8	0	0	1	117	14
Törökország	8	0	0	0	66	16
Vietnam	8	0	2	6	200	4
Összesen:	132	5	20	38	max.: $8 \cdot 40 = 320$	

21. 1979. London, Anglia

A versenyek a londoni egyetemen voltak, a zsűri Bristolból „járt be” a versenyekre. A mezőny Izrael és Luxemburg részvételével bővült. A vendéglátók arra törekedtek, hogy a résztvevők minél többet megismerjenek Angliából: volt hajókirándulás a Themzén Greenwichbe, hangverseny a Királyi Zeneakadémián, buszkirándulás Stratfordba, Shakespeare szülőhelyére és a windsori kastélyba; a diákok két napra belekóstolhattak az oxfordi egyetemi életbe, és némi képet nyerhettek egy országnyi nagyságú városról: Londonról.

A magyar csapat:

1. Bohus Géza (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.);
2. Erdélyi Tamás (Budapest, Berzsényi Dániel Gimnázium, IV. o.) III. díj;
3. Hajnal Péter (Szeged, Radnóti Miklós Gimnázium, IV. o.) II. díj;

4. Kiss György (Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium, III. o.);
5. Nagy Gábor (Székesfehérvár, Teleki Blanka Gimnázium, IV. o.);
6. Szegedy Márió (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) III. díj;
7. Umann Gábor (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.) II. díj;
8. Tardos Gábor (Budapest, Berzsenyi Dániel Gimnázium, I. o.).

21. 1979. London, 23 résztvevő

	L.	I.	II.	III.	Pont	Hely
Am. Egy. Államok	8	1	2	2	199	5
Anglia	8	0	4	4	218	4
Ausztria	8	0	0	4	152	12
Belgium	8	0	0	1	66	19
Brazília	5	0	0	0	19	22
Bulgária	8	0	0	5	150	13
Csehszlovákia	8	1	0	4	178	7
Finnország	8	0	0	1	89	18
Franciaország	8	1	0	1	155	11
Görögország	8	0	0	1	57	20
Hollandia	8	0	1	1	131	16
Izrael	8	0	0	2	119	17
Jugoszlávia	8	0	1	4	168	9
Kuba	4	0	0	0	35	21
Lengyelország	8	0	2	3	160	10
Luxemburg	1	0	0	0	7	23
Magyarország	8	0	2	2	176	8
Németország (Dem.)	8	0	2	2	180	6
Németország (Szöv.)	8	1	5	2	235	3
Románia	8	1	4	2	240	2
Svédország	8	0	2	1	143	14
Szovjetunió	8	2	4	1	267	1
Vietnam	4	1	3	0	134	15
Összesen:	166	8	32	43	max.: 8 · 40 = 320	

1980.

1980-ban rendezésre vállalkozó ország híján nem volt diákolimpia. Ennek kétségtelenül oka volt az is, hogy központi intéző szerv nélkül semmi meghatározott rend nem volt arra, hogy melyik ország mikor rendez versenyt, de közrejátzott az a tévesnek bizonyult, több helyen is közzétett hír is, hogy Mongólia vállalkozott az 1980. évi verseny megrendezésére.

Az olimpia pótlására több helyen rendeztek regionális versenyt; egy ilyenről számolt be függelékünk is.

22. 1981. Washington, Amerikai Egyesült Államok

Kellemes repülőúton Varsóból utazott a magyar csapat New Yorkba; létszámát takarékosági okokból felére csökkentették. A takarékoság egyébként nem volt indokolt. A csapatok a new-brunswicki Rutgers Egyetemen gyülekeztek, onnan utaztak Washingtonba. Amerika természetesen tele volt szenzációval; a magyar diákok a trópusi hőség ellenére megnézték mindent, amihez csak hozzájutottak: végigsétáltak New York ötödik sugárútján, belógtak a new yorki Metropolitan Múzeumba, felmentek néhány felhőkarcoló tetejére, látták az ENSZ palota üléstermeit, Washington csodálatos (de ennek ellenére ingyenes) kiállításait és a záróünnepségen beültek Einstein szobrának az ölébe. A verseny feladatai most kissé könnyűre sikerültek (a mezőnyhöz képest), ezért a lényegében teljes 36 megoldásért kénytelenek voltak első díjat kiosztani.

Megugrott a résztvevő csapatok száma is, megjelent Ausztrália és több új állam, főleg az amerikai kontinensről.

A magyar csapat:

1. Károlyi Gyula (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.) I. díj;
2. Simonyi Gábor (Budapest, Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium, IV. o.) I. díj;
3. Szabó Endre (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.) I. díj;
4. Tardos Gábor (Budapest, Berzsenyi Dániel Gimnázium, III. o.) II. díj.

22. 1981. Washington, 27 résztvevő

	L.	I.	II.	III.	Pont	Hely
Am. Egy. Államok	8	4	3	1	314	1
Anglia	8	3	4	1	301	3
Ausztrália	8	4	2	1	290	4
Ausztria	8	0	0	1	122	21
Belgium	8	0	2	0	139	19
Brazília	8	1	0	0	172	16
Bulgária	8	2	3	3	287	5
Csehszlovákia	5	1	3	1	190	14
Finnország	8	1	1	3	206	13
Franciaország	8	2	0	3	209	11
Görögország	8	0	0	0	104	22
Hollandia	8	0	3	1	219	10
Izrael	6	1	0	3	175	15
Jugoszlávia	8	1	2	3	246	8
Kanada	8	2	2	1	249	7
Kolumbia	8	0	0	0	93	23
Kuba	8	0	1	0	141	18
Lengyelország	8	2	3	1	259	6
Luxemburg	1	1	0	0	42	25

23. 1982. Budapest, Magyarország

Magyarország	4	3	1	0	164	17
Mexikó	5	0	0	0	12	27
Németország (Szöv.)	8	5	2	1	312	2
Románia	4	0	2	2	136	20
Svédország	8	0	1	3	207	12
Szovjetunió	6	3	2	1	230	9
Tunézia	2	0	0	0	32	26
Venezuela	8	0	0	0	64	24
Összesen:	185	36	37	30	max.: $8 \cdot 42 = 336$	

23. 1982. Budapest, Magyarország

A harmadik magyarországi olimpia azzal a sajnálatos ténnyel kerül be a versenyek történelmébe, hogy minden országból csak fél (azaz 4 tagú) csapatot hívtak meg. Ezt takarékosági szempontokkal, vagyis pénzhiánnyal magyarázták; a helyzet ismeretében ez azonban nem bizonyult indokoltnak. Az igen-igen szerény vendéglátást némileg talán feledtetni tudta a diákokkal foglalkozó fiatal gárda talpraesettsége és találékonysága, továbbá a verseny és a koordináció magas matematikai színvonala. A résztvevő országok száma itt érte el először a harmincat; ettől kezdve minden helyesen megoldott feladat pontértéke: 7.

A magyar csapat:

1. Csákány Rita (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) III. díj;
2. Károlyi Gyula (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) II. díj;
3. Szabó Endre (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) II. díj;
4. Tardos Gábor (Budapest, Berzsenyi Dániel Gimnázium, IV. o.) II. díj.

23. 1982. Budapest, 30 résztvevő

	L.	I.	II.	III.	Pont	Hely
Algéria	3	0	0	0	23	27–28
Am. Egy. Államok	4	1	2	1	136	3–4
Anglia	4	0	0	4	103	10
Ausztrália	4	0	0	1	66	20–21
Ausztria	4	1	0	1	82	16
Belgium	4	0	0	1	50	24
Brazília	4	0	0	1	66	20–21
Bulgária	4	0	0	4	108	9
Csehszlovákia	4	0	2	2	115	7
Finnország	4	0	2	1	113	8
Franciaország	4	1	0	0	89	15
Görögország	4	0	0	0	55	23

Hollandia	4	0	1	1	92	14
Izrael	4	0	0	1	75	18
Jugoszlávia	4	0	2	0	98	12
Kanada	4	0	0	2	78	17
Kolumbia	4	0	0	0	34	26
Kuba	4	0	0	0	44	25
Kuvait	4	0	0	0	4	30
Lengyelország	4	0	1	2	96	13
Magyarország	4	0	3	1	125	6
Mongólia	4	0	0	1	56	22
Németország (Dem.)	4	2	1	1	136	3-4
Németország (Szöv.)	4	2	2	0	145	1
Románia	4	0	1	2	99	11
Svédország	4	0	0	2	74	19
Szovjetunió	4	2	1	1	137	2
Tunézia	4	0	0	0	19	29
Venezuela	4	0	0	0	23	27-28
Vietnam	4	1	2	1	133	5
Összesen:	119	10	20	31	max.: $4 \cdot 42 = 168$	

24. 1983. Párizs, Franciaország

A Sorbonne közelében, a diáknegyed egy kollégiumában zajlottak a versenyek, s a résztvevők minden perc szabadidejüket felhasználták, hogy minél többet ismerjenek meg abból a világcsofából, amit úgy hívnak: Párizs. A vendéglátók ehhez szívélyesen hozzásegítették a résztvevőket, amit csak be tudtak zsúfolni a rendelkezésre álló rövid időbe, mindazt megmutatták Párizsból és környékéből. Jó érzésünket természetesen az növelte a legnagyobbra, amikor a Sorbonne dísztermében minden versenyzőnk díjat vehetett át. Országonként hat versenyzőt hívtak meg; ez a létszám a következőkben állandósult.

A magyar csapat:

1. Erdős László (Budapest, Berzsenyi Dániel Gimnázium, III. o.) II. díj;
2. Heteyi Gábor (Pécs, Leővey Klára Gimnázium, IV. o.) II. díj;
3. Magyar Ákos (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.) III. díj;
4. Megyesi Gábor (Szeged, Ságvári Endre Gyakorló Gimnázium, II. o.) II. díj;
5. Tóth Gábor (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) II. díj;
6. Törőcsik Jenő (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) III. díj.

25. 1984. Prága, Csehszlovákia**24. 1983. Párizs, 32 résztvevő**

	L.	I.	II.	III.	Pont	Hely
Algéria	6	0	0	0	6	30
Am. Egy. Államok	6	1	3	2	171	2
Anglia	6	0	3	1	121	11
Ausztrália	6	0	1	2	81	19
Ausztria	6	0	0	0	38	22
Belgium	6	0	0	0	26	26–27
Brazília	6	0	0	3	77	20
Bulgária	6	0	1	4	137	9
Csehszlovákia	6	1	1	3	142	8
Finnország	6	0	0	3	103	13
Franciaország	6	0	2	3	123	10
Görögország	6	0	0	3	96	16–17
Hollandia	6	1	3	0	143	7
Izrael	6	0	0	5	96	16–17
Jugoszlávia	6	0	0	5	89	18
Kanada	6	0	0	4	102	14
Kolumbia	6	0	0	0	21	28
Kuba	6	0	0	1	36	24
Kuvait	6	0	0	0	4	31
Lengyelország	6	0	0	3	101	15
Luxemburg	2	0	0	0	13	29
Magyarország	6	0	4	2	170	3
Marokkó	6	0	0	0	32	25
Németország (Dem.)	6	0	0	5	117	12
Németország (Szöv.)	6	4	1	0	212	1
Olaszország	6	0	0	0	2	32
Románia	6	1	2	3	161	5
Spanyolország	4	0	0	0	37	23
Svédország	6	0	0	0	47	21
Szovjetunió	6	1	3	2	169	4
Tunézia	6	0	0	0	26	26–27
Vietnam	6	0	3	3	148	6
Összesen:	186	9	27	57	max.: 6 · 42 = 252	

25. 1984. Prága, Csehszlovákia

Prága egyik kertvárosában helyezték el a csapatokat, itt volt egy közeli iskolában a verseny is. A nyitó- és záróünnepségek színhelye Európa egyik legrégebbi egyetemének, a Károly-Egyetemnek a díszterme volt. A főváros környékén meglátogattak a résztvevők néhány történelmileg nevezetes helyet, többek között Karlštejn várat; a magyar csapatot különösen érdekelte az a sok magyar vonatkozású emlék, amit a sok évszázados közös sors hagyott a történelmi emlékekben oly gazdag „arany” Prágában.

A magyar csapat:

1. Erdős László (Budapest, Berzsényi Dániel Gimnázium, IV. o.) III. díj;
2. Kós Géza (Budapest, Berzsényi Dániel Gimnázium, II. o.) II. díj;
3. Magyar Ákos (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) II. díj;
4. Megyesi Gábor (Szeged, Ságvári Endre Gyakorló Gimnázium, III. o.) II. díj;
5. Mócsy Miklós (Budapest, I. István Gimnázium, IV. o.) I. díj;
6. Szabó Zoltán (Budapest, I. István Gimnázium, IV. o.) II. díj.

25. 1984. Prága, 34 résztvevő

	L.	I.	II.	III.	Pont	Hely
Algéria	4	0	0	0	36	28
Am. Egy. Államok	6	1	4	1	195	4–5
Anglia	6	1	3	1	169	6
Ausztrália	6	0	1	2	103	15
Ausztria	6	0	1	2	97	16
Belgium	6	0	0	1	56	23–24
Brazília	6	0	0	3	92	18
Bulgária	6	2	3	1	203	2
Ciprus	6	0	0	1	47	26
Csehszlovákia	6	0	2	2	125	13
Finnország	6	0	0	0	31	29
Franciaország	6	0	2	2	126	12
Görögország	6	0	1	0	88	19
Hollandia	6	0	1	2	93	17
Jugoszlávia	6	0	0	4	105	14
Kanada	6	0	0	1	83	20
Kolumbia	6	0	0	2	80	21
Kuba	6	0	0	1	67	22
Kuvait	6	0	0	0	9	33
Lengyelország	6	0	1	5	140	11
Luxemburg	1	0	0	1	22	32
Magyarország	6	1	4	1	195	4–5
Marokkó	6	0	0	1	56	23–24
Mongólia	6	0	3	2	146	10
Németország (Dem.)	6	1	2	3	161	8
Németország (Szöv.)	6	0	2	4	150	9
Norvégia	1	0	0	1	24	31
Olaszország	6	0	0	0	0	34
Románia	6	2	2	2	199	3
Spanyolország	6	0	0	0	43	27
Svédország	6	0	0	0	53	25
Szovjetunió	6	5	1	0	235	1
Tunézia	6	0	0	0	29	30
Vietnam	6	1	2	3	162	7
Összesen:	192	14	35	49	max.: $6 \cdot 42 = 252$	

26. 1985. Joutsa, Finnország

A csapat Moszkváig repült, onnan vonattal utazott Helsinkibe, s onnan Dél-Finnország Joutsa nevű városkájának egy üdülőtelepére; a zsűri Heinolában ülésezett. Rendkívül jól szervezett, nagyon kellemes hangulatú olimpia volt. A csapat szabad idejében modern számítógépekkel játszhatott; a kirándulásokon sok tájjal ismerkedhettek meg, jártak többek között Lahtiban, a téli sportok központjában, a nagyon szép fekvésű Jyväskyläben és természetesen a zárőnnepségek színhelyén, Helsinkiben, ahol még egy érdekes hajókirándulásra is jutott idő. Sok élménnyel telten, igen jó eredményekkel és a győztesek jutalmaival vett búcsút a magyar csapat a rokon vendéglátástól, s jó hangulatát még a szovjet–finn határon való átkelés izgalmai sem tudták megtörni. Eggyel több mesélnivaló az otthoniaknak. . .

A magyar csapat tagjai:

1. Bán Rita (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) II. díj;
2. Birkás György (Siófok, Perczel Mór Gimnázium, IV. o.) III. díj;
3. Bóna Miklós (Székesfehérvár, József Attila Gimnázium, III. o.) III. díj;
4. Kós Géza (Budapest, Berzsényi Dániel Gimnázium, III. o.) I. díj;
5. Makai Géza (Szeged, Ságvári Endre Gyakorló Gimnázium, III. o.) II. díj;
6. Megyesi Gábor (Szeged, Ságvári Endre Gyakorló Gimnázium, IV. o.) I. díj.

26. 1985. Joutsa, 38 résztvevő

	L.	I.	II.	III.	Pont	Hely
Algéria	6	0	0	0	36	29
Am. Egy. Államok	6	2	4	0	180	2
Anglia	6	0	2	3	121	10
Ausztrália	6	1	1	2	117	11
Ausztria	6	0	0	3	77	17
Belgium	6	1	0	1	60	24–25
Brazília	6	0	0	2	83	15
Bulgária	6	2	3	0	165	4
Ciprus	6	0	0	1	27	32–33
Csehszlovákia	6	0	3	1	105	12–13
Finnország	6	0	0	0	25	34–35
Franciaország	6	0	2	3	125	9
Görögország	6	0	1	1	69	20
Hollandia	6	0	0	1	72	19
Irán	1	0	1	0	28	31
Izland	2	0	0	0	13	37
Izrael	6	0	1	0	81	16
Jugoszlávia	6	0	0	2	68	21
Kanada	6	0	1	4	105	12–13
Kína	2	0	0	1	27	32–33
Kolumbia	6	0	0	2	54	26–27
Kuba	6	0	0	2	74	18

Kuvait	5	0	0	0	7	38
Lengyelország	6	0	1	4	101	14
Magyarország	6	2	2	2	168	3
Marokkó	6	0	0	2	60	24–25
Mongólia	6	0	1	0	62	23
Németország (Dem.)	6	0	3	3	136	8
Németország (Szöv.)	6	1	1	4	139	7
Norvégia	6	0	0	0	34	30
Olaszország	5	0	0	0	20	36
Románia	6	3	3	0	201	1
Spanyolország	4	0	0	0	25	34–35
Svédország	6	0	0	1	65	22
Szovjetunió	6	1	2	2	140	6
Törökország	6	0	0	2	54	26–27
Tunézia	4	0	0	2	46	28
Vietnam	6	1	3	1	144	5
Összesen:	209	14	35	52	max.: $6 \cdot 42 = 252$	

27. 1986. Varsó, Lengyelország

A nehéz viszonyok között élő Lengyelország volt a 27. Olimpia házigazdája. A csapatokat Varsó külvárosában egy kollégiumi negyedben helyezték el; szerény körülmények között, de magas matematikai színvonalon rendezték meg a lengyelek harmadik diákolimpiájukat. Az országnéző programban ezúttal az újjáépült varsói királyi palotának és Chopin szülőházának (Żelazowa Wola) megtekintése szerepelt.

A magyar csapat tagjai:

1. Benczúr András (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.) III. díj;
2. Bóna Miklós (Székesfehérvár, József Attila Gimnázium, IV. o.);
3. Kós Géza (Budapest, Berzsenyi Dániel Gimnázium, IV. o.) I. díj;
4. Lipták László (Szeged, Ságvári Endre Gyakorló Gimnázium, III. o.) II. díj;
5. Makai Géza (Szeged, Ságvári Endre Gyakorló Gimnázium, IV. o.) III. díj;
6. Tóth Géza (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) II. díj.

27. 1986. Varsó, 37 résztvevő

	L.	I.	II.	III.	Pont	Hely
Algéria	6	0	0	2	80	21
Am. Egy. Államok	6	3	3	0	203	1–2
Anglia	6	0	2	3	141	11
Ausztrália	6	0	0	5	117	15
Ausztria	6	0	2	2	127	13
Belgium	6	0	1	2	79	22

28. 1987. Havanna, Kuba

Brazília	6	1	0	0	69	24
Bulgária	6	1	3	2	161	7
Ciprus	6	0	1	0	53	31
Csehszlovákia	6	0	3	3	149	10
Finnország	6	0	0	1	60	27
Franciaország	6	1	1	2	131	12
Görögország	6	0	0	2	63	26
Izland	4	0	0	0	37	36
Izrael	6	0	2	2	119	14
Jugoszlávia	6	0	0	2	84	20
Kanada	6	0	2	1	112	16
Kína	6	3	1	1	177	4
Kolumbia	6	0	0	0	38	35
Kuba	6	0	0	0	51	32
Kuvait	5	0	0	0	48	34
Lengyelország	6	0	0	3	93	17
Luxemburg	2	0	0	0	22	37
Magyarország	6	1	2	2	151	8
Marokkó	6	0	1	2	90	18
Mongólia	6	0	0	0	54	30
Németország (Dem.)	6	1	3	2	172	5
Németország (Szöv.)	6	2	4	0	196	3
Norvégia	6	0	1	0	68	25
Olaszország	3	0	0	2	49	33
Románia	6	2	2	1	171	6
Spanyolország	4	0	1	2	78	23
Svédország	6	0	0	1	57	28
Szovjetunió	6	2	4	0	203	1–2
Törökország	6	0	0	0	55	29
Tunézia	6	0	0	1	85	19
Vietnam	6	1	2	2	146	9
Összesen:	210	18	41	48	max.: $6 \cdot 42 = 252$	

28. 1987. Havanna, Kuba

Madridon át érkezett a csapat Havannába, ahol trópusi hőség fogadta a hűs repülőből kiszállókat, s ez a hőség mindvégig kitartott a teljes olimpia folyamán. A várakozással ellentétben mind az elszállásolás, mind az ellátás kifogástalan volt; a felüdülést kellemes uszodák biztosították; egyszer-kétszer még a tengerben is megmártózhattak az arra vállalkozók. A városoktól eléggé távoltartották a csapatokat, de az ország természeti szépségeit igyekeztek megismertetni a vendégekkel. A szakmai program időnként döcögött ugyan, de végeredményben az eredményekkel és az élményekkel is megelégedve szálltunk be a hazafelé tartó repülőgépre. A résztvevő országok száma új közép- és dél-amerikai államok megjelenésével egyébként itt negyven fölé emelkedett.

A magyar csapat tagjai:

1. Beke Tibor (Nagyatád, Ady Endre Gimnázium, III. o.) II. díj;
2. Benczúr András (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.) II. díj;
3. Cynolter Gábor (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) II. díj;
4. Keleti Tamás (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.) II. díj;
5. Lipták László (Szeged, Ságvári Endre Gyakorló Gimnázium, IV. o.) III. díj;
6. Rimányi Richárd (Győr, Révai Miklós Gimnázium, IV. o.) II. díj.

28. 1987. Kuba, 42 résztvevő

	L.	I.	II.	III.	Pont	Hely
Algéria	6	0	0	0	29	36
Am. Egy. Államok	6	2	3	1	220	5
Anglia	6	1	2	2	182	10
Ausztrália	6	0	3	0	143	15
Ausztria	6	0	2	3	150	14
Belgium	6	0	0	1	74	25
Brazília	6	1	0	2	116	19
Bulgária	6	1	3	2	210	7
Ciprus	6	0	0	0	42	33
Csehszlovákia	6	0	4	2	192	9
Finnország	6	0	0	2	69	27–28
Franciaország	6	0	3	2	154	12
Görögország	6	0	0	4	111	20
Hollandia	6	0	1	4	146	13
Irán	6	0	0	1	70	26
Izland	4	0	0	0	48	32
Jugoszlávia	6	0	1	3	132	18
Kanada	6	1	1	1	139	16
Kína	6	2	2	2	200	8
Korea (Dél)	6	0	0	1	68	29
Kuba	6	0	0	2	83	24
Kuvait	6	0	0	0	28	37
Lengyelország	6	0	0	2	55	31
Luxemburg	1	0	0	1	27	38–39
Magyarország	6	0	5	1	218	6
Marokkó	6	0	0	3	88	23
Mexikó	5	0	0	0	17	40
Mongólia	6	0	0	0	67	30
Németország (Dem.)	6	2	3	1	231	4
Németország (Szöv.)	6	4	2	0	248	2
Nicaragua	6	0	0	0	13	41
Norvégia	6	0	0	0	69	27–28
Olaszország	4	0	0	1	35	35

29. 1988. Canberra, Ausztrália

Panama	6	0	0	0	7	42
Peru	6	0	0	0	41	34
Románia	6	5	1	0	250	1
Spanyolország	6	0	0	3	91	22
Svédország	6	0	2	2	134	17
Szovjetunió	6	3	3	0	235	3
Törökország	6	0	0	2	94	21
Uruguay	4	0	0	0	27	38–39
Vietnam	6	0	1	5	172	11
Összesen:	240	22	42	56	max.: $6 \cdot 42 = 252$	

29. 1988. Canberra, Ausztrália

A 200 éves állami létére emlékező Ausztrália ünnepsorozatába illeszkedett bele ez az olimpia. A magyar diákok Frankfurtból indultak neki az ausztráliai repülőútnak. Sydney-be érkezve néhány napig a városnak és környékének a látványosságaiiban gyönyörködtek, majd a fővárosba, Canberrába utaztak, ahol a versenyeket tartották. A feladatok az erősen megnövekedett mezőnynek — és benne a magyar csapatnak is — meglehetősen nehéznek bizonyultak, és ez az eredményen is meglátszott.

A magyar csapat tagjai:

1. Beke Tibor (Nagyatád, Ady Endre Gimnázium, IV. o., a tanévet az USA egy iskolájában töltötte) III. díj;
2. Bíró András (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.)
3. Csirik János (Szeged, Ságvári Endre Gyakorló Gimnázium, II. o.)
4. Drasny Gábor (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.)
5. Keleti Tamás (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) II. díj;
6. Sustik Mátyás (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) III. díj.

29. 1988. Canberra, 49 résztvevő

	L.	I.	II.	III.	Pont	Hely
Algéria	5	0	1	0	42	36
Am. Egy. Államok	6	0	5	1	153	6
Anglia	6	0	3	2	121	11
Argentína	3	0	0	0	23	45–46
Ausztrália	6	1	0	1	100	17
Ausztria	6	1	1	1	110	15
Belgium	6	0	0	3	76	23
Brazília	6	0	0	0	39	38
Bulgária	6	0	4	2	144	8
Ciprus	6	0	0	0	21	47

Csehszlovákia	6	0	2	2	120	12
Ecuador	1	0	0	0	1	49
Finnország	6	0	0	2	65	27–29
Franciaország	6	1	1	3	128	9
Fülöp-szigetek	5	0	0	0	29	44
Görögország	6	0	0	1	65	27–29
Hollandia	6	0	0	3	85	21
Hong Kong	6	0	0	2	68	24
Indonézia	3	0	0	0	6	48
Irán	6	0	1	3	86	20
Írország	6	0	0	0	30	43
Izland	4	0	0	1	37	39
Izrael	6	1	0	4	115	13–14
Jugoszlávia	6	0	0	4	92	19
Kanada	6	1	1	2	124	10
Kína	6	2	4	0	201	2–3
Kolumbia	6	0	0	3	66	26
Korea (Dél)	6	0	0	3	79	22
Kuba	6	0	0	0	35	40
Kuvait	6	0	0	0	23	45–46
Lengyelország	3	0	1	0	54	33
Luxemburg	3	0	1	2	64	30
Magyarország	6	0	2	2	109	16
Marokkó	6	0	0	2	62	31
Mexikó	6	0	0	1	40	37
Németország (Dem.)	5	1	4	0	145	7
Németország (Szöv.)	6	1	4	1	174	4
Norvégia	6	0	0	0	33	42
Olaszország	4	0	0	1	44	35
Peru	6	0	0	1	55	32
Románia	6	2	4	0	201	2–3
Spanyolország	6	0	0	0	34	41
Svédország	6	1	0	4	115	13–14
Szingapur	6	0	2	2	96	18
Szovjetunió	6	4	2	0	217	1
Törökország	6	0	0	3	65	27–29
Tunézia	4	0	0	3	67	25
Új-Zéland	6	0	1	0	47	34
Vietnam	6	1	4	0	166	5
Összesen:	268	17	48	65	max.: $6 \cdot 42 = 252$	

30. 1989 Braunschweig, Német Szövetségi Köztársaság

Az olimpia színhelye, az alsó-szászországi Braunschweig, C. F. Gaussnak a szülővárosa, amely máig is hűen őrzi a matematikus fejedelem emlékét. A résztvevők száma elérte a félszázat, és kezdtek megmutatkozni azok a nehéz-

30. 1989 Braunschweig, Német Szövetségi Köztársaság

ségek, amelyek egy ilyen nagy „tömeg” szervezésével és mozgatásával járnak; különösen sok gondot okozott a koordináció egységesítése. A kirándulásokon megtekinthették a csapatok többek között a tartományi székváros, Hannover nevezetességeit, a környék népi hagyományait őrző emlékeket, ahol most is büszkén emlegetik, hogy az ottani lakosok „beszélnek legszebben a német nyelvet”. Szembetűnő volt, hogy a sajtó mekkora nagy figyelmet szentelt az olimpiának.

A magyar csapat tagjai:

1. Balogh József (Szeged, Ságvári Endre Gyakorló Gimnázium, III. o.) II. díj;
2. Benczúr Péter (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.) II. díj;
3. Csirik János (Szeged, Ságvári Endre Gyakorló Gimnázium, III. o.) III. díj;
4. Fleiner Tamás (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) II. díj;
5. Pásztor Gábor (Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium, IV. o.) II. díj;
6. Sustik Mátyás (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.).

30. 1989. Braunschweig, 50 résztvevő

	L.	I.	II.	III.	Pont	Hely
Am. Egy. Államok	6	1	4	1	207	5
Anglia	6	0	2	1	122	20–21
Ausztrália	6	0	2	2	119	22–23
Ausztria	6	0	2	1	111	24
Belgium	6	0	0	3	104	27
Brazília	6	0	0	3	64	36–37
Bulgária	6	1	3	2	195	7
Ciprus	6	0	0	0	24	48
Csehszlovákia	6	2	1	3	202	6
Finnország	6	0	0	0	58	40
Franciaország	6	0	1	5	156	13
Fülöp-szigetek	6	0	1	0	45	43
Görögország	6	0	1	3	122	20–21
Hollandia	6	0	1	1	92	29
Hong Kong	6	0	2	1	127	17
India	6	0	0	4	107	25
Indonézia	6	0	0	0	21	49
Irán	6	0	2	3	147	14
Írország	6	0	0	0	37	45
Izland	4	0	0	0	33	46
Izrael	6	0	2	1	105	26
Jugoszlávia	6	1	3	1	170	11
Kanada	6	0	1	3	123	19
Kína	6	4	2	0	237	1
Kolumbia	6	0	1	2	119	22–23
Korea (Dél)	6	0	1	0	97	28
Kuba	6	0	0	1	69	33–34

Kuvait	6	0	0	0	31	47
Lengyelország	6	0	3	3	157	12
Luxemburg	3	0	1	1	65	35
Magyarország	6	0	4	1	175	10
Marokkó	6	0	0	1	63	38
Mexikó	6	0	0	1	79	31
Németország (Dem.)	6	3	2	1	216	4
Németország (Szöv.)	6	1	3	2	187	8
Norvégia	4	0	0	1	64	36–37
Olaszország	6	0	1	2	124	18
Peru	6	0	0	0	51	42
Portugália	6	0	0	0	39	44
Románia	6	2	4	0	223	2
Spanyolország	6	0	0	1	61	39
Svédország	6	0	0	2	73	32
Szingapur	6	0	0	4	143	15
Szovjetunió	6	3	2	1	217	3
Thaiföld	6	0	0	1	54	41
Törökország	6	0	1	4	133	16
Tunézia	6	0	1	0	82	30
Új-Zéland	6	0	0	2	69	33–34
Venezuela	4	0	0	0	6	50
Vietnam	6	2	1	3	183	9
Összesen:	291	20	55	72	max.: $6 \cdot 42 = 252$	

31. 1990. Peking, Kína

Az út ismét Moszkván át vezetett, ezért bővelkedett az átszállásokhoz kapcsolódó izgalmakban; mindezért pótolta a csapat tagjait az a sok-sok élmény, amit Peking és környéke a résztvevőknek nyújtott. Az országok száma tovább növekedett; a rendezők minden elkövettek, hogy e világtalálkozó résztvevői minél előbb megbarátkozzanak a szokatlan körülményekkel, és az olimpia eseményeire a sajtón és a televízión keresztül felhívják az ország figyelmét. Világossá vált az is, hogy a kínai csapat eredményeit a következő olimpiákon nehéz lesz megközelíteni.

A magyar csapat tagjai:

1. Balogh József (Szeged, Ságvári Endre Gyakorló Gimnázium, IV. o.) II. díj;
2. Csirik János (Szeged, Ságvári Endre Gyakorló Gimnázium, IV. o.) II. díj;
3. Harcos Gergely (Budapest, Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium, III. o.) III. díj;
4. Hausel Tamás (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) II. díj;
5. Kondacs Attila (Budapest, Árpád Gimnázium, IV. o.) III. díj;
6. Lakos Gyula (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, II. o.) I. díj.

31. 1990. Peking, 54 résztvevő

	L.	I.	II.	III.	Pont	Hely
Algéria	4	0	0	0	29	54
Am. Egy. Államok	6	2	3	0	174	3
Anglia	6	2	0	2	141	10
Argentína	6	0	0	1	67	38–39
Ausztrália	6	0	2	4	121	15–16
Ausztria	6	0	1	4	121	15–16
Bahrein	6	0	0	0	65	40–41
Brazília	6	1	0	2	102	24
Bulgária	6	1	4	1	152	9
Ciprus	4	0	0	1	46	48–49
Csehszlovákia	6	0	5	1	153	8
Finnország	6	0	0	1	59	43
Franciaország	6	3	1	0	168	5
Fülöp-szigetek	6	0	0	1	46	48–49
Görögország	6	0	0	1	62	42
Hollandia	6	0	1	2	90	29
Hong Kong	6	0	0	4	105	22
India	6	1	1	2	116	17
Indonézia	6	0	0	0	40	51
Irán	6	0	4	0	122	14
Írország	6	0	0	1	65	40–41
Izland	3	0	0	1	30	53
Izrael	6	0	1	3	95	26
Japán	6	0	2	1	107	20
Jugoszlávia	6	0	1	2	98	25
Kanada	6	0	3	1	139	11
Kína	6	5	1	0	230	1
Kolumbia	6	0	1	2	88	30
Korea (Dél)	6	0	1	1	79	32
Korea (Észak)	6	0	1	3	109	19
Kuba	6	0	0	1	67	38–39
Kuvait	4	0	0	1	53	47
Lengyelország	6	0	2	1	106	21
Luxemburg	2	1	0	1	58	44
Magyarország	6	1	3	2	162	6
Makaó	6	0	0	0	32	52
Marokkó	5	0	1	0	71	36
Mexikó	6	0	0	1	69	37
Mongólia	6	0	0	0	54	46
Németország (Dem.)	6	0	4	2	158	7
Németország (Szöv.)	6	0	2	4	138	12
Norvégia	6	0	3	1	112	18
Olaszország	6	1	1	4	131	13
Portugália	6	0	0	0	44	50
Románia	6	2	2	2	171	4

Spanyolország	6	0	0	0	72	35
Svédország	6	0	1	2	91	28
Szingapur	6	0	0	2	93	27
Szovjetunió	6	3	2	1	193	2
Thajföld	6	0	0	2	75	33–34
Törökország	6	0	0	1	75	33–34
Tunézia	4	0	1	1	55	45
Új-Zéland	6	0	0	2	83	31
Vietnam	6	0	1	3	104	23
Összesen:	308	23	56	76	max.: $6 \cdot 42 = 252$	

32. 1991. Sigtuna, Svédország

Svédország hajdani fővárosa ma egy kedves kisváros Stockholm tágabb körzetében. Egy nagyon drága — és éppen ezért nagyon kényelmes — kollégium volt az olimpia színhelye, ahol némi ízelítőt adtak abból, hogy ilyen luxuskörülmények között is lehet tanulni. A nyitó- és záróünnepséget az uppsalai egyetemen tartották; a kirándulások közül kiemelkedett a stockholmi hajókirándulás és városnézés.

A magyar csapat tagjai:

1. Harcos Gergely (Budapest, Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium, IV. o.) II. díj;
2. Kőszegi Botond (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.) III. díj;
3. Lakos Gyula (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.) I. díj;
4. Matolcsi Máté (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.) II. díj;
5. Szendrői Balázs (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.) II. díj;
6. Ujvári-Menyhárt Zoltán (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.) I. díj.

32. 1991. Sigtuna, 55 résztvevő

	L.	I.	II.	III.	Pont	Hely
Algéria	6	0	0	0	20	53
Am. Egy. Államok	6	1	4	1	212	5
Anglia	6	1	0	2	142	18–19
Argentína	6	0	0	3	94	27–28
Ausztrália	6	0	0	3	129	20
Ausztria	6	0	2	3	142	18–19
Bahrein	6	0	0	0	4	55

32. 1991. Sigtuna, Svédország

Belgium	6	0	0	3	121	22
Brazília	6	0	0	1	73	37–38
Bulgária	6	0	3	3	192	7
Ciprus	4	0	0	0	25	52
Csehszlovákia	6	0	4	1	186	11
Dánia	5	0	0	0	49	43
Finnország	6	0	0	1	66	40–41
Franciaország	6	1	1	4	175	13
Fülöp-szigetek	4	0	0	2	64	42
Görögország	6	0	0	2	81	33
Hollandia	6	0	0	1	73	37–38
Hong Kong	6	0	0	2	91	29–30
India	6	0	3	3	187	10
Indonézia	6	0	0	0	30	48–49
Irán	6	2	1	2	191	8–9
Írország	6	0	0	0	47	44
Izland	6	0	0	1	29	50–51
Izrael	6	0	1	2	115	23
Japán	6	0	3	3	180	12
Jugoszlávia	6	0	2	3	160	16
Kanada	6	1	2	2	164	14
Kína	6	4	2	0	231	2
Kolumbia	6	0	0	2	96	26
Korea (Dél)	6	0	1	4	151	17
Kuba	6	0	0	2	80	34
Lengyelország	6	0	2	4	161	15
Luxemburg	2	0	0	1	30	48–49
Magyarország	6	2	3	1	209	6
Makaó	6	0	0	0	18	54
Marokkó	6	0	0	1	85	31–32
Mexikó	6	0	0	1	76	35
Mongólia	6	0	0	0	33	47
Németország	6	1	5	0	222	4
Norvégia	6	0	0	3	85	31–32
Olaszország	6	0	0	1	74	36
Portugália	6	0	0	0	42	46
Románia	6	3	2	1	225	3
Spanyolország	6	0	0	1	66	40–41
Svájc	1	0	0	1	29	50–51
Svédország	6	0	2	1	125	21
Szingapur	6	0	1	1	94	27–28
Szovjetunió	6	4	2	0	241	1
Thajföld	6	0	1	1	103	25
Törökország	6	0	0	4	111	24
Trinidad és Tobágó	4	0	0	0	46	45
Tunézia	4	0	2	2	69	39

Új-Zéland	6	0	0	2	91	29–30
Vietnam	6	0	4	2	191	8–9
Összesen:	312	20	53	84	max.: $6 \cdot 42 = 252$	

33. 1992. Moszkva, Oroszország

A magyar csapat egy nagyon megváltozott Moszkvába érkezett, csupán a repülőtéri tortúra volt változatlan. A szervezők dicsérendő igyekezettel próbálták ellátni feladatukat, a koordinációt kitűnően oldották meg, a résztvevő nagy tömeg mozgatása, szervezése azonban már gyakran meghaladta erejüket. Sok vitára adott alkalmat a meghívottak köre: Oroszország csapatán kívül a Független Államok Közössége néven is indult egy csapat; a szovjet utódállamok is indítottak csapatokat, de ezek részvételéhez csak versenyen kívül járultak hozzá. A kiegészítő program most moszkvai városnézés volt; nem mindennapi élményt nyújtott a csapat szállásának a környékén működő városnyi nagyságú zsibvásár.

A magyar csapat tagjai:

1. Faragó Gergely (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.) III. díj;
2. Kálmán Tamás (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.);
3. Lakos Gyula (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) II. díj;
4. Pór Attila (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) I. díj;
5. Szendrői Balázs (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) II. díj;
6. Ujvári-Menyhárt Zoltán (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) II. díj.

33. 1992. Moszkva, 56 hivatalos résztvevő

(+ 8 nem hivatalos résztvevő, ezek adatai *-gal szerepelnek)

	L.	I.	II.	III.	Pont	Hely
Am. Egy. Államok	6	3	3	0	181	2
Anglia	6	2	2	2	168	5
Argentína	6	0	1	1	67	32
Ausztrália	6	1	1	2	118	19
Ausztria	6	0	0	3	70	31
Azerbajdzsán*	1	0	0	0	10	–
Belgium	6	0	1	2	100	23
Brazília	6	0	0	1	48	39
Bulgária	6	1	1	3	127	15
Ciprus	6	0	0	1	34	48
Csehszlovákia	6	0	2	3	134	13
Dánia	5	0	0	0	42	41–42

33. 1992. Moszkva, Oroszország

Dél-Afrika	6	0	0	0	21	54
Észtország*	4	0	0	0	18	–
Fehéroroszország*	3	0	0	2*	37	–
Finnország	6	0	0	0	33	49
Franciaország	6	1	3	1	139	10–11
Független Államok K.	6	2	3	0	176	4
Fülöp-szigetek	4	0	0	1	40	44
Görögország	6	0	0	0	37	45
Hollandia	6	0	1	0	71	30
Hong Kong	6	0	1	2	89	26–27
India	6	0	1	4	107	21
Indonézia	6	0	0	0	22	53
Irán	6	0	3	2	133	14
Írország	6	0	0	0	42	41–42
Izland	3	0	0	0	16	56
Izrael	6	0	2	2	108	20
Japán	6	1	3	1	142	8–9
Jugoszlávia (Kis-J.)	6	0	2	4	136	12
Kanada	6	1	0	3	105	22
Kazahsztán*	6	0	0	4*	80	–
Kína	6	6	0	0	240	1
Kolumbia	6	0	0	1	55	35
Korea (Dél)	6	1	0	4	122	18
Korea (Észak)	6	0	3	2	126	16
Kuba	3	0	0	0	17	55
Lengyelország	6	0	1	3	90	24–25
Lettország*	2	0	1*	0	36	–
Litvánia*	3	0	0	0	26	–
Magyarország	6	1	3	1	142	8–9
Makaó	6	0	0	0	35	46–47
Marokkó	6	0	0	0	45	40
Mexikó	6	0	0	0	32	50
Mongólia	6	0	0	0	51	36
Németország	6	0	4	2	149	7
Norvégia	6	0	1	2	77	29
Olaszország	6	0	0	3	83	28
Oroszország	6	2	2	2	158	6
Örményország*	4	0	0	2*	53	–
Portugália	6	0	0	1	35	46–47
Románia	6	2	2	2	177	3
Spanyolország	6	0	0	1	50	37–38
Svájc	3	0	0	0	30	51
Svédország	6	0	2	0	90	24–25
Szingapur	6	0	1	3	89	26–27
Tajvan	6	0	3	2	124	17
Thajföld	6	0	1	0	50	37–38

Törökország	6	0	0	2	63	34
Trinidad és Tobágó	6	0	0	0	26	52
Tunézia	4	1	0	1	64	33
Új-Zéland	6	0	0	1	41	43
Ukrajna*	5	0	0	5*	93	–
Vietnam	6	1	2	3	139	10–11
Összesen:	322	26	55	74		
	+ 28*		+1*	+13*	max.: $6 \cdot 42 = 252$	

34. 1993. Isztambul, Törökország

A hajdani Konstantinápoly adott otthont az eddigi legnagyobb mezőnyt felvonultató olimpiának. 73 ország küldött csapatot, és megjelent az eddig távolmaradó Albánia is. A nagy létszámnövekedést első sorban a Szovjetunió és Jugoszlávia osztódása okozta. A jól szervezett olimpia, a versenyzők kitűnő ellátása, változatos programok (isztambuli városnézés, hajókirándulás a Boszporuszon) maradandó élményt nyújtott a résztvevőknek. A résztvevőkhöz képest viszont a feladatok nehézségét túlméretezték, ez megmutatkozott a díjhatárok megállapításánál is. A magyar diákok itt is megőrizték eddig elért élmézőnybeli helyüket.

A magyar csapat tagjai:

1. Csörnyei Marianna (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.) I. díj;
2. Faragó Gergely (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) I. díj;
3. Futó Gábor (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.) I. díj;
4. Marx Gábor (Budapest, Szt. István Gimnázium, IV. o.) III. díj;
5. Németh Ákos (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.) III. díj;
6. Szeidl Ádám (Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium, III. o.) II. díj.

34. 1993. Istanbul, 73 résztvevő

	L.	I.	II.	III.	Pont	Hely
Albánia	6	0	0	0	18	66
Algéria	5	0	0	0	9	72–73
Am. Egy. Államok	6	2	2	2	151	7
Anglia	6	0	3	3	118	14
Argentína	6	0	1	1	46	42–43
Ausztrália	6	1	2	3	125	13
Ausztria	6	0	1	4	87	22
Azerbajdzsán	5	0	0	1	33	52–54
Bahrein	6	0	0	0	16	68–69
Belgium	6	0	0	1	55	37

34. 1993. Isztambul, Törökország

Bosznia-Hercegovina	2	0	0	1	14	71
Brazília	6	0	0	1	60	34
Bulgária	6	2	4	0	178	3
Ciprus (Északi terület)	6	0	0	0	17	67
Csehország	6	1	2	3	132	10
Dánia	6	0	1	3	72	32
Dél-Afrika	6	0	0	0	30	57–58
Észtország	6	0	0	1	31	56
Fehéroroszország	4	0	1	1	54	38
Finnország	6	0	0	0	33	52–54
Franciaország	6	2	1	1	115	17
Fülöp-szigetek	6	0	0	1	33	52–54
Grúzia	6	0	1	3	79	26–27
Hollandia	6	0	0	1	58	35
Hong Kong	6	0	0	4	70	33
Horvátország	6	0	0	1	32	55
India	6	0	4	1	116	15–16
Indonézia	6	0	0	0	15	70
Irán	6	2	3	1	153	6
Írország	6	0	0	1	39	50
Izland	4	0	0	0	23	64
Izrael	6	1	2	2	113	18–19
Japán	6	0	2	3	98	20
Kanada	6	1	1	3	113	18–19
Kazahsztán	6	0	1	3	80	25
Kína	6	6	0	0	215	1
Kirgizisztán	5	0	0	0	28	60
Kolumbia	6	0	0	4	79	26–27
Korea (Dél)	6	0	3	3	116	15–16
Kuba	6	0	1	1	56	36
Kuvait	6	0	0	0	16	68–69
Lengyelország	6	0	2	1	78	28–29
Lettország	6	0	2	1	73	31
Litvánia	6	0	0	0	41	49
Luxemburg	1	0	1	0	20	65
Macedónia	4	0	0	3	42	48
Magyarország	6	3	1	2	143	8
Makaó	6	0	0	0	24	62–63
Marokkó	6	0	0	1	49	40
Mexikó	6	0	0	1	24	62–63
Moldova	6	0	0	0	29	59
Mongólia	6	0	0	1	26	61
Németország	6	4	2	0	189	2
Norvégia	5	0	0	2	44	44
Olaszország	6	1	0	2	86	23
Oroszország	6	4	1	1	177	4
Örményország	6	1	1	0	78	28–29

Portugália	6	0	0	1	35	51
Románia	6	1	2	3	128	11
Spanyolország	6	0	1	1	43	45–47
Svájc	4	0	1	1	46	42–43
Svédország	6	0	1	1	51	39
Szingapur	6	0	1	3	75	30
Szlovákia	6	1	3	1	126	12
Szlovénia	5	0	0	2	43	45–47
Tajvan	6	1	4	1	162	5
Thajföld	6	0	0	2	47	41
Törökország	6	0	1	2	81	24
Trinidad és Tobágó	6	0	0	0	30	57–58
Türkmenisztán	2	0	0	0	9	72–73
Új-Zéland	6	0	0	2	43	45–47
Ukrajna	6	0	2	3	96	21
Vietnam	6	1	4	1	138	9
Összesen:	412	35	66	97	max.: $6 \cdot 42 = 252$	

35. 1994. Hong Kong

Koronagyarmati létének utolsó éveit élő Hong Kong látta vendégül a csapatokat. A magyarok sok élménnyel érkeztek meg ide (útközben Londonba is be tudtak pillantani). Annak ellenére, hogy az ország viszonylag kicsiny, a csapatoknak sokat kellett utazgatniuk a szálláshely és egy-egy rendezvény színhelye között; a Távol-Keletet meglátni azonban minden fáradságot megért. A szervezés időnként erősen akadozott. A feladatok az élmezőnyhöz képest könnyűnek bizonyultak, ez azt eredményezte, hogy az első díjasoknak legalább 40 pontot kellett elérniük a maximális 42-ből.

A magyar csapat tagjai:

1. Csörnyei Marianna (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) II. díj;
2. Futó Gábor (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) II. díj;
3. Koblinger Egmont (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.) II. díj;
4. Párniczky Benedek (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) II. díj;
5. Szádeczky-Kardoss Szabolcs (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.) II. díj;
6. Szeidl Ádám (Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium, IV. o.) I. díj.

35. 1994. Hong Kong**35. 1994. Hong Kong, 69 résztvevő**

	L.	I.	II.	III.	Pont	Hely
Am. Egy. Államok	6	6	0	0	252	1
Anglia	6	2	2	2	206	7
Argentína	6	0	3	1	159	20
Ausztrália	6	0	2	3	171	12
Ausztria	6	1	0	0	114	31
Belgium	6	0	0	2	105	34–35
Bosznia-Hercegovina	5	0	0	1	44	61
Brazília	5	0	2	0	95	39–40
Bulgária	6	3	2	1	223	4
Ciprus	6	0	0	0	48	58
Csehország	6	0	2	2	154	21
Csile	2	0	1	0	52	54–56
Dánia	4	0	0	2	51	57
Dél-Afrika	6	0	0	3	120	27
Észtország	5	0	0	1	82	44
Fehéroroszország	6	0	1	4	144	23
Finnország	6	0	0	0	70	48
Franciaország	6	1	1	3	161	19
Fülöp-szigetek	6	0	0	0	53	53
Görögország	6	0	0	1	91	42
Grúzia	6	0	0	2	95	39–40
Hollandia	6	0	0	2	99	37
Hong Kong	6	0	2	4	162	18
Horvátország	6	0	0	2	90	43
India	6	0	3	3	168	16
Indonézia	6	0	0	0	46	60
Irán	6	2	2	2	203	8
Írország	6	0	0	0	68	49
Izland	4	0	0	0	29	65–66
Izrael	6	0	1	4	143	24–25
Japán	6	1	2	3	180	10
Kanada	6	1	0	3	143	24–25
Kína	6	3	3	0	229	2
Kirgizisztán	6	0	0	0	24	76
Kolumbia	6	0	2	2	136	26
Korea (Dél)	6	0	2	4	170	13–15
Kuba	1	0	0	0	12	68–69
Kuvait	5	0	0	0	12	68–69
Lengyelország	6	2	0	3	170	13–15
Lettország	6	0	0	3	98	38
Litvánia	6	0	0	1	73	47
Luxemburg	1	0	1	0	32	69
Macedónia	4	0	0	1	67	50
Magyarország	6	1	5	0	221	5
Makaó	6	0	1	0	75	46

Marokkó	6	0	0	2	105	34–35
Mexikó	6	0	0	0	29	65–66
Moldova	6	0	0	1	52	54–56
Mongólia	6	0	1	0	65	51
Németország	6	1	2	3	175	11
Norvégia	6	0	1	1	80	45
Olaszország	6	0	0	2	102	36
Oroszország	6	3	2	1	224	3
Örményország	5	0	0	4	110	32
Portugália	6	0	0	0	52	54–56
Románia	6	0	5	1	198	9
Spanyolország	6	0	0	0	41	62
Svájc	3	0	0	1	35	63
Svédország	6	0	0	1	92	41
Szingapur	6	0	2	0	116	29–30
Szlovákia	6	1	1	2	150	22
Szlovénia	5	0	0	0	47	59
Tajvan	6	0	4	1	170	13–15
Thaiföld	6	0	0	3	106	33
Törökország	6	0	0	4	118	28
Trinidad és Tobágó	6	0	0	0	63	52
Új-Zéland	6	0	0	4	116	29–30
Ukrajna	6	1	1	2	163	17
Vietnam	6	1	5	0	207	6
Összesen:	385	30	64	98	max.: $6 \cdot 42 = 252$	

36. 1995. Torontó, Kanada

Kellemes repülőút után Kanada nagy egyetemi városába, az Ontario-tó partján elterülő Torontóba érkezett meg a magyar csapat. A verseny színhelye az egyik egyetem volt. A rendezvények közül kiemelkedik a Niagara-vízesés megtekintése, bár az esős időjárás most nem nagyon kedvezett ennek a kirándulásnak. Természetesen sok új élménnyel gazdagodtak itt is a magyar diákok; közülük még egy valódi baseball-mérkőzés megtekintése is belefért.

A magyar csapat tagjai:

1. Bárász Mihály (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.) I. díj;
2. Burcsi Péter (Pápa, Türr István Gimnázium, III. o.) I. díj;
3. Koblinger Egmont (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) I. díj;
4. Németh Zoltán (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) II. díj;
5. Szádeczky-Kardoss Szabolcs (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) III. díj;
6. Valkó Benedek (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) III. díj.

36. 1995. Torontó, Kanada**36. 1995. Torontó, 73 résztvevő**

	L.	I.	II.	III.	Pont	Hely
Am. Egy. Államok	6	0	3	3	178	11
Anglia	6	2	1	3	180	10
Argentína	6	0	2	2	129	29
Ausztrália	6	0	1	4	145	21–22
Ausztria	6	0	0	1	88	43
Azerbajdzsán	3	0	0	0	30	64
Belgium	6	0	0	1	83	47
Bosznia-Hercegovina	6	0	0	0	18	69
Brazília	6	1	0	0	86	44
Bulgária	6	1	4	1	207	6
Ciprus	6	0	0	0	43	58–59
Csehország	6	0	1	5	154	17–18
Csile	2	0	0	0	14	70
Dánia	6	0	0	1	77	49
Dél-Afrika	6	0	0	2	95	41
Dél-Korea	6	2	3	1	203	7
Észtország	6	0	0	0	55	56
Fehéroroszország	6	0	1	3	131	26–28
Finnország	6	0	0	3	101	36–37
Franciaország	6	1	0	2	119	30
Fülöp-szigetek	6	0	0	1	28	65–66
Görögország	6	0	0	1	66	54
Grúzia	6	0	1	0	79	48
Hollandia	6	0	0	2	85	45
Hong Kong	6	0	2	3	151	20
Horvátország	6	0	0	3	111	32–33
India	6	0	3	3	165	14
Indonézia	6	0	0	1	68	53
Irán	6	2	3	1	202	8
Írország	6	0	0	0	41	61
Izland	4	0	0	0	19	68
Izrael	6	1	2	2	171	13
Japán	6	1	3	2	183	9
Jugoszlávia	6	0	2	3	154	17–18
Kanada	6	0	2	3	153	19
Kazahsztán	6	0	0	0	54	57
Kína	6	4	2	0	236	1
Kirgizisztán	6	0	0	0	28	65–66
Kolumbia	6	0	1	2	100	38
Kuba	4	0	0	0	59	55
Kuvait	2	0	0	0	0	73
Lengyelország	6	0	1	5	161	16
Lettország	6	0	1	1	97	39–40
Litvánia	6	0	0	0	74	50
Macedónia	6	0	1	3	117	31
Magyarország	6	3	1	2	210	5
Makaó	6	0	0	0	33	62

Malajzia	2	0	0	0	1	72
Marokkó	6	0	1	4	138	24
Mexikó	6	0	0	1	43	58–59
Moldávia	6	0	1	1	101	36–37
Mongólia	6	0	0	1	91	42
Németország	6	1	3	1	162	15
Norvégia	6	0	0	1	70	52
Olaszország	6	0	0	5	131	26–28
Oroszország	6	4	2	0	227	3
Örményország	6	0	2	1	111	32–33
Portugália	6	0	0	0	26	67
Románia	6	4	2	0	230	2
Spanyolország	6	0	0	1	72	51
Sri Lanka	1	0	0	0	10	71
Svájc	5	0	2	0	97	39–40
Svédország	6	0	0	2	106	35
Szingapur	6	0	2	2	131	26–28
Szlovákia	6	0	2	2	145	21–22
Szlovénia	5	0	0	0	42	60
Tajvan	6	0	4	1	176	12
Thaiföld	6	0	1	2	107	34
Törökország	6	0	2	3	134	25
Trinidad és Tobágó	6	0	0	0	32	63
Új-Zéland	6	0	1	1	84	46
Ukrajna	6	1	1	1	140	23
Vietnam	6	2	4	0	222	4
Összesen:	421	30	71	100	max.: $6 \cdot 42 = 252$	

37. 1996. Bombay, India

A verseny színhelyéül eredetileg Új-Delhit tervezték, de szinte az utolsó pillanatban Bombay-re változtatták (amit újabban Mumbainak neveznek). Ennek ellenére a verseny szervezői sikerrel hidalták át a helyváltotatásból származó nehézségeket, és a versenyek matematikai előkészítése és lebonyolítása is kifogástalan volt. Indiát és benne Bombay-t megjárni feledhetetlen élmény: a Magyarországgal nagyjából egyenlő lakosságszámú város közlekedésének elképesztő összeviassasága, a szegénység és tömeg; s mindezt az indiaiak látszólagos derűvel és békességgel tűrik. Az indiai ételek kissé megviselték ugyan a résztvevők gyomrát, de végül is a jó eredmény, a harmadik helyezés mindenért kárpótolt.

A magyar csapat tagjai:

1. Bárász Mihály (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) II. díj;
2. Braun Gábor (Budapest, Szent István Gimnázium, III. o.) II. díj;
3. Burcsi Péter (Pápa, Türr István Gimnázium, IV. o.) I. díj;

37. 1996. Bombay, India

4. Frenkel Péter (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.) I. díj;
5. Gyarmati Katalin (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) III. díj;
6. Pap Gyula (Debrecen, Fazekas Mihály Gimnázium, III. o.) I. díj.

37. 1996. Bombay, 75 résztvevő

	L.	I.	II.	III.	Pont	Hely
Albánia	4	0	0	0	15	67–68
Am. Egy. Államok	6	4	2	0	185	2
Anglia	6	2	4	0	161	5
Argentína	6	0	1	3	80	29
Ausztrália	6	0	2	3	93	23
Ausztria	6	0	1	0	54	43
Azerbajdzsán	6	0	0	0	27	58
Belgium	6	0	0	4	75	31
Bosznia-Hercegovina	4	0	0	1	30	57
Brazília	5	0	0	0	36	52
Bulgária	6	1	4	1	136	11–12
Ciprus	5	0	0	0	14	69
Csehország	6	0	2	1	83	28
Csile	2	0	0	0	10	71
Dánia	6	0	0	2	44	48–51
Dél-Afrika	6	0	0	2	50	44
Dél-Korea	6	2	3	0	151	8
Észtország	6	0	0	0	33	55
Fehéroroszország	6	1	1	2	99	21
Finnország	6	0	0	2	58	39–40
Franciaország	6	0	2	0	61	36
Fülöp-szigetek	6	0	0	0	8	74
Görögország	6	0	1	5	95	22
Grúzia	6	1	0	2	78	30
Hollandia	6	0	0	0	26	59
Hong Kong	6	0	1	4	84	27
Horvátország	6	0	1	1	63	34–35
India	6	1	3	1	118	14
Indonézia	6	0	0	0	11	70
Irán	6	1	4	1	143	9
Írország	6	0	0	0	24	61
Izland	6	0	0	1	31	56
Izrael	6	1	2	2	114	15
Japán	6	1	3	1	136	11–12
Jugoszlávia	6	0	1	2	87	24
Kanada	6	0	3	3	111	16
Kazahsztán	6	0	0	0	20	64
Kína	6	3	2	1	160	6
Kirgizisztán	6	0	0	0	15	67–68
Kolumbia	6	0	1	0	58	39–40
Kuba	1	0	0	1	16	66
Kuvait	2	0	0	0	1	75

Lengyelország	6	0	3	3	122	13
Lettország	6	0	0	3	66	33
Litvánia	6	0	1	2	68	32
Macedónia	6	0	0	2	44	48–51
Magyarország	6	3	2	1	167	3
Makaó	6	0	0	1	44	48–51
Malajzia	4	0	0	0	9	72–73
Marokkó	6	0	0	1	19	65
Mexikó	6	0	0	0	34	53–54
Moldávia	5	0	0	2	55	42
Mongólia	6	0	0	2	49	45–46
Németország	6	3	1	1	137	10
Norvégia	6	0	0	3	60	37–38
Olaszország	6	0	2	2	86	25–26
Oroszország	6	2	3	1	162	4
Örményország	6	0	0	1	63	34–35
Portugália	6	0	0	0	21	63
Románia	6	4	2	0	187	1
Spanyolország	6	0	0	0	44	48–51
Sri Lanka	6	0	0	1	34	53–54
Svájc	4	0	0	1	23	62
Svédország	6	0	1	1	57	41
Szingapur	6	1	0	3	86	25–26
Szlovákia	6	0	2	4	108	17
Szlovénia	6	0	0	2	49	45–46
Tajvan	6	0	2	3	100	20
Thajföld	6	0	0	1	47	47
Törökország	6	0	2	3	104	19
Trinidad és Tobágó	6	0	0	0	25	60
Türkmenisztán	4	0	0	0	9	72–73
Új-Zéland	6	0	0	3	60	37–38
Ukrajna	6	1	0	5	105	18
Vietnam	6	3	1	1	155	7
Összesen:	424	35	66	99	max.: $6 \cdot 42 = 252$	

38. 1997. Mar del Plata, Argentína

Az olimpiák történetének második „téli” olimpiája; Mar del Plata a déli féltekén fekszik, és így július ott téli hónapnak számít, bár a tél nem volt olyan komoly, mint amilyen néha nálunk szokott lenni. Ez volt eddig a legszínvonalasabban előkészített és szervezett verseny. Hazautazás előtt diákjaink még megismerhették a főváros, Buenos Aires lüktető életét, vendégei voltak az ott élő magyarok „Hungaria” klubjának; az ottani magyar sajtó is nagy szeretettel és büszkeséggel emlékezett meg a magyarok sikeréről, hiszen hosszú évek után sikerült ismét a második helyet megszerezni.

38. 1997. Mar del Plata, Argentína

A magyar csapat tagjai:

1. Frenkel Péter (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) I. díj;
2. Lippner Gábor (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.) I. díj;
3. Lukács László (Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium, II. o.) II. díj;
4. Pap Gyula (Debrecen, Fazekas Mihály Gimnázium, IV. o.) I. díj.
5. Szabó Jácint (Győr, Révai Miklós Gimnázium, IV. o.) II. díj;
6. Terpai Tamás (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, II. o.) I. díj.

38. 1997. Mar del Plata, 82 résztvevő

	L.	I.	II.	III.	Pont	Hely
Albánia	3	0	0	0	15	71–72
Algéria	4	0	0	0	3	82
Am. Egy. Államok	6	2	4	0	202	4–5
Anglia	6	1	2	2	144	16
Argentína	6	0	0	3	94	37–38
Ausztrália	6	2	3	1	187	9
Ausztria	6	1	0	1	86	43
Azerbajdzsán	6	0	0	1	56	55
Belgium	6	0	0	3	88	41–42
Bolívia	3	0	0	0	13	74
Bosznia-Hercegovina	5	0	0	1	45	62
Brazília	6	0	1	4	117	26
Bulgária	6	2	3	1	191	7–8
Ciprus	3	0	0	0	5	80
Csehország	6	1	2	2	139	18
Csile	6	0	0	0	28	66
Dánia	6	0	0	1	53	57–59
Dél-Afrika	6	1	0	2	93	39
Dél-Korea	6	1	4	1	164	11
Észtország	6	0	0	2	64	53–54
Fehéroroszország	6	0	2	4	140	17
Finnország	6	0	0	4	97	34–35
Franciaország	6	1	0	1	105	32–33
Fülöp-szigetek	2	0	0	0	14	73
Görögország	6	0	1	0	75	45
Grúzia	6	0	1	3	109	28
Guatemala	6	0	0	0	7	79
Hollandia	6	0	2	0	94	37–38
Hong Kong	6	0	0	5	106	30–31
Horvátország	6	0	1	4	121	24
India	6	0	3	3	146	15
Indonézia	6	0	0	0	44	63
Irán	6	4	2	0	217	3
Írország	6	0	0	0	21	68
Izland	6	0	1	0	48	60
Izrael	6	0	1	5	124	22–23
Japán	6	1	3	1	163	12

Jugoszlávia	6	0	2	3	125	21
Kanada	6	0	2	2	107	29
Kazahsztán	6	0	0	1	73	46–47
Kína	6	6	0	0	223	1
Kirgizisztán	3	0	0	0	17	75
Kolumbia	6	0	0	6	112	27
Kuba	6	0	1	2	91	40
Kuvait	4	0	0	0	8	76–78
Lengyelország	6	0	2	2	125	20–21
Lettország	6	0	1	4	124	22–23
Litvánia	6	0	1	1	67	51
Macedónia	6	0	0	3	73	46–47
Magyarország	6	4	2	0	219	2
Makaó	6	0	0	0	55	56
Malajzia	6	0	0	0	19	69–70
Marokkó	6	0	0	0	48	60–61
Mexikó	6	0	1	3	105	32–33
Moldávia	3	0	0	2	53	57–59
Mongólia	6	1	0	3	106	30–31
Németország	6	1	3	2	161	13
Norvégia	6	0	0	3	79	44
Olaszország	6	0	0	1	71	48–49
Oroszország	6	3	2	1	202	4–5
Örményország	6	0	0	3	97	34–35
Paraguay	6	0	0	0	8	76–78
Peru	6	0	0	2	64	53–54
Portugália	5	0	0	0	15	71–72
Puerto Rico	6	0	0	0	8	76–78
Románia	6	2	3	1	191	7–8
Spanyolország	6	0	0	0	39	64
Svájc	5	0	0	2	53	57–59
Svédország	6	1	0	3	128	19
Szingapur	6	0	0	4	88	41–42
Szlovákia	6	0	1	2	96	36
Szlovénia	6	0	0	2	70	50
Tajvan	6	0	4	2	148	14
Thajföld	6	0	0	1	66	52
Törökország	6	0	1	4	119	25
Trinidad és Tobágó	6	0	0	0	30	65
Új-Zéland	6	0	0	2	71	48–49
Ukrajna	6	3	3	0	195	6
Uruguay	6	0	0	0	19	69–70
Üzbegisztán	3	0	0	0	23	67
Venezuela	3	0	0	0	4	81
Vietnam	6	1	5	0	183	10
Összesen:	460	39	70	122	max.: $6 \cdot 42 = 252$	

39. 1998. Taipei, Tajvan

Újra egy egzotikusnak ismert ország rendezte az olimpiát; az ott-tartózkodás, a kirándulások azonban meggyőzték a résztvevőket, hogy egy magas kultúrájú, a múlt művészi hagyományait megbecsülő és továbbfejlesztő és a modern technikai tudományokat magas szinten művelő ország látta a csapatokat vendégül. Csupán az a tény keltett némi visszatetszést, hogy a versenyek végéig a csapatok mozgáslehetősége meglehetősen korlátozott volt. Még egy valódi tajvani föld-rengésből is kaptunk némi ízelítőt. Sajnos, megjelent a politika is, Kína ezúttal nem vett részt a versenyen.

A magyar csapat tagjai:

1. Gyenes Zoltán (Budapest, Apáczai Csere János Gimnázium, II. o.) I. díj;
2. Kun Gábor (Budapest, Piarista Gimnázium, IV. o.) II. díj;
3. Lippner Gábor (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) I. díj;
4. Lukács László (Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium, III. o.) I. díj;
5. Terpai Tamás (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.) I. díj;
6. Zubcsek Péter Pál (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) II. díj.

39. 1998. Taipei, 76 résztvevő

	L.	I.	II.	III.	Pont	Hely
Am. Egy. Államok	6	3	3	0	186	3–4
Anglia	6	0	1	4	122	17–18
Argentína	6	1	0	3	97	29
Ausztrália	6	0	4	2	146	13
Ausztria	6	0	0	2	57	48
Azerbajdzsán	5	0	0	1	41	54
Belgium	6	0	1	1	71	39
Bosznia-Hercegovina	6	0	1	2	88	33–34
Brazília	6	1	0	1	91	30–31
Bulgária	6	3	3	0	195	2
Ciprus	4	0	0	1	39	56
Csehország	6	0	3	3	135	15
Dánia	6	0	0	0	21	66
Dél-Afrika	6	0	1	2	98	28
Dél-Korea	6	2	2	2	154	12
Észtország	6	0	1	1	63	43
Fehéroroszország	6	0	1	4	118	19
Finnország	6	0	0	0	30	63
Franciaország	6	1	0	2	100	26–27
Fülöp-szigetek	4	0	0	0	11	70–71
Görögország	6	0	2	1	90	32
Grúzia	6	0	0	3	78	36
Hollandia	6	0	1	0	62	44–45

Hong Kong	6	0	1	3	102	25
Horvátország	6	0	0	5	110	22–23
India	6	3	3	0	174	7
Indonézia	5	0	0	0	16	68
Irán	6	5	1	0	211	1
Írország	6	0	0	1	36	58–60
Izland	6	0	0	0	42	52–53
Izrael	6	0	0	5	104	24
Japán	6	1	1	3	139	14
Jugoszlávia	6	0	5	0	156	10
Kanada	6	1	1	2	113	20
Kazahsztán	6	0	0	2	81	35
Kirgizisztán	5	0	0	0	14	69
Kolumbia	6	1	0	0	66	41
Kuba	1	0	0	1	19	67
Kuvait	3	0	0	0	0	76
Lengyelország	6	1	1	1	112	21
Lettország	6	0	1	3	74	37
Litvánia	6	0	0	1	40	55
Luxemburg	2	0	0	1	25	65
Macedónia	6	0	0	1	69	40
Magyarország	6	4	2	0	186	3–4
Makaó	5	0	0	0	29	64
Malajzia	6	0	0	0	32	62
Marokkó	6	0	0	0	42	52–53
Mexikó	6	0	1	0	62	44–45
Moldávia	2	0	1	1	45	50
Mongólia	6	0	2	2	91	30–31
Németország	6	0	3	2	129	16
Norvégia	6	0	0	0	33	61
Olaszország	6	0	0	3	72	38
Oroszország	6	2	3	1	175	6
Örményország	6	0	2	2	100	26–27
Paraguay	5	0	0	0	6	72–73
Peru	3	0	2	0	60	46
Portugália	6	0	0	0	6	72–73
Románia	6	3	0	2	155	11
Spanyolország	6	0	0	1	36	58–60
Sri Lanka	1	0	0	0	5	74
Svájc	6	0	0	0	37	57
Svédország	6	0	0	2	58	47
Szingapur	6	0	1	3	110	22–23
Szlovákia	6	0	1	4	88	33–34
Szlovénia	6	0	0	1	44	51
Tajvan	6	3	2	1	184	5
Thajföld	6	0	0	2	65	42
Törökország	6	0	2	4	122	17–18

40. 1999. Bukarest, Románia

Trinidad és Tobágó	6	0	0	1	36	58–60
Új-Zéland	6	0	0	2	50	49
Ukrajna	6	1	3	2	166	8
Uruguay	6	0	0	0	11	70–71
Venezuela	2	0	0	0	1	75
Vietnam	6	1	3	2	158	9
Összesen:	419	37	66	102	max.: $6 \cdot 42 = 252$	

40. 1999. Bukarest, Románia

Az olimpiát elindító és immár ötödször rendező Románia adott otthont a jubileumi versenynek. A szervezők igyekeztek sokszínű programot összeállítani: volt pantomim előadás, kirándulás Sinaia-ba a Peles kastélyhoz és Bran-ba a „Drakula várba”, egy alkalommal pedig óriási szabadtéri lacipecsenyés.

A verseny különösen nehéznek bizonyult, senkinek sem sikerült 42, 41 vagy 40 pontot szereznie. 39 pontot is csak hárman kaptak a résztvevő 450 diák közül, nagy örömkre egyikük Terpai Tamás volt. Neki az aranyérmet maga az államelnök adta át.

A magyar csapat tagjai:

1. Devecsery András (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) II. díj;
2. Gyenes Zoltán (Budapest, Apáczai Csere János Gimnázium, III. o.) III. díj;
3. Kiss Gergely (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.) II. díj;
4. Lukács László (Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium, IV. o.) II. díj;
5. Terpai Tamás (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) I. díj;
6. Zábrádi Gergely (Győr, Révai Miklós Gimnázium III. o.) II. díj.

40. 1999. Bukarest, 81 résztvevő

	L.	I.	II.	III.	Pont	Hely
Albánia	5	0	0	0	34	66
Am. Egy. Államok	6	2	3	1	150	10
Anglia	6	0	3	2	100	20
Argentína	6	0	0	3	63	45
Ausztrália	6	1	1	3	116	15
Ausztria	6	0	1	2	75	29–30
Azerbajdzsán	6	0	0	1	34	67
Belgium	6	0	0	2	51	55
Bosznia-Hercegovina	6	0	0	3	65	43–44
Brazília	6	0	0	4	75	29–30
Bulgária	6	3	3	0	170	5
Ciprus	6	0	0	0	35	64–65
Csehország	6	0	0	1	55	49–50
Dánia	5	0	0	2	51	54

Dél-Afrika	6	0	1	1	77	27–28
Dél-Korea	6	3	3	0	164	7
Észtország	4	0	0	1	30	79
Fehéroroszország	6	3	3	0	167	6
Finnország	6	0	1	0	65	43–44
Franciaország	6	0	1	2	73	33–34
Fülöp-szigetek	4	0	0	0	24	73
Görögország	6	0	2	0	57	47–48
Grúzia	6	0	1	1	68	38
Guatemala	6	0	0	0	19	75
Hollandia	6	0	0	4	74	31–32
Hong Kong	6	0	0	4	73	33–34
Horvátország	6	0	0	2	66	41–42
India	6	0	3	3	107	18
Indonézia	6	0	0	0	35	64–65
Irán	6	2	4	0	159	8
Írország	6	0	0	1	38	62
Izland	6	0	0	1	41	60–61
Izrael	6	0	0	5	78	25–26
Japán	6	2	4	0	135	14
Jugoszlávia	6	1	2	3	130	14
Kanada	6	0	0	3	74	31–32
Kazahsztán	6	0	0	4	72	35
Kína	6	4	2	0	182	1–2
Kirgizisztán	3	0	0	0	15	76
Kolumbia	6	0	1	1	55	49–50
Kuba	6	0	1	4	77	27–28
Kuvait	4	0	0	0	10	79
Lengyelország	6	1	0	5	104	19
Lettország	6	1	1	0	86	22
Litvánia	6	0	0	2	54	51
Luxemburg	2	0	0	1	26	71
Macedónia	6	0	0	5	71	36–37
Magyarország	6	1	4	1	147	11
Makaó	6	0	0	1	41	60–61
Malajzia	6	0	0	0	37	63
Marokkó	6	0	0	0	48	57
Mexikó	6	0	0	1	53	52–53
Moldávia	6	0	0	1	50	56
Mongólia	6	0	2	1	78	25–26
Németország	6	0	2	4	108	17
Norvégia	6	0	1	2	67	29–30
Olaszország	6	0	1	2	82	23
Oroszország	6	4	2	0	182	1–2
Örményország	6	0	0	3	67	39–40
Peru	2	0	0	0	10	78
Portugália	6	0	0	0	29	70

41. 2000. Taejön, Dél-Korea

Románia	6	3	3	0	173	4
Spanyolország	6	0	0	1	60	46
Sri Lanka	1	0	0	0	6	81
Svájc	6	0	1	3	79	24
Svédország	6	0	0	3	66	41–42
Szingapur	6	0	0	4	71	36–37
Szlovákia	6	0	2	3	88	21
Szlovénia	6	0	0	2	46	58
Tajvan	6	1	5	0	153	9
Thajföld	6	0	0	3	57	47–48
Törökország	6	1	1	4	109	16
Trinidad és Tobágó	6	0	0	0	33	68
Tunézia	4	0	0	0	22	74
Türkmenisztán	2	0	0	0	13	77
Új-Zéland	6	0	0	1	53	52–53
Ukrajna	6	2	2	1	136	12
Uruguay	4	0	0	0	25	72
Üzbegisztán	6	0	0	0	42	59
Venezuela	2	0	0	0	8	80
Vietnam	6	3	3	0	177	3
Összesen:	450	38	70	118	max.: 6 · 42 = 252	

41. 2000. Taejön, Dél-Korea

A csapat tagjai már a hosszú repülőúton ízelítőt kaptak a távol-keleti konyhaművészetből és később is találkozhattak különleges ételekkel. A hagyományos zenei bemutatón elefánt nagyságú és egészen parányi dobok és lélegzetelállító dobolás köszöntötte a versenyzőket. A programot színesítette a közeli szabad-téri néprajzi múzeum meglátogatása és egy kétnapos kirándulás a műemlékeiről nevezetes Kyungju-ba. A záróbankett parádés tűzijátékkal fejeződött be.

Ezen az olimpián „kibővített magyar delegáció” vett részt, volt egy-egy magyar versenyző az osztrák, norvég, szlovák, ukrán csapatokban is.

A magyar csapat tagjai:

1. Gyenes Zoltán (Budapest, Apáczai Csere János Gimnázium, IV. o.) I. díj;
2. Győri Nikolett (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) II. díj;
3. Harangi Viktor (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, II. o.) II. díj;
4. Pálvölgyi Dömötör (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) II. díj;
5. Vizer Máté (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) II. díj;
6. Zábrádi Gergely (Győr, Révai Miklós Gimnázium IV. o.) II. díj.

41. 2000. Taejŏn, 82 résztvevő

	L.	I.	II.	III.	Pont	Hely
Albánia	5	0	0	0	17	75
Am. Egy. Államok	6	3	3	0	184	3
Anglia	6	0	2	4	96	22
Argentína	6	0	1	4	88	25
Ausztrália	6	1	3	1	122	16
Ausztria	6	0	2	1	68	39
Azerbajdzsán	6	0	0	0	32	64–67
Belgium	6	0	0	2	51	54–55
Bosznia-Hercegovina	6	0	0	4	78	29
Brazília	6	0	0	3	58	49–50
Brunei	2	0	0	0	8	81–82
Bulgária	6	2	3	1	169	5–6
Ciprus	6	0	0	0	32	64–67
Csehország	6	0	1	3	65	42
Dánia	6	0	0	1	36	61
Dél-Afrika	6	0	0	4	81	27
Dél-Korea	6	3	3	0	172	4
Ecuador	6	0	0	0	19	74
Észtország	6	0	0	1	42	58
Fehéroroszország	6	2	2	2	165	7
Finnország	6	0	0	3	52	53
Franciaország	6	0	0	3	58	49–50
Fülöp-szigetek	4	0	0	0	23	70–71
Görögország	6	0	0	1	46	56
Grúzia	6	0	1	0	72	36
Guatemala	6	0	0	0	11	79–80
Hollandia	6	0	0	2	60	46–48
Hong Kong	6	0	1	2	80	28
Horvátország	6	0	0	4	73	34
India	6	0	5	1	132	14
Indonézia	6	0	0	2	54	52
Irán	6	2	3	1	155	10
Írország	6	0	0	0	28	69
Izland	6	0	0	0	37	60
Izrael	6	2	1	3	139	11–12
Japán	6	1	2	3	125	15
Jugoszlávia	6	0	1	3	93	23
Kanada	6	1	2	1	112	17
Kazahsztán	6	0	1	4	91	24
Kína	6	6	0	0	218	1
Kirgizisztán	4	0	0	1	16	76–77
Kolumbia	6	0	0	2	61	44–45
Kuba	6	0	0	2	61	44–45
Kuvait	4	0	0	0	12	78
Lengyelország	6	0	1	2	75	32–33

42. 2001. Washington, USA

Lettország	6	0	0	3	60	46–48
Litvánia	6	0	0	1	34	62–63
Luxemburg	4	0	0	2	51	54–55
Macedónia	6	0	1	2	63	43
Magyarország	6	1	5	0	156	9
Makaó	6	0	0	0	16	76–77
Malajzia	3	0	0	2	32	64–67
Marokkó	6	0	0	1	60	46–48
Mexikó	6	0	1	3	75	32–33
Moldávia	5	0	2	3	84	26
Mongólia	6	0	0	4	67	40–41
Németország	6	1	1	2	108	20–21
Norvégia	6	0	0	1	45	57
Olaszország	6	0	0	3	57	51
Oroszország	6	5	1	0	215	2
Örményország	6	0	2	3	108	20–21
Peru	4	0	0	0	32	64–67
Portugália	6	0	0	0	21	72–73
Puerto Rico	6	0	0	0	8	81–82
Románia	6	1	3	2	139	11–12
Spanyolország	6	0	0	0	29	68
Sri Lanka	3	0	0	0	21	72–73
Svájc	4	0	1	2	67	40–41
Svédország	6	0	2	0	77	31
Szingapur	6	0	1	2	71	37
Szlovákia	6	0	2	3	111	18–19
Szlovénia	6	0	1	1	73	35
Tajvan	6	3	2	1	164	8
Thajföld	6	0	1	3	78	30
Törökország	6	0	3	1	111	18–19
Trinidad és Tobágó	6	0	0	0	40	59
Új-Zéland	6	0	0	0	34	62–63
Ukrajna	6	2	2	0	135	13
Uruguay	3	0	0	0	23	70–71
Üzbegisztán	6	0	0	2	70	38
Venezuela	2	0	0	0	11	79–80
Vietnam	6	3	2	1	169	5–6
Összesen:	451	39	71?	119	max.: 6 · 42 = 252	

42. 2001. Washington, USA

A szokásostól eltérő program miatt a két versenynap előtt már rengeteg minden történt. A Potomac folyón hajózva nézhettük végig, ahogy július 4-én gigantikus tüzijáték világítja meg a főváros felett az eget. Szurkolhattunk egy baseball mérkőzésen, egy teljes napot pedig a mall környéki látnivalóknak szentelhettünk.

A verseny után Baltimore-ba szerveztek közös kirándulást. Itt egy gazdag kiállítást néztünk meg a Titanicról, majd körbesétáltunk az Aquáriumban. Ebben a múzeumban olyan vízi élőlényeket láttunk, amilyenekről a legmerészebb fantáziával sem álmodna az ember. Az elképesztő színű és alakú tengeri herkentyűk nézegetése után fóká és delfin bemutatót láttunk.

A záróünnepség fényét nagymértékben emelte, hogy az aranyérmeseknek a díjat Andrew Wiles (a Fermat-tétel bizonyítója) adta át.

A magyar csapat tagjai:

1. Csikvári Péter (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.) III. díj;
2. Csóka Endre (Debrecen, Fazekas Mihály Gimnázium, II. o.) II. díj;
3. Harangi Viktor (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.) II. díj;
4. Horváth Illés (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.);
5. Kovács Erika Renáta (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.) III. díj;
6. Vörös László (Győr, Révai Miklós Gimnázium, IV. o.) III. díj.

42. 2001. Washington, 83 résztvevő

	L.	I.	II.	III.	Pont	Hely
Albánia	5	0	0	0	20	71
Am. Egy. Államok	6	4	2	0	196	2–3
Anglia	6	0	1	3	79	31–33
Argentína	6	0	3	2	103	22–23
Ausztrália	6	1	0	4	97	25
Ausztria	6	0	0	1	41	55
Azerbajdzsán	3	0	0	1	19	72
Belgium	6	0	0	0	25	67–69
Bosznia-Hercegovina	6	0	1	1	47	51
Brazília	6	0	4	2	120	16
Bulgária	6	3	3	0	185	4–5
Ciprus	6	0	0	4	78	34
Csehország	6	0	0	2	57	45
Dánia	6	0	0	0	25	67–69
Dél-Afrika	6	0	1	3	75	36
Dél-Korea	6	3	3	0	185	4–5
Ecuador	6	0	0	0	0	83
Észtország	6	0	1	3	72	37
Fehéroroszország	6	1	2	3	135	12
Finnország	6	0	0	1	32	62–64
Franciaország	6	0	2	3	88	28
Fülöp-szigetek	6	0	0	0	16	75
Görögország	6	0	1	3	86	30
Grúzia	6	0	1	3	71	38
Guatemala	3	0	0	0	12	76
Hollandia	6	0	0	2	42	54
Hong Kong	6	0	2	4	107	19–20

42. 2001. Washington, USA

Horvátország	6	0	1	2	76	35
India	6	2	2	2	148	7
Indonézia	6	0	1	0	16	74
Irán	6	0	2	4	111	18
Írország	6	0	0	1	32	62–64
Izland	6	0	0	0	18	73
Izrael	6	1	2	1	113	17
Japán	6	1	3	2	134	13
Jugoszlávia	6	0	1	3	79	31–33
Kanada	6	1	0	4	100	24
Kazahsztán	6	4	1	0	168	6
Kína	6	6	0	0	225	1
Kirgizisztán	5	0	0	0	5	79
Kolumbia	6	0	0	4	64	42
Kuba	6	1	1	3	92	26
Kuvait	4	0	0	0	2	81–82
Lengyelország	6	0	3	1	107	19–20
Lettország	6	0	1	2	71	39
Litvánia	6	0	0	1	39	56
Luxemburg	2	0	0	0	4	80
Macedónia	6	0	0	2	59	43
Magyarország	6	0	2	3	104	21
Makaó	6	0	0	1	32	62–64
Malajzia	6	0	0	0	36	59
Marokkó	6	0	0	1	45	52
Mexikó	6	0	0	2	56	46–47
Moldávia	5	0	2	1	70	40
Mongólia	6	0	2	2	79	31–33
Németország	6	1	3	1	131	14
Norvégia	6	0	1	1	48	50
Olaszország	6	0	0	2	55	46–47
Oroszország	6	5	1	0	196	2–3
Örményország	5	0	0	2	44	53
Paraguay	5	0	0	0	2	81–82
Peru	6	0	0	4	67	41
Portugália	6	0	0	0	6	78
Románia	6	1	2	2	129	15
Spanyolország	6	0	0	1	37	58
Sri Lanka	4	0	0	1	21	70
Svájc	6	0	0	2	38	57
Svédország	6	0	0	1	25	67–69
Szingapur	6	0	1	4	87	29
Szlovákia	6	0	0	2	54	48
Szlovénia	6	0	0	0	27	66
Tajvan	6	1	5	0	141	9
Thajföld	6	0	2	2	103	22–23
Törökország	6	1	3	2	136	11

Trinidad és Tobágó	6	0	0	2	36	60–61
Tunézia	6	0	0	0	36	60–61
Türkmenisztán	5	0	0	0	29	65
Új-Zéland	6	0	1	1	58	44
Ukrajna	6	1	5	0	143	8
Uruguay	2	0	0	0	8	77
Üzbegisztán	6	0	1	3	91	27
Venezuela	5	0	1	1	53	49
Vietnam	6	1	4	0	139	10
Összesen:	473	39	81	122	max.: $6 \cdot 42 = 252$	

43. 2002. Glasgow, Skócia

A skót nyár hűvös idővel és sok esővel „kényeztette” el a résztvevőket. A szállás viszont igazán kényelmes volt az egyetemi kollégiumban, mindenkinek külön szobát adtak. A megnyitón láttunk és hallottunk skót dudát, viseletet és néptáncot. Egy este zsonglőrbemutatót tartott egy matematikus, aki előadást tartott a mutatóványok matematikai hátteréről is. Elméletben és gyakorlatban egyaránt lenyűgöző volt. A kirándulások célpontjai Edinburgh és York voltak.

Két további magyar vonatkozásról se feledkezzünk meg. A verseny matematikai háttérmunkálataiban komoly szerepet vállalt az egykori legendás olimpikon Bollobás Béla. A magyar csapat vezetőjét, Pelikán Józsefet pedig az olimpiát irányító Advisory Board elnökének választották meg.

A magyar csapat tagjai:

1. Csikvári Péter (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) II. díj;
2. Csóka Endre (Debrecen, Fazekas Mihály Gimnázium, III. o.) II. díj;
3. Gerencsér Balázs (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) III. díj;
4. Harangi Viktor (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) III. díj;
5. Kovács Erika Renáta (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) III. díj;
6. Rác Béla András (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, II. o.) I. díj.

43. 2002. Glasgow, 84 résztvevő

	L.	I.	II.	III.	Pont	Hely
Albánia	6	0	0	1	25	70–71
Am. Egy. Államok	6	4	1	0	171	3
Anglia	6	0	2	2	116	27
Argentína	6	0	0	5	96	31
Ausztrália	6	1	2	1	117	26
Ausztria	6	0	0	1	50	56–57

43. 2002. Glasgow, Skócia

Azerbajdzsán	6	0	0	1	37	65
Belgium	6	0	0	1	57	52–53
Bosznia-Hercegovina	6	0	0	1	42	62
Brazília	6	0	1	5	123	21–23
Bulgária	6	3	2	1	167	4
Ciprus	6	0	0	0	29	68
Csehország	6	0	2	3	115	28
Dánia	6	0	0	0	53	55
Dél-Afrika	6	0	1	3	90	32
Dél-Korea	6	1	5	0	163	6
Ecuador	6	0	0	0	3	82
Észtország	6	0	2	0	75	40–41
Fehéroroszország	6	1	2	3	135	14–15
Finnország	6	0	0	3	79	38
Franciaország	6	0	2	3	127	14
Fülöp-szigetek	5	0	0	0	18	74
Görögország	6	0	0	2	62	47
Grúzia	6	0	0	2	84	34
Guatemala	3	0	0	0	44	81
Hollandia	6	0	0	1	82	35–36
Hong Kong	6	1	2	2	120	24
Horvátország	6	0	0	2	70	45
India	6	1	3	2	156	9
Indonézia	6	0	0	1	38	64
Irán	6	0	4	2	143	11
Írország	6	0	0	0	25	70–71
Izland	6	0	0	0	36	66
Izrael	6	0	3	3	130	18
Japán	6	1	3	1	133	16–17
Jugoszlávia	6	0	1	5	114	29
Kanada	6	1	3	1	142	12–13
Kazahsztán	6	0	3	3	133	16–17
Kína	6	6	0	0	212	1
Kirgizisztán	4	0	0	0	17	75–76
Kolumbia	6	0	0	3	81	37
Kuba	6	0	0	2	78	39
Kuvait	4	0	0	0	2	83
Lengyelország	6	0	4	1	123	21–23
Lettország	6	0	1	2	75	40–41
Litvánia	6	0	1	2	74	42
Luxemburg	2	0	0	0	12	79
Macedónia	6	0	1	1	73	43
Magyarország	6	1	2	3	142	12–13
Makaó	6	0	0	3	50	56–57
Malajzia	6	0	0	0	26	69
Marokkó	6	0	0	1	39	63
Mexikó	6	0	0	3	67	46

Moldávia	6	0	0	2	60	48–49
Mongólia	6	0	0	3	82	35–36
Németország	6	2	1	2	144	10
Norvégia	6	1	0	1	72	44
Olaszország	6	0	0	5	88	33
Oroszország	6	6	0	0	204	2
Örményország	6	0	0	0	33	67
Paraguay	2	0	0	0	11	80
Peru	5	0	0	2	59	51
Portugália	6	0	0	0	15	78
Puerto Rico	6	0	0	0	17	75–76
Románia	6	2	3	1	157	8
Spanyolország	6	0	0	1	44	60–61
Sri Lanka	4	0	0	0	16	77
Svájc	6	0	0	1	44	60–61
Svédország	6	0	0	2	60	48–49
Szingapur	6	0	2	2	112	30
Szlovákia	6	0	2	4	119	25
Szlovénia	6	0	0	1	46	58
Tajvan	6	1	4	1	161	7
Thajföld	6	0	2	2	123	21–23
Törökország	6	1	1	4	135	14–15
Trinidad és Tobágó	6	0	0	0	22	72–73
Tunézia	6	0	0	0	22	72–73
Türkmenisztán	6	0	0	1	45	59
Új-Zéland	6	1	0	0	82	35–36
Ukrajna	6	1	3	0	124	20
Uruguay	1	0	0	0	1	84
Üzbegisztán	6	0	0	0	60	49–50
Venezuela	5	0	1	1	58	52–53
Vietnam	6	3	1	2	166	5
Összesen:	479	39	73	120	max.: $6 \cdot 42 = 252$	

44. 2003. Tokió, Japán

A résztvevők ízelítőt kaphattak mind a távol-kelet sajátosságaiból, mind a fejlett technológián és szervezésen alapuló megalopolisz életéből. Már maga a toliói közlekedés és metrózás is nagy élmény volt.

A kiránduló napon a diákokat a helyi Disney-landbe, a tanárokat Kamakura-ra vitték. A záróünnepség fényét emelte, hogy megjelent a császári család egy tagja, maga a trónörökös.

A magyar csapat tagjai:

1. Csóka Endre (Debrecen, Fazekas Mihály Gimnázium, IV. o.) II. díj;
2. Kiss Demeter (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.) II. díj;

44. 2003. Tokió, Japán

3. Kocsis Albert Tihamér (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.) III. díj;
4. Nagy Zoltán Lóránt (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.);
5. Pach Péter Pál (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.) II. díj;
6. Rácz Béla András (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.) I. díj.

44. 2003. Tokió, 82 résztvevő

	L.	I.	II.	III.	Pont	Hely
Albánia	4	0	0	0	23	70–72
Am. Egy. Államok	6	4	2	0	188	3
Anglia	6	1	2	3	128	10–11
Argentína	6	1	1	2	91	28–29
Ausztrália	6	0	2	2	92	26–27
Ausztria	6	0	0	0	38	58
Azerbajdzsán	6	0	1	1	66	40
Belgium	6	0	1	1	70	37–38
Bosznia-Hercegovina	6	0	0	2	61	43–44
Brazília	6	0	1	3	92	26–27
Bulgária	6	6	0	0	227	1
Ciprus	6	0	0	0	23	70–72
Csehország	6	0	1	2	79	34
Dánia	5	0	0	0	27	66
Dél-Afrika	6	0	0	3	60	45
Dél-Korea	6	2	4	0	157	6
Ecuador	6	0	0	0	11	77
Észtország	6	0	0	0	37	59–61
Fehéroroszország	6	1	2	2	111	19–20
Finnország	6	0	0	1	43	54–56
Franciaország	6	0	2	2	95	24
Fülöp-szigetek	6	0	0	0	9	79
Görögország	6	0	1	4	88	30–31
Grúzia	6	0	1	2	86	32
Hollandia	6	0	0	0	30	64
Hong Kong	6	0	2	2	91	28–29
Horvátország	6	0	0	3	70	33
India	6	0	4	1	115	15
Indonézia	6	0	0	2	70	37–38
Irán	6	0	3	2	112	17–18
Írország	6	0	0	0	21	74
Izland	6	0	0	1	33	62–63
Izrael	5	0	2	3	103	21
Japán	6	1	3	2	131	9
Jugoszlávia	6	0	3	1	101	23
Kanada	6	2	0	3	119	12–13
Kazahsztán	6	1	2	2	119	12–13

Kína	6	5	1	0	211	2
Kirgizisztán	6	0	0	2	50	49–51
Kolumbia	6	0	0	3	67	39
Kuba	1	0	0	1	14	76
Kuvait	3	0	0	0	8	80
Lengyelország	6	1	2	0	102	22
Lettország	6	0	0	1	50	49–51
Litvánia	6	0	0	2	49	52–53
Luxemburg	2	0	0	1	25	69
Macedónia	6	0	0	2	54	47
Magyarország	6	1	3	1	128	10–11
Makaó	6	0	0	2	40	57
Malajzia	5	0	0	0	26	67–68
Marokkó	6	0	0	0	43	54–56
Mexikó	6	0	0	3	64	41
Moldávia	6	0	1	2	88	30–31
Mongólia	6	0	1	3	93	25
Németország	6	1	2	1	112	17–18
Norvégia	6	0	1	0	62	42
Olaszország	6	0	0	1	50	49–51
Oroszország	6	3	2	1	167	5
Örményország	6	0	0	3	61	43–44
Paraguay	1	0	0	0	0	82
Peru	4	0	0	1	37	59–61
Portugália	6	0	0	0	22	73
Puerto Rico	3	0	0	1	23	70–72
Románia	6	1	4	1	143	7
Spanyolország	6	0	0	1	59	46
Sri Lanka	4	0	0	0	4	81
Svájc	6	0	0	0	26	67–68
Svédország	6	0	0	1	52	48
Szingapur	6	0	0	2	71	36
Szlovákia	6	0	0	4	77	35
Szlovénia	6	0	0	0	18	75
Tajvan	6	1	2	2	114	16
Thajföld	6	1	1	3	111	19–20
Törökország	6	1	3	1	133	8
Trinidad és Tobágó	6	0	0	0	33	62–63
Türkmenisztán	4	0	0	1	37	59–61
Új-Zéland	6	0	0	0	43	54–56
Ukrajna	6	1	2	3	118	14
Uruguay	5	0	0	0	29	65
Üzbegisztán	6	0	1	1	49	52–53
Venezuela	3	0	0	0	10	78
Vietnam	6	2	3	1	172	4
Összesen:	457	37	69	104	max.: $6 \cdot 42 = 252$	

4. A Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák feladatai

1959.

1959/1. Mutassuk meg, hogy – bármilyen természetes számot jelentsen n – a $\frac{21n+4}{14n+3}$ tört sohasem egyszerűsíthető.

1959/2. Az x változó mely valós értékei mellett érvényesek a következő egyenlőségek:

$$a) \sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = \sqrt{2},$$

$$b) \sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = 1,$$

$$c) \sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = 2.$$

1959/3. Valamely x értékre teljesül az

$$(1) \quad a \cos^2 x + b \cos x + c = 0$$

egyenlet. Írjunk fel olyan másodfokú egyenletet, amelyet $\cos 2x$ elégít ki. Alkalmazzuk eredményünket az $a=4$, $b=2$, $c=-1$ esetben.

1959/4. Szerkesszünk derékszögű háromszöget, ha adott az átfogója és tudjuk, hogy az átfogóhoz tartozó súlyvonal a két befogó mértani középarányosa.

1959/5. Az AB szakaszon mozog az M pont. Az AM és MB szakasz fölé az AB egyenes ugyanazon oldalán megszerkesztjük az $AMCD$ és $BMEF$ négyzeteket és körülírt körüket. A két kör M -ben és N -ben metszi egymást. Mutassuk meg, hogy az AE és BC egyenesek átmennek az N ponton. Mutassuk meg, hogy az MN egyenes átmegy egy állandó ponton. Mi a mértani helye a két négyzet középpontját összekötő szakasz felezőpontjának?

1959/6. A P és Q sík egymást a p egyenesben metszi, és A a P síknak, C a Q síknak olyan pontja, amely nincs rajta p -n. Megszerkesztendő az az $ABCD$ szimmetrikus trapéz ($AB \parallel CD$) melynek B csúcsa a P -n, D csúcsa a Q síkban van, és amelybe kört írhatunk.

1960.

1960/1. Melyek azok a háromjegyű természetes számok, amelyek egyenlők számjegyeik négyzetösszegének 11-szeresével?

1960/2. Az x változó mely valós értékeire teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$\frac{4x^2}{(1 - \sqrt{1+2x})^2} < 2x + 9.$$

1960/3. Az ABC derékszögű háromszög $BC = a$ átfogóját n számú egyenlő szakaszra osztjuk, ahol n tetszés szerinti páratlan természetes szám. Jelöljük h -val az átfogóhoz tartozó magasságot, továbbá α -val azt a szöget, amely alatt az átfogó felezőpontját tartalmazó szakasz látszik az A csúcsból. Bizonyítsuk be, hogy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4nh}{(n^2 - 1)a}.$$

1960/4. Adva van az ABC háromszögnek az A és B csúcsból kiinduló m_a , m_b magassága és az A csúcsból kiinduló súlyvonala. Szerkesszük meg a háromszöget.

1960/5. Adott egy $ABCD A'B'C'D'$ kocka. Jelöljük X -szel a kocka AC lapátlójának tetszés szerinti pontját, Y -nal pedig a $B'D'$ lapátló egy tetszés szerinti pontját.

- Mi a mértani helye valamennyi XY szakasz felezőpontjának?
- Tekintsük valamennyi XY szakasznak azt a Z pontját, amelyre fennáll a $ZY = 2XZ$ egyenlőség és keressük meg ezeknek a Z pontoknak a mértani helyét!

1960/6. Adott egy forgáskúp. Írjunk bele gömböt, majd e gömb köré hengert úgy, hogy annak alaplapja legyen rajta a kúp alapkörének a síkján. Jelölje V_1 a kúp, V_2 pedig a henger térfogatát.

- Bizonyítsuk be, hogy V_1 nem lehet egyenlő V_2 -vel.
- Állapítsuk meg annak a k számnak a legkisebb értékét amelyre még fennállhat a $V_1 = kV_2$ egyenlőség, és ha k ezt a minimális értéket veszi fel, szerkesszük meg azt a szöget, amelyet a kúp alkotói a tengellyel bezárnak.

1960/7. Egy szimmetrikus trapéz párhuzamos oldalainak a hossza a és b , magassága m .

- Szerkesszük meg a trapéz szimmetriatengelyének azt a P pontját, amelyből a szárak derékszög alatt láthatók.
- Számítsuk ki P távolságát az egyik párhuzamos oldaltól.
- Mi a P pont létezésének feltétele?

1961.

1961/1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$(1) \quad x + y + z = a$$

$$(2) \quad x^2 + y^2 + z^2 = b^2,$$

$$(3) \quad xy = z^2,$$

ahol a és b adott számok. Milyen feltételt kell teljesíteniök az a és b számoknak, hogy az egyenletrendszer megoldását adó x, y, z számok mind pozitívak és különbözők legyenek?

1961/2. A háromszög oldalai a, b, c , területe t . Bizonyítsuk be, hogy

$$(1) \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq 4t\sqrt{3}$$

Milyen esetben áll fenn egyenlőség?

1961/3. Oldjuk meg a

$$\cos^n x - \sin^n x = 1$$

egyenletet, ahol n tetszőleges pozitív egész.

1961/4. A $P_1P_2P_3$ háromszög belsejében adott egy tetszőleges P pont. A P_1P , P_2P , P_3P egyenesek metszéspontja a szemközti oldallal legyen Q_1 , Q_2 , illetve Q_3 . Bizonyítsuk be, hogy a

$$\frac{P_1P}{PQ_1}, \frac{P_2P}{PQ_2}, \frac{P_3P}{PQ_3}$$

arányok között van olyan, amelyik nem nagyobb, és olyan is, amelyik nem kisebb mint 2.

1961/5. Szerkesztendő az ABC háromszög, ha adott két oldalának $AC = b$, $AB = c$ hossza és az $AMB = \omega$ szög, ahol M a BC szakasz felezőpontja; ω hegyesszög. Bizonyítandó, hogy a feladat akkor és csakis akkor oldható meg, ha

$$\text{btg } \frac{\omega}{2} \leq c < b.$$

1961/6. Adott az ε sík, és a sík egyik oldalán az A, B, C pontok, amelyek nincsenek egy egyenesen, és az általuk meghatározott sík nem párhuzamos ε -nal. A', B', C' legyen az ε sík három tetszőleges pontja. Az AA', BB', CC' szakaszok felezőpontja legyen rendre L, M, N és az LMN háromszög súlypontja legyen G . (Figyelmen kívül hagyjuk az olyan A', B', C' ponthármasokat, amelyekre vonatkozóan L, M, N nem alkot háromszöget.) Mi a G pontok mértani helye, ha A', B', C' egymástól függetlenül befutja az ε síkot?

1962.

1962/1. Keressük meg azt a legkisebb x természetes számot, melynek a tízes számrendszerben felírt alakja 6-ra végződik, és ha ezt az utolsó 6-os számjegyet töröljük, de egyidejűleg a többi megmaradt számjegy elé egy 6-os számot írunk, akkor x négyszeresét kapjuk.

1962/2. Határozzuk meg az összes olyan x valós számot, amely kielégíti a

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$$

egyenlőtlenséget.

1962/3. Adott az $ABCD A'B'C'D'$ kocka: két szemben fekvő lapja $ABCD$ és $A'B'C'D'$, ahol $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$. Az X pont állandó sebességgel futja be az $ABCD$ négyzet kerületét a felírt körüljárási irányban, míg az Y pont ugyanakkora sebességgel a $B'C'CB$ négyzet kerületét futja be, szintén az itt felírt körüljárási irányban. Az X és Y ugyanabban a pillanatban indul el az A , illetve B' pontokból. Mi az XY szakasz Z felezőpontjának mértani helye?

1962/4. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1.$$

1962/5. Adott egy k kör három különböző pontja: A , B és C . Jelöljük ki szerkesztéssel ennek a körnek azt a D pontját, amelyre az $ABCD$ négyszög érintőnégyszög.

1962/6. Jelentse R egy tetszőleges egyenlő szárú háromszög köré írható kör sugarát, r pedig a beírt kör sugarát. Bizonyítsuk be, hogy a két kör középpontjának távolsága:

$$(1) \quad d = \sqrt{R(R-2r)}.$$

1962/7. Az $SABC$ tetraéderről annyit tudunk, hogy öt olyan gömb van, melyek mindegyike érinti a tetraéder valamennyi élét, illetőleg azok meghosszabbítását. Bizonyítsuk be, hogy

a) az $SABC$ tetraéder szabályos;

b) megfordítva: bármely szabályos tetraéder esetén létezik öt olyan gömb, amely az említett tulajdonsággal rendelkezik.

1963.

1963/1. Határozzuk meg a

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$$

egyenlet valamennyi valós gyökét. p valós paramétert jelent.

1963/2. Adott a térben az A pont és a BC szakasz. Mi a mértani helye az összes olyan derékszög csúcsának, melynek egyik szára az A pontot, másik szára pedig a BC szakasznak legalább egy pontját tartalmazza?

1963/3. Tekintsük egy konvex n -szöget, amelynek minden szöge egyenlő, és az egymás után elhelyezkedő a_1, a_2, \dots, a_n oldalaira fennáll, hogy

$$(1) \quad a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n.$$

Bizonyítsuk be, hogy ekkor szükségképpen

$$(2) \quad a_1 = a_2 = \dots = a_n.$$

1963/4. Határozzuk meg az x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ismeretleneknek összes olyan értékrendszerét, melyek kielégítik az

$$(1) \quad x_5 + x_2 = yx_1,$$

$$(2) \quad x_1 + x_3 = yx_2,$$

$$(3) \quad x_2 + x_4 = yx_3,$$

$$(4) \quad x_3 + x_5 = yx_4,$$

$$(5) \quad x_4 + x_1 = yx_5$$

egyenletrendszert, ahol y paramétert jelöl.

1963/5. Bizonyítsuk be, hogy

$$(1) \quad \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

1963/6. Egy versenyen öt tanuló vett részt: A, B, C, D és E . Valaki előzőleg azt tippelte, hogy a versenyzők helyezési sorrendje $ABCDE$ lesz, azonban — mint utóbb kiderült — így egyetlen versenyző helyezését sem találta el, sőt még azt sem, milyen sorrendben következett két egymás utáni helyezett. Másvalaki a $DAECB$ sorrendre tippelt. Ez lényegesen jobbnak bizonyult, mivel ebben pontosan két versenyző helyezése megegyezett a ténylegessel, ugyancsak két esetben az is, hogy milyen sorrendben követte egymást két versenyző. Milyen eredménnyel végződött valójában a verseny?

1964.

1964/1. a) Melyek az n összes olyan pozitív egész értékei, amelyekre $2^n - 1$ osztható 7-tel?

b) Bizonyítsuk be, hogy $2^n + 1$ sohasem osztható 7-tel, bármilyen pozitív egész számot jelentsen is n .

1964/2. Jelentse a, b, c egy háromszög oldalainak a hosszát. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$(1) \quad a^2(-a+b+c) + b^2(a-b+c) + c^2(a+b-c) \leq 3abc.$$

1964/3. Jelentse a, b, c az ABC háromszög oldalainak a hosszát. Húzzuk meg az ABC háromszögbe írt körnek az oldalakkal párhuzamos érintőit. Ezek az érintők az ABC háromszögből három újabb háromszöget vágnak le; az utóbbiak mindegyikében ismét megrajzoljuk a beírt kört. Számítsuk ki a négy beírt kör területének az összegét.

1964/4. 17 tudós mindegyike levelezést folytat az összes többivel. Összesen háromféle témáról leveleznek, de bármelyik pár mindig csak ugyanarról a témáról. Bizonyítsuk be, hogy van közöttük legalább három olyan tudós, akik közül bármelyik kettő azonos témáról levelez egymással.

1964/5. Adott a síkban 5 pont. Azok között az egyenesek között, melyek ezt az 5 pontot páronként összekötik, nincsenek sem párhuzamosok, sem egymásra merőlegesek, sem egymással egybeesők. Az adott pontok mindegyikéből merőlegeseket bocsátunk az összes olyan egyenesre, melyeket a megmaradó négy-négy pont páronkénti összekötésével nyerünk. Adjunk minél jobb felső becslést a merőlegesek egymás közötti metszéspontjainak a számára, ha az adott 5 pontot figyelmen kívül hagyjuk.

1964/6. Adott az $ABCD$ tetraéder. A D csúcsot kössük össze az ABC lap D_1 súlypontjával. A DD_1 egyenessel az A, B illetve C csúcson át húzott párhuzamosok a csúcsokkal szemben levő oldallapok síkját rendre az A_1, B_1 , illetve C_1 pontban metszik.

a) Bizonyítsuk be, hogy az $ABCD$ tetraéder térfogata harmadrésze az $A_1B_1C_1D_1$ tetraéder térfogatának.

b) Érvényes-e a kapott eredmény akkor is, ha a D_1 pontot tetszőlegesen vesszük fel az ABC háromszög belsejében?

1965.

1965/1. Keressük meg a $0 \leq x \leq 2\pi$ szakaszba eső valamennyi olyan x számot, mely kielégíti a következő egyenlőtlenséget:

$$(1) \quad 2 \cos x \leq |\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x}| \leq \sqrt{2}.$$

1965/2. Az

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0,$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0$$

egyenletrendszer együtthatóiról a következőket tudjuk:

- a) a_{11}, a_{22}, a_{33} mindegyike pozitív,
 b) a többi együttható mind negatív,
 c) minden egyes egyenletben az együtthatók összege pozitív.

Bizonyítsuk be, hogy az egyenletrendszer egyetlen megoldása:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

1965/3. Az adott $ABCD$ tetraéder AB élének hosszúsága a , CD élének hossza b . Az AB és CD kitérő élek egyenesének a távolsága d , hajlásszöge ω . A tetraédert egy, az AB és CD élekkel párhuzamos ε sík két részre vágja szét. Mekkora a két rész térfogatának az aránya, ha ismeretes, hogy az AB egyenes és az ε távolsága k -szorosra a CD egyenes és az ε közötti távolságnak.

1965/4. Állítsuk elő az összes olyan x_1, x_2, x_3, x_4 valós számnégycet, melynek bármely eleméhez hozzáadva a többi három szorzatát, összegül mindig 2-t kapunk.

1965/5. Az adott OAB háromszög AOB szöge kisebb 90° -nál. Az OAB háromszög területének vagy belsejének tetszőleges, de O -tól különböző M pontjából merőlegeseket bocsátunk OA -ra és OB -re. Ezeknek a merőlegeseeknek a talppontjait jelöljük rendre P -vel, illetve Q -val. Legyen továbbá H az OPQ háromszög magasságpontja. Mi a H pontok mértani helye, ha M befutja

- a) az AB oldalt;
 b) az OAB háromszög belsejét.

1965/6. Adott a síkban n darab pont ($n \geq 3$). A belőlük kiválasztható összes pontpár hosszának maximuma legyen d . Az említett szakaszok közül azokat, melyeknek a hosszúsága éppen d , a pontrendszer átmérőinek nevezzük. Bizonyítsuk be, hogy legfeljebb n darab ilyen átmérő van.

1966.

1966/1. Egy matematikai tanulmányi versenyen három feladatot tűztek ki: A -t, B -t és C -t. 25 olyan tanuló akadt, akiknek mindegyike megoldott legalább egy feladatot. Azok között a tanulók között, akik A -t nem tudták megoldani, kétszer annyian voltak olyanok, akik megoldották B -t, mint akik C -t oldották meg. Csak az A feladatot 1-gyel több tanuló oldotta meg, mint ahányan a többiek voltak, akik szintén megoldották A -t. A csupán egy feladatot megoldó tanulók fele nem tudta megoldani A -t. Hány tanuló oldotta meg csak a B feladatot?

1966/2. Jelölje valamely háromszögben az oldalakat rendre a, b, c ; a velük szemközti szögeket α, β, γ . Bizonyítsuk be, hogy ha

$$(1) \quad a + b = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} (a \operatorname{tg} \alpha + b \operatorname{tg} \beta),$$

akkor a háromszög egyenlő szárú.

1966/3. Bizonyítsuk be, hogy egy szabályos tetraéder köré írt gömb középpontja és a csúcsok közötti távolságok összege kisebb, mint a tér bármely más pontjából a tetraéder csúcspontjaiba vezető távolságok összege.

1966/4. Bizonyítsuk be, hogy bármely n pozitív egészre és bármely $x \neq \frac{\lambda\pi}{2^k}$ ($k=0, 1, 2, \dots, n$; λ tetszés szerinti egész szám) valós számra érvényes a következő azonosság:

$$(1) \quad \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \dots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2^n x.$$

1966/5. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} |a_1 - a_2|x_2 + |a_1 - a_3|x_3 + |a_1 - a_4|x_4 &= 1, \\ |a_2 - a_1|x_1 + |a_2 - a_3|x_3 + |a_2 - a_4|x_4 &= 1, \\ |a_3 - a_1|x_1 + |a_3 - a_2|x_2 + |a_3 - a_4|x_4 &= 1, \\ |a_4 - a_1|x_1 + |a_4 - a_2|x_2 + |a_4 - a_3|x_3 &= 1, \end{aligned}$$

ahol a_1, a_2, a_3, a_4 négy különböző valós számot jelent.

1966/6. Az ABC háromszög AB, BC, CA oldalán vegyük fel rendre a tetszés szerinti, de a csúcsoktól különböző M, K, L pontokat. Bizonyítsuk be, hogy az MAL, KBM és LCK háromszögek közül legalább az egyiknek a területe nem nagyobb az ABC területének a negyedénél.

1967.

1967/1. Legyen az $ABCD$ paralelogramma AB oldalának hossza a , AD oldalé egységnyi, DAB szögének mérőszáma α , végül az ABD háromszög hegyesszögű. Bizonyítsuk be, hogy az egységnyi sugarú K_A, K_B, K_C és K_D körlemez, amelyeknek középpontja rendre az A, B, C, D csúcs, akkor és csakis akkor fedik le együtt a paralelogrammát, ha

$$(1) \quad a \leq \cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha.$$

1967/2. Valamely tetraéderen csak az egyik él mérőszáma nagyobb 1-nél. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a tetraéder térfogatának a mérőszáma legfeljebb $\frac{1}{8}$.

1967/3. Legyen k, m és n három pozitív egész szám, $m+k+1$ az $(n+1)$ -nél nagyobb prímszám, továbbá $c_s = s(s+1)$, ahol $s = 1, 2, \dots$. Bizonyítsuk be, hogy a következő szorzat:

$$(1) \quad (c_{m+1} - c_k)(c_{m+2} - c_k) \cdot \dots \cdot (c_{m+n} - c_k)$$

osztható a

$$(2) \quad c_1 c_2 \dots c_n$$

szorzattal.

1967/4. Adottak az $A_0B_0C_0$ és $A'B'C'$ hegyesszögű háromszögek. Szerkesszünk az $A_0B_0C_0$ háromszög köré olyan ABC háromszöget, amely hasonló az $A'B'C'$ háromszöghöz (az A, B, C pontok rendre az A', B', C' pontoknak felelnek meg), és C_0 az AB oldalnak, A_0 a BC oldalnak és végül B_0 a CA oldalnak belső pontja. Szerkesszük meg ezután az ilyen ABC háromszögek közül azt is, amelyiknek legnagyobb a területe.

1967/5. Tekintsük a következő $\{c_n\}$ sorozatot:

$$\begin{aligned}c_1 &= a_1 + a_2 + \dots + a_8 \\c_2 &= a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_8^2 \\&\vdots \\c_n &= a_1^n + a_2^n + \dots + a_8^n, \\&\vdots\end{aligned}$$

ahol a_1, a_2, \dots, a_8 olyan valós számokat jelentenek, amelyek nem mind egyenlők nullával.

Tudjuk, hogy a $\{c_n\}$ sorozat végtelen sok tagja nullával egyenlő. Állapítsuk meg az összes olyan n számot, melyre $c_n = 0$.

1967/6. Egy n napig ($n > 1$) tartó sportversenyen összesen m darab érmet osztottak ki. Az első napon 1 érmet és a megmaradó érmek $\frac{1}{7}$ része került kiosztásra, a másodikon 2 érmet és a még fennmaradók $\frac{1}{7}$ része és így tovább. Végül az n -edik, azaz utolsó napon kiosztották a még visszamaradt, pontosan n érmet. Hány napig tartott a verseny és hány érmet osztottak ki összesen?

1968.

1968/1. Bizonyítsuk be, hogy pontosan egy olyan háromszög létezik, amelyben az oldalhosszak egymást követő természetes számok, azonkívül az egyik szög kétszer akkora, mint ennek a háromszögnek egy másik szöge.

1968/2. Határozzuk meg az összes olyan x természetes számot, amelyre

$$(1) \quad p(x) = x^2 - 10x - 22,$$

ahol $p(x)$ a tízes számrendszerben felírt x szám számjegyeinek a szorzatát jelenti.

1968/3. Bizonyítsuk be, hogy az

$$(1) \quad \begin{aligned} ax_1^2 + bx_1 + c &= x_2, \\ ax_2^2 + bx_2 + c &= x_3, \\ &\dots\dots\dots \\ ax_n^2 + bx_n + c &= x_1 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek, ahol a, b, c adott valós számok és $a \neq 0$,

- I. $(b-1)^2 - 4ac < 0$ esetén nincs valós megoldása;
- II. $(b-1)^2 - 4ac = 0$ esetén egyetlen valós megoldása van;
- III. $(b-1)^2 - 4ac > 0$ esetén egynél több valós megoldása van.

1968/4. Bizonyítsuk be, hogy minden tetraédernek van olyan csúcspontja, amelybe futó élekkel mint oldalakkal háromszöget lehet szerkeszteni.

1968/5. Jelentsen f olyan valós függvényt, amely minden valós x -re értelmezett, továbbá a következő tulajdonságú:

$$(1) \quad f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - (f(x))^2},$$

ahol a adott pozitív szám.

I. Bizonyítsuk be, hogy az f függvény periodikus, azaz létezik olyan pozitív b szám, amelyre x minden értéke esetén fennáll:

$$f(x+b) = f(x).$$

II. Adjunk konkrét példát (az azonosan állandótól különböző) ilyen f függvényre, ahol $a = 1$.

1968/6. Jelentse $[x]$ azt a legnagyobb egész számot (x „egész részét”), amely legfeljebb akkora, mint az x valós szám. Számítsuk ki az

$$(1) \quad \left[\frac{n+1}{2} \right] + \left[\frac{n+2}{2^2} \right] + \dots + \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right] + \dots$$

összeg értékét minden pozitív egész n számra, és bizonyítsuk be a kapott eredményt.

1969.

1969/1. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan a természetes szám van, amely a következő tulajdonságú: bármilyen természetes számot jelöljön is n , a

$$z = n^4 + a$$

szám sohasem prímszám.

1969/2. a_1, a_2, \dots, a_n jelentsenek valós állandókat, továbbá x jelentsen valós változót, végül legyen

$$(1) \quad f(x) = \cos(a_1 + x) + \frac{\cos(a_2 + x)}{2} + \frac{\cos(a_3 + x)}{2^2} + \dots + \frac{\cos(a_n + x)}{2^{n-1}}.$$

Bizonyítsuk be, hogy ha $f(x_1) = f(x_2) = 0$, akkor $x_2 - x_1 = m\pi$, ahol m egész szám.

1969/3. Jelentse k az 1, 2, 3, 4, 5 számok bármelyikét. Állapítsuk meg k minden egyes értékére külön-külön annak szükséges és elegendő feltételét, hogy létezzék olyan tetraéder, amelynek k számú éle egyenként a egységnyi, a többi $(6 - k)$ számú mindegyike pedig egységnyi hosszúságú, ahol $a > 0$.

1969/4. Az AB szakasz mint átmérő fölé rajzoltuk a k félkört. Legyen C a k -nak A -tól és B -től különböző, tetszőleges pontja; D pedig a C -ből AB -re bocsátott merőleges talppontja. Tekintsük a következő három kört (k_1 -et, k_2 -t és k_3 -at), amelyeknek AB közös érintője: k_1 az ABC háromszögbe írt kör, míg k_2 és k_3 mindegyike érinti a CD szakaszt és a k félkört is. Bizonyítsuk be, hogy k_1 -nek, k_2 -nek és k_3 -nak van még egy közös érintője.

1969/5. Adott a síkban n pont ($n > 4$), közülük semelyik három nem esik egy egyenesbe. Bizonyítsuk be, hogy legalább $\binom{n-3}{2}$ olyan konvex négyszög van, amelyeknek a csúcsai az adott pontok közül valók.

1969/6. Bizonyítsuk be, hogy ha $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_1y_1 - z_1^2 > 0$ és $x_2y_2 - z_2^2 > 0$, akkor fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$(1) \quad \frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} \leq \frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2}.$$

1970.

1970/1. Legyen M az ABC háromszög AB oldalának valamely belső pontja. Jelölje r_1 , r_2 és r rendre az AMC , BMC , ill. ABC háromszögbe írható kör sugarát, továbbá ϱ_1 az AMC háromszög AM oldalához, ϱ_2 a BMC háromszög BM oldalához, végül ϱ az ABC háromszög AB oldalához tartozó hozzáírt kör sugarát.

Bizonyítsuk be, hogy ekkor fennáll az $\frac{r_1}{\varrho_1} \cdot \frac{r_2}{\varrho_2} = \frac{r}{\varrho}$ egyenlőség.

1970/2. Jelentsenek a , b és n 1-nél nagyobb természetes számokat, közülük a és b két számrendszer alapszáma. Az $x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0$ alakú szám értéke az a

alapú számrendszerben A_n , a b alapúban B_n , ahol $x_n \neq 0$ és $x_{n-1} \neq 0$. Az első számjegyeknek, x_n -nek az elhagyásával keletkező számok A_{n-1} , ill. B_{n-1} .

Bizonyítsuk be, hogy az $a > b$ egyenlőtlenség akkor és csakis akkor áll, ha

$$(1) \quad \frac{A_{n-1}}{A_n} < \frac{B_{n-1}}{B_n}.$$

1970/3. A valós számokból álló $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ sorozat eleget tesz az

$$(1) \quad 1 = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$$

egyenlőtlenségláncnak. Felhasználásával a $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ sorozatot a következőképpen definiáljuk:

$$(2) \quad b_n = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k} \right) \frac{1}{\sqrt{a_k}}.$$

Bizonyítsuk be, hogy

I. a $0 \leq b_n < 2$ egyenlőtlenségpár minden n értékre fennáll;

II. bármely olyan c valós számhoz, amely eleget tesz a $0 \leq c < 2$ feltételnek, létezik olyan (1)-et kielégítő $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ sorozat, hogy a belőle képzett b_n számok közül végtelen sok nagyobb c -nél.

1970/4. Határozzuk meg az összes olyan n pozitív egész számot, amely a következő tulajdonságú:

Az $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ halmaz úgy bontható fel két, közös elemet nem tartalmazó és nem üres halmazra, hogy az egyik részhalmaz elemeinek a szorzata a másik részhalmaz elemeinek a szorzatával egyenlő.

1970/5. Az $ABCD$ tetraéderben a BDC szög derékszög. A D csúcsból az ABC síkra bocsátott merőleges talppontja egybeesik az ABC háromszög magasságpontjával.

Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$(1) \quad (AB + BC + CA)^2 \leq 6(AD^2 + BD^2 + CD^2).$$

Mely tetraéderek esetén érvényes itt az egyenlőség?

1970/6. Adott a síkon 100 pont; közülük egyik három sem esik egy egyenesre. Tekintsük az összes lehetséges háromszöget, amelyeknek a csúcspontjai az adott pontok közül valók. Bizonyítsuk be, hogy ezeknek a háromszögeknek legfeljebb a 70 %-a hegyesszögű.

1971.

1971/1. Bizonyítsuk be, hogy a következő állítás $n=3$ és $n=5$ esetén igaz, minden más, 2-nél nagyobb egész szám esetében pedig hamis:

„Bármely a_1, a_2, \dots, a_n valós számsorra teljesül az

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \dots (a_1 - a_n) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3) \dots (a_2 - a_n) + \dots \\ \dots + (a_n - a_1)(a_n - a_2) \dots (a_n - a_{n-1}) \geq 0.$$

egyenlőtlenség”.

1971/2. Adott egy 9 csúcsú konvex poliéder: P_1 ; csúcspontjai legyenek A_1, A_2, \dots, A_9 . Jelöljük P_i -vel azt a poliédert, amelyet P_1 -ből az $A_1 \rightarrow A_i$ eltolással kapunk ($i=2, 3, \dots, 9$). Bizonyítsuk be, hogy a P_1, P_2, \dots, P_9 poliéderek közül legalább kettőnek van közös belső pontja.

1971/3. Bizonyítsuk be, hogy a

$$\{2^n - 3\} \quad (n=2, 3, 4, \dots)$$

sorozat tartalmaz olyan végtelen részsorozatot, amelynek bármely két eleme relatív prím.

1971/4. Az $ABCD$ tetraéder mindegyik lapja hegyesszögű háromszög. Legyen X, Y, Z, T rendre az AB, BC, CD, DA él egy-egy belső pontja, és tekintsük az összes $XYZTX$ zárt törött vonalat.

Bizonyítsuk be, hogy

a) ha

$$(1) \quad DAB\angle + BCD\angle \neq ABC\angle + CDA\angle,$$

akkor az $XYZTX$ törött vonalak között nincs legrövidebb;

b) ha

$$(2) \quad DAB\angle + BCD\angle = ABC\angle + CDA\angle,$$

akkor az $XYZTX$ törött vonalak között végtelen sok legrövidebb van, azok mindegyike

$$2AC \sin \frac{\alpha}{2}$$

hosszúságú, ahol $\alpha = BAC\angle + CAD\angle + DAB\angle$.

1971/5. Bizonyítsuk be, hogy bármely természetes számot jelentsen is m , mindig van a síkban olyan véges, nem üres S ponthalmaz, amely a következő tulajdonságú:

Ha A az S ponthalmaz tetszőleges pontja, akkor S -ben pontosan m számú olyan pont van, amely A -tól egységnyi távolságra esik.

1971/6. Az n sorból és n oszlopból álló

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array}$$

négyzetes táblázat elemei nemnegatív egész számok. Ha a táblázat valamely eleme: $a_{ij} = 0$, akkor erre teljesül az

$$(1) \quad a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{in} + a_{1j} + a_{2j} + \dots + a_{nj} \geq n$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítsuk be, hogy e táblázat valamennyi elemének az összege nem kisebb

$$\frac{n^2}{2}\text{-nél.}$$

1972.

1972/1. Bizonyítsuk be, hogy bármely tíz — páronként különböző — kétjegyű természetes számból álló halmaznak mindig van két, közös elem nélküli részhalmaza, amelyben az elemek összege egyenlő egymással.

1972/2. Bizonyítsuk be, hogy minden húrnégyszög szétvágható n darab húrnégyszögre, ha n 4-nél nem kisebb természetes számot jelent.

1972/3. Legyenek m és n tetszőleges nemnegatív egész számok. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$$

egész szám. (Megállapodás szerint $0! = 1$).

1972/4. Adjuk meg az összes olyan, pozitív valós számokból álló $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ számötöst, amely kielégíti a következő egyenlőtlenségrendszert:

$$(1) \quad (x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) \leq 0,$$

$$(2) \quad (x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) \leq 0,$$

$$(3) \quad (x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) \leq 0,$$

$$(4) \quad (x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) \leq 0,$$

$$(5) \quad (x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) \leq 0.$$

1972/5. Legyenek f és g minden valós számra értelmezett valós függvények, amelyek kielégítik az

$$(1) \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y)$$

egyenletet. Bizonyítsuk be, hogy ha $f(x)$ nem azonosan nulla, és minden x -re $|f(x)| \leq 1$, akkor egyszersmind minden y -ra $|g(y)| \leq 1$.

1972/6. Adott négy különböző párhuzamos sík. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan szabályos tetraéder, amelynek az adott síkok mindegyikére esik csúcsa.

1973.

1973/1. Legyen O az e egyenes valamely pontja, $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \dots, \overrightarrow{OP_n}$ olyan egységvektorok, amelyeknek P_i végpontjai mind ugyanabban — az e egyenest tartalmazó — síkban helyezkednek el, mégpedig e -nek ugyanazon a partján. Bizonyítsuk be, hogy ha n páratlan, akkor

$$|\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \dots + \overrightarrow{OP_n}| \geq 1,$$

ahol $|\overrightarrow{OM}|$ jelöli az \overrightarrow{OM} vektor hosszát.

1973/2. Állapítsuk meg, vajon van-e a háromdimenziós térben olyan M pontthalmaz, amely véges számú, nem ugyanabba a síkba eső pontot tartalmaz és a következő tulajdonságú: a halmaz bármely két különböző A és B pontjához mindig található a halmaznak két pontja: C és D , hogy az AB és CD egyenesek párhuzamosak és különbözők.

1973/3. Állapítsuk meg $a^2 + b^2$ lehető legkisebb értékét, ha a és b olyan valós számokat jelentenek, amelyekre az

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

egyenletnek van legalább egy valós gyöke.

1973/4. Egy katonának meg kell győződnie arról, hogy valamely egyenlő oldalú háromszög alakú terep — határvonalát is beleértve — aknamentes-e. Észlelő berendezésének hatósugara egyenlő a háromszög magasságának a felével. A katona a háromszög egyik csúcspontjából indul el. Milyen utat kell választania, ha a terepet a legrövidebb úton haladva akarja átvizsgálni?

1973/5. Az x valós változónak $f(x) = ax + b$ alakú, nem állandó f függvényeiből álló valamely nem üres G halmaz a következő tulajdonságokkal rendelkezik (a és b valós állandók):

a) Ha $f, g \in G$, akkor $g \circ f \in G$, ahol $g \circ f(x) = g(f(x))$.

b) Ha $f \in G$, akkor f inverze: $f^{-1} \in G$, ahol $f(x) = ax + b$ inverze:

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}.$$

c) Minden egyes f -hez, amelyre $f \in G$, létezik olyan valós x_f , amelyre

$$f(x_f) = x_f$$

teljesül.

Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan k szám, amelyre a G halmaz minden f függvénye esetén

$$f(k) = k$$

teljesül.

1973/6. Legyenek a_1, a_2, \dots, a_n adott pozitív számok, q pedig a $0 < q < 1$ kettős egyenlőtlenségnek eleget tevő valós szám. Adjunk meg n olyan valós számot: b_1 -et, b_2 -t \dots , b_n -et, amelyek egyidejűleg kielégítik a következő feltételeket:

a) $a_k < b_k$, ($k = 1, 2, \dots, n$);

b) $q < \frac{b_{k+1}}{b_k} < \frac{1}{q}$, ($k = 1, 2, \dots, n-1$);

c) $b_1 + b_2 + \dots + b_n < \frac{1+q}{1-q} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$.

1974.

1974/1. Három játékos: A , B és C a következő játékot játssza: Három kártya mindegyikére egy-egy egész szám van írva, erre a három számra (p , q és r) $0 < p < q < r$ teljesül. A kártyákat összekeverik, majd szétosztják úgy, hogy mindegyik játékos kapjon egyet. Ezután a játékosoknak annyi golyót adnak, amennyit kártyájuk mutat. Utána összeszedik a kártyákat, a kapott golyók azonban a játékosoknál maradnak.

Ezt a játékot (a kártyák összekeverése és szétosztása, a golyók odaadása, a kártyák összeszedése) legalább kétszer játsszák végig. A utolsó játszma esetén A -nak 20, B -nek 10, míg C -nek 9 golyója van. Ezenkívül B azt is tudja, hogy ő az utolsó alkalommal r darab golyót kapott.

Kinek jutott először q darab golyó?

1974/2. Jelölje A, B, C rendre egy háromszög csúcsait; α, β és γ pedig ugyanebben a sorrendben a csúcsoknál levő szögek mérőszámát.

Bizonyítsuk be, hogy akkor és csakis akkor található az AB szakaszon olyan D pont, amelyre CD hossza az AD és DB szakaszok hosszának a mértani közepe, ha

$$(1) \quad \sin \alpha \cdot \sin \beta \leq \sin^2 \frac{\gamma}{2}.$$

1974/3. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} \cdot 2^{3k}$$

n semmilyen természetes egész értéke esetén sem osztható 5-tel.

1974/4. Egy 8×8 mezőből álló sakktáblát úgy vágunk szét p darab téglalapra, hogy egyetlen mezőt sem vágunk ketté. Minden ilyen szétvágásnak ki kell elégítenie a következő feltételeket:

a) Minden egyes téglalapnak ugyanannyi fehér mezőt kell tartalmaznia, mint feketét.

b) Ha a_i jelöli az i -edik téglalapban levő fehér mezők számát, akkor fenn kell állnia az $a_1 < a_2 < \dots < a_p$ egyenlőtlenség sorozatnak.

Keressük meg p -nek azt a legnagyobb értékét, amelyre létezik ilyen szétvágás. Továbbá: állítsuk elő p -nek ehhez az értékéhez tartozó valamennyi a_1, a_2, \dots, a_p sorozatot.

1974/5. Állapítsuk meg az

$$S = \frac{a}{d+a+b} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{c+d+a}$$

összeg értékkészletét, ha a, b, c és d tetszés szerinti pozitív számokat jelölnek.

1974/6. Legyen $P(x)$ egész együtthatós, nem állandó értékű polinom. Bizonyítsuk be, hogy ha $n(P)$ azoknak a különböző k egész számoknak a számát jelenti, amelyekre $(P(k))^2 = 1$, akkor

$$(1) \quad n(P) - \deg(P) \leq 2,$$

ahol $\deg(P)$ jelöli a $P(x)$ polinom fokszámát.

1975.

1975/1. Jelentsenek x_i és y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) olyan való számokat, amelyekre $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ és $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$.

Legyen továbbá z_1, z_2, \dots, z_n az y_1, y_2, \dots, y_n számok valamely elrendezése (permutációja). Bizonyítsuk be, hogy

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2.$$

1975/2. Jelentse a_1, a_2, a_3, \dots a pozitív egész számoknak olyan végtelen sorozatát, amelyre $a_k < a_{k+1}$.

Bizonyítsuk be, hogy ennek a sorozatnak végtelen sok eleme írható

$$a_m = xa_p + ya_q$$

alakban, ahol x és y pozitív egész számok és $p \neq q$.

1975/3. Egy tetszés szerinti ABC háromszög oldalaira úgy szerkesztettük meg kifelé a BPC , CQA és ARB háromszögeket, hogy

$$\angle PBC = \angle CAQ = 45^\circ$$

$$\angle BCP = \angle QCA = 30^\circ$$

$$\angle ABR = \angle BAR = 15^\circ.$$

Bizonyítsuk be, hogy $\angle QRP = 90^\circ$ és $QR = RP$.

1975/4. Legyen A a tízes számrendszerben felírt 4444^{4444} szám számjegyeinek az összege, B pedig A számjegyeinek az összege.

Számítsuk ki B számjegyeinek az összegét.

1975/5. Döntsük el, kiválasztható-e az egységkörön 1975 pont úgy, hogy közülük bármely kettő által meghatározott húr hossza racionális szám legyen.

1975/6. Állítsunk elő minden olyan kétváltozós polinomot, amelyek kielégítik a következő feltételeket:

I. Minden valós t, x, y számra $P(tx, ty) = t^n P(x, y)$, ahol n pozitív egész, azaz P homogén és n -edfokú.

II. Minden valós a, b, c szám esetén fennáll, hogy $P(a+b, c) + P(b+c, a) + P(c+a, b) = 0$.

III. $P(1, 0) = 1$.

1976.

1976/1. Egy síkbeli konvex négyszög területe 32 cm^2 , egyik átlójának és két egymással szemközti oldalának összege 16 cm . Állapítsuk meg e négyszög másik átlójának minden lehetséges hosszát.

1976/2. Legyen $P_1(x) = x^2 - 2$; $P_j(x) = P_1(P_{j-1}(x))$; $j = 2, 3, \dots$. Bizonyítsuk be, hogy n tetszés szerinti pozitív egész értéke esetén a $P_n(x) = x$ egyenletnek minden gyöke valós és páronként egymástól különböző.

1976/3. Egy téglalakú doboz teljesen kitölthető egységnyi élű kockákkal. Ha úgy helyezzük bele a lehető legtöbb, 2 egységnyi térfogatú kockát, hogy azok élei rendre párhuzamosak legyenek a doboz élével, akkor a doboz belső terének pontosan 40%-át töltik ki.

Állapítsuk meg az összes lehetséges, ilyen tulajdonságú doboz élének a hosszát. ($\sqrt[3]{2} = 1,2599 \dots$).

1976/4. Számítsuk ki olyan pozitív egész számok szorzatának a maximumát, amelyek összege 1976.

1976/5. Adott a következő p egyenletből álló $q = 2p$ ismeretlent tartalmazó egyenletrendszer:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1q}x_q = 0,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2q}x_q = 0,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pq}x_q = 0,$$

ahol $a_{ij} \in \{0, 1, -1\}$ ($i = 1, 2, \dots, p$, $j = 1, 2, \dots, q$).

Bizonyítsuk be, hogy az egyenletrendszernek van olyan x_1, x_2, \dots, x_q megoldása, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

a) az x_1, x_2, \dots, x_q számok egészek;

b) az x_j számok között van nem 0 ($j = 1, 2, \dots, q$);

c) $|x_j| \leq q$ ($j = 1, 2, \dots, q$).

1976/6. Egy u_0, u_1, \dots számsorozatot a következőképpen értelmezzünk:
 $u_0 = 2$, $u_1 = \frac{5}{2}$, $u_{n+1} = u_n(u_{n-1}^2 - 2) - u_1$ ($n = 1, 2, \dots$). Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$[u_n] = 2^{\frac{2^n - (-1)^n}{3}} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

1977.

1977/1. Az $ABCD$ négyzet oldalaira befelé megrajzoltuk az ABK , BCL , CDM és DAN egyenlő oldalú háromszögeket.

Bizonyítsuk be, hogy a KL , LM , MN , NK szakaszok felezőpontjai az AK , BK , BL , CL , CM , DM , DN és AN szakaszok felezőpontjaival együtt egy szabályos tizenkétszög csúcspontjai.

1977/2. Egy valós számokból álló véges sorozatban bármely 7 közvetlenül egymást követő tag összege negatív, míg bármely 11 közvetlenül egymást követő tag összege pozitív.

Állapítsuk meg egy ilyen sorozatban a tagok számának a maximumát.

1977/3. Legyen n adott, 2-nél nagyobb természetes szám. Jelöljük V_n -nel az $1 + kn$ alakú számok halmazát, ahol $k = 1, 2, \dots$. Egy $m \in V_n$ számot V_n -ben felbonthatatlannak mondunk, ha nincsenek olyan $p, q \in V_n$ számok, amelyekre $pq = m$. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $r \in V_n$ szám, amely több mint egyféleképpen állítható elő V_n -ben felbonthatatlan számok szorzataként.

1977/4. Legyenek a, b ; A és B adott valós számok, továbbá legyen

$$(1) \quad f(x) = 1 - a \cos x - b \sin x - A \cos 2x - B \sin 2x.$$

Ismeretes, hogy x minden valós értéke esetén $f(x) \geq 0$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$(2) \quad a^2 + b^2 \leq 2, \quad A^2 + B^2 \leq 1.$$

1977/5. Legyenek a és b pozitív egész számok. Ha $(a^2 + b^2)$ -et elosztjuk $(a + b)$ -vel, a hányados q , a maradék pedig r lesz.

Állapítsuk meg az összes olyan (a, b) számpárt, amelyre

$$(1) \quad q^2 + r = 1977.$$

1977/6. Legyen f olyan függvény, amely a pozitív egészek halmazán van értelmezve és függvényértékei is pozitív egészek. Minden pozitív egész n -re teljesül az

$$(1) \quad f(n+1) > f(f(n))$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n -re

$$f(n) = n.$$

1978.

1978/1. Az m és n természetes számokra $n > m > 1$. Az 1978^m és az 1978^n tízes számrendszerbeli alakjában az utolsó három jegy sorrendben is megegyezik. Keressük meg azt az m -et és n -et, amelyre $m+n$ a legkisebb.

1978/2. Egy gömb belsejében adott egy P pont. A gömb felületén úgy helyezkednek el az A, B, C pontok, hogy PA, PB, PC páronként merőlegesek egymásra. Legyen a PA, PB, PC által meghatározott téglatestnek P -vel szemkötti csúcsa Q . Mi a Q pontok mértani helye?

1978/3. A pozitív egész számok halmaza megegyezik az

$$F = \{f(1), f(2), \dots, f(n), \dots\} \text{ és a}$$

$$G = \{g(1), g(2), \dots, g(n), \dots\}$$

közös elem nélküli halmazok egyesítésével, ahol

$$f(1) < f(2) < \dots < f(n) < \dots \text{ és } g(1) < g(2) < \dots < g(n) < \dots,$$

$$(1) \quad g(n) = f(f(n)) + 1 \text{ minden } n \geq 1\text{-re.}$$

Határozzuk meg $f(240)$ értékét.

1978/4. Az ABC háromszögben $AB = AC$. Egy kör belülről érinti az ABC háromszög köré írt kört, továbbá az AB oldalt a P , az AC oldalt a Q pontban. Bizonyítsuk be, hogy a PQ szakasz felezőpontja az ABC háromszög beírt körének a középpontja.

1978/5. Álljon az $\{a_k\}$ sorozat ($k = 1, 2, \dots, n, \dots$) különböző pozitív egész számokból. Bizonyítsuk be, hogy minden n pozitív egészre

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

1978/6. Egy nemzetközi társaságnak 1978 tagja van 6 különböző országból. A tagokat 1-től 1978-ig számozták meg. Mutassuk meg, hogy van legalább egy olyan tag, akinek a sorszáma megegyezik két honfitársa sorszámának az összegével, vagy kétszer akkora, mint egy honfitársa sorszáma.

1979.

1979/1. Legyenek p és q olyan pozitív egészek, amelyekre fennáll, hogy

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}.$$

Bizonyítsuk be, hogy p osztható 1979-cel.

1979/2. Egy ötoldalú hasáb alaplapja az $A_1A_2A_3A_4A_5$, fedőlapja a $B_1B_2B_3B_4B_5$ ötszög. E két ötszög mindegyik oldalát, továbbá valamennyi A_iB_j szakaszt ($i, j = 1, 2, \dots, 5$) pirosra vagy zöldre színezzük. Minden olyan háromszögnek, amelynek csúcsai egyúttal a hasáb csúcsai is és amelynek mindegyik oldala színezett, van két különböző színű oldala. Mutassuk meg, hogy ekkor az alaplapnak és a fedőlapnak összesen tíz oldala mind egyforma színű.

1979/3. Adott a síkon két egymást metsző körvonal, k_1 és k_2 ; jelölje A az egyik metszéspontjukat. Két tömegpont: P_1 és P_2 mozog k_1 -en, illetve k_2 -n állandó szögsebességgel ugyanabban a forgási irányban. Mozgásukat egy időben kezdik az A pontban és egy-egy körüljárás után ismét egyidejűleg érkeznek az A pontba.

Bizonyítsuk be, hogy van a síkban olyan rögzített P pont, amelyre a mozgás minden időpontjában érvényes a $PP_1 = PP_2$ egyenlőség.

1979/4. Adott a π síkon egy P pont és a π síkon kívül egy Q pont. Határozzuk meg a π síknak valamennyi olyan R pontját, amelyre a

$$(1) \quad \frac{QP + PR}{QR}$$

hányados értéke maximális.

1979/5. Határozzuk meg az összes b valós számot, amelyhez léteznek a

$$(1) \quad \sum_{k=1}^5 kx_k = b, \quad \sum_{k=1}^5 k^3 x_k = b^2, \quad \sum_{k=1}^5 k^5 x_k = b^3$$

egyenleteket kielégítő x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 nemnegatív valós számok.

1979/6. Legyen A és E egy szabályos nyolcszög két szemközti csúcsa. Egy béka az A csúcsból elindulva kezd ugrálni. A nyolcszög bármely csúcsából — az E -t kivéve — az egyik szomszédos csúcsba ugorhat. Ha az E csúcsba ér, akkor megáll és ott marad. Legyen a_n a pontosan n ugrásból álló különböző utak száma.

Bizonyítsuk be, hogy

$$a_{2n-1} = 0, \quad a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}} (x^{n-1} - y^{n-1}) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ahol $x = 2 + \sqrt{2}$ és $y = 2 - \sqrt{2}$.

1980.

Nem rendeztek Nemzetközi Matematikai Diákolimpiát.

1981.

1981/1. Legyen P egy adott ABC háromszög belső pontja. P -ből a BC , CA , AB egyenesekre állított merőlegesek talppontja rendre D , E , F . Határozzuk meg az összes olyan P pontot, amelyre a

$$(1) \quad \frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$$

összeg a legkisebb.

1981/2. Tekintsük a $H_n = \{1, 2, \dots, n\}$ halmaz összes r elemű részhalmazát, ahol $1 \leq r \leq n$. Vegyük e részhalmazok mindegyikéből a legkisebb elemet, és jelölje ezeknek a számtani közepét $F(n, r)$. Bizonyítsuk be, hogy

$$F(n, r) = \frac{n+1}{r+1}.$$

1981/3. Határozzuk meg $m^2 + n^2$ legnagyobb értékét, ha m és n olyan egész számokat jelölnek, amelyekre $m, n \in \{1, 2, \dots, 1981\}$ és

$$(1) \quad (n^2 - nm - m^2)^2 = 1.$$

1981/4. a) Mely $n > 2$ esetén van n egymást követő pozitív egész számból álló olyan halmaz, amelynek legnagyobb eleme osztója a többi $n - 1$ elem legkisebb közös többszörösének?

b) Mely 2-nél nagyobb egész számok esetén van pontosan egy olyan halmaz, amely a fenti tulajdonságú?

1981/5. Egy adott háromszög belsejében három egyenlő sugarú kör helyezkedik el és egy közös O pontjuk van. Mindegyik érinti a háromszög más-más oldalpárját. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög beírt körének középpontja, körülírt körének középpontja és O egy egyenesen vannak.

1981/6. Az $f(x, y)$ függvény minden nem negatív egész x, y esetén kielégíti az

$$(1) \quad f(0, y) = y + 1,$$

$$(2) \quad f(x + 1, 0) = f(x, 1),$$

$$(3) \quad f(x + 1, y + 1) = f(x, f(x + 1, y))$$

értékeket. Számítsuk ki $f(4, 1981)$ értékét.

1982.

1982/1. Az f függvény a pozitív egész n számokon van értelmezve, értékei nemnegatív egész számok. Minden n, m értékre

$$(1) \quad f(m+n) - f(m) - f(n) = 0 \quad \text{vagy} \quad 1,$$

$$(2) \quad f(2) = 0, \quad f(3) > 0,$$

$$(3) \quad f(9999) = 3333.$$

Meghatározandó $f(1982)$.

1982/2. Az $A_1A_2A_3$ háromszög nem egyenlő szárú. A_i -vel szemközti oldalát jelölje a_i , a_i felezőpontját M_i ($i = 1, 2, 3$). A beírt kör az a_i oldalt T_i -ben érinti, T_i tükörképe az A_i -hez tartozó belső szögfelezőre S_i . Bizonyítsuk be, hogy az M_1S_1, M_2S_2, M_3S_3 egyenesek egy ponton mennek át.

1982/3. A pozitív számok $\{x_i\}$ sorozata nem növekvő és $x_0 = 1$.

a) Bizonyítandó, hogy minden ilyen sorozathoz van olyan $n \geq 1$, amelyre

$$(1) \quad S_n = \frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geq 3,999.$$

b) Adjunk meg egy ilyen sorozatot, amelyre minden n esetén

$$S_n = \frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} < 4.$$

1982/4. Bizonyítsuk be, hogy ha n olyan pozitív egész, amelyre az

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$$

egyenletnek van egész számokból álló (x, y) megoldása, akkor van legalább három ilyen megoldása. Mutassuk meg, hogy az egyenletnek nincs egész megoldása, ha $n = 2891$.

1982/5. Az $ABCDEF$ szabályos hatszög AC és CE átlóit a belső M , illetve N pont úgy osztja fel, hogy

$$(1) \quad \frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = r.$$

Határozzuk meg r -et, ha tudjuk, hogy B, M és N egy egyenesen fekszik.

1982/6. Legyen S egy négyzet, amelynek oldalhosszúsága 100 és L egy S -ben fekvő, önmagát nem metsző töröttvonal, amely az $A_0A_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ szakaszokból áll, ahol $A_0 \neq A_n$. Tegyük fel, hogy az S négyzet határának minden P pontjához van L -nek olyan pontja, amelynek P -től való távolsága nem nagyobb $1/2$ -nél. Bizonyítandó, hogy van L -en olyan X és Y pont, amelyeknek távolsága nem nagyobb 1-nél és L -nek X és Y közötti része legalább 198 hosszúságú.

1983.

1983/1. Határozzuk meg a pozitív valós számok halmazán értelmezett összes olyan pozitív értékű f függvényt, amely kielégíti a következő feltételeket:

$$(1) \quad f(xf(y)) = yf(x)$$

minden pozitív x, y számra;

$$(2) \quad f(x) \rightarrow 0, \quad \text{ha } x \rightarrow \infty.$$

1983/2. Az egy síkban fekvő O_1 középpontú C_1 és O_2 középpontú C_2 körök sugarai különbözők, de metszik egymást; egyik metszéspontjuk A . Közös érintőik C_1 -et P_1 -ben, illetve Q_1 -ben, C_2 -t P_2 -ben, illetve Q_2 -ben érintik. P_1Q_1 felezőpontja M_1 , P_2Q_2 felezőpontja M_2 . Bizonyítsuk be, hogy $O_1AO_2 \sphericalangle = M_1AM_2 \sphericalangle$.

1983/3. Legyenek a, b, c páronként relatív prím pozitív egész számok. Mutassuk meg, hogy

$$2abc - ab - bc - ca$$

az a legnagyobb egész szám, amely nem írható fel

$$(1) \quad xbc + yca + zab$$

alakban, ahol x, y, z nemnegatív egész számokat jelölnek.

1983/4. Legyen E egy ABC egyenlő oldalú háromszög oldalain levő pontoknak a halmaza. Igaz-e, hogy bármilyen módon osztjuk is fel E -t két diszjunkt részhalmazra, ezeknek a részhalmazoknak legalább az egyikében van három olyan pont, amelyek egy derékszögű háromszög csúcsai?

1983/5. Kiválasztható-e a 10^5 -nél nem nagyobb pozitív egész számok halmazából 1983 különböző szám úgy, hogy közülük semelyik három se legyen valamely számtani sorozat három egymás utáni eleme?

1983/6. Jelölje a, b, c egy háromszög három oldalának a hosszát. Bizonyítsuk be, hogy

$$(1) \quad a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0.$$

1984.

1984/1. Legyenek x, y és z olyan nemnegatív számok, amelyekre

$$(1) \quad x + y + z = 1$$

fennáll. Bizonyítandó, hogy

$$(2) \quad 0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}.$$

1984/2. Adjunk meg olyan pozitív egész számokból álló a, b számpárt, amely eleget tesz a következő feltételeknek:

(1) $ab(a+b)$ nem osztható 7-tel;

(2) $(a+b)^7 - a^7 - b^7$ osztható 7^7 -nel.

1984/3. Adott a síkon két különböző pont: O és A . Jelentse $\omega(X)$ a sík minden $X \neq O$ pontjára nézve az AOX pozitív forgásirányban mért ívmértékét ($0 \leq \omega(X) < 2\pi$). Jelölje továbbá $C(X)$ azt a körvonalat, amelynek középpontja O , sugarának hossza pedig $OX + \frac{\omega(X)}{OX}$. Legyen adva véges sok szín, és színezzük ki a sík minden pontját ezek egyikével. Bizonyítsuk be, hogy van olyan Y pont, amelyre $\omega(Y) > 0$, és amelynek színe előfordul a $C(Y)$ körvonalon.

1984/4. Legyen az $ABCD$ konvex négyszögben a CD egyenes érintője az AB átmérőjű körnek. Bizonyítsuk be, hogy az AB egyenes akkor és csak akkor érinti a CD átmérőjű kört, ha a BC és AD egyenesek párhuzamosak.

1984/5. Egy síkbeli konvex n -szög ($n > 3$) kerülete p , összes átlója hosszának az összege d . Bizonyítsuk be, hogy

$$(1) \quad n - 3 < \frac{2d}{p} < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - 2.$$

1984/6. Legyenek a, b, c, d olyan páratlan egész számok, amelyekre

$$(1) \quad 0 < a < b < c < d,$$

$$(2) \quad ad = bc,$$

$$(3) \quad a + d = 2^k, \quad b + c = 2^m$$

teljesül, ahol k és m alkalmas egész számok. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $a = 1$.

1985.

1985/1. Egy kör, amelynek középpontja az $ABCD$ konvex négyszög AB oldalán van, érinti a másik három oldalt. Mutassuk meg, hogy ha $ABCD$ húrnégyszög, akkor

$$AD + BC = AB.$$

1985/2. Legyen n pozitív egész, k pedig egy rögzített, n -hez relatív prím egész ($1 \leq k \leq n-1$), és legyen az M halmaz $M = \{1, 2, \dots, n-1\}$. M elemeit fehérre és kékre színezzük a következők figyelembe vételével:

- (a) minden $i \in M$ -re i és $n-i$ egyszínűek,
 (b) minden $i \in M$ -re, amelyre $i \neq k$, i és $|k-i|$ egyszínűek.

Bizonyítandó, hogy M minden eleme ugyanolyan színű.

1985/3. Minden egész együtthatós $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k$ polinomban jelöljük $\omega(P)$ -vel a páratlan együtthatók számát. Legyen továbbá $Q_i(x) = (1+x)^i$, ahol $i = 0, 1, 2, \dots$

Bizonyítsuk be, hogy ha i_1, i_2, \dots, i_n olyan egész számok, amelyek kielégítik a $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n$ feltételt, akkor

$$(1) \quad \omega(Q_{i_1} + Q_{i_2} + \dots + Q_{i_n}) \geq \omega(Q_{i_1}).$$

1985/4. Az M halmaz 1985 különböző pozitív egészből áll, amelyek egyikek sincs 26-nál nagyobb prímosztója. Bizonyítsuk be, hogy M -nek van négy olyan eleme, amelyeknek szorzata egyenlő egy egész szám negyedik hatványával.

1985/5. Az O_1 középpontú k_1 kör átmegy az ABC háromszög A és C csúcán, továbbá még egyszer metszi az AB , illetve BC oldalakat az egymástól különböző K , illetve N pontokban. Legyen k_2 a KBN háromszög köré írt kör, ezt az ABC köré írt k kör pontosan két különböző pontban metszi: B -ben és M -ben. Bizonyítsuk be, hogy $O_1MB \angle = 90^\circ$.

1985/6. Minden x_1 valós számmal állítsuk elő az x_1, x_2, \dots, x_n sorozatot, amelyben

$$(1) \quad x_{n+1} = x_n \left(x_n + \frac{1}{n} \right)$$

minden 1-nél nem kisebb n természetes számra.

Bizonyítsuk be, hogy ekkor x_1 -nek pontosan egy olyan értéke van, amelyre a

$$0 < x_n < x_{n+1} < 1$$

egyenlőtlenség-lánc minden pozitív egész n -re teljesül.

1986.

1986/1. Legyen d olyan pozitív egész, amely nem egyenlő sem 2-vel, sem 5-tel, sem 13-mal. Mutassuk meg, hogy a $\{2, 5, 13, d\}$ halmazban van két olyan különböző elem: a, b , amelyekre $ab - 1$ nem négyzetszám.

1986/2. Adott a síkban egy $A_1A_2A_3$ háromszög és egy P pont. Bevezetjük a következő jelölést: $A_s = A_{s-3}$ valahányszor $s \geq 4$.

Előállítjuk a P_0, P_1, P_2, \dots pontsorozatot, amelyben P_{k+1} a P_k -nak az A_{k+1} körüli -120° -os elforgatásával keletkező képe ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Mutassuk meg, hogy ha $P_{1986} = P_0$, akkor az $A_1A_2A_3$ háromszög szabályos.

1986/3. Egy szabályos ötszög minden csúcspontjához oly módon rendelünk egy-egy egész számot, hogy ennek az öt számnak az összege pozitív legyen. Ha e közül az öt pont közül három egymás után következőt rendre X -szel, Y -nal, illetve Z -vel jelölünk, a hozzájuk rendelt számokat pedig (ugyanabban a sorrendben) x -szel, y -nal, illetve z -vel jelöljük, ahol $y < 0$, akkor megengedett a következő művelet:

Az x, y , illetve z számok helyébe (ugyanabban a sorrendben) az $x + y, -y, z + y$ számokat írjuk. Ezt a műveletet mindaddig megismételjük, amíg csak egy negatív y előfordul.

Döntsük el, vajon minden esetben befejeződik-e ez az eljárás véges számú lépés után.

1986/4. Legyenek A és B egy O középpontú szabályos n -szög szomszédos csúcsai ($n \geq 5$). Egy, az OAB háromszöggel egybevágó XYZ háromszöggel először lefedjük az OAB -t, majd az XYZ háromszöget a sokszög belsejében úgy mozgatjuk, hogy az Y és Z pontok állandóan a sokszög oldalain legyenek.

Milyen alakzatot ír le X , ha Y és Z befutja az n -szög határát?

1986/5. Határozzuk meg az összes olyan f függvényt, amely a nemnegatív valós számok halmazán van értelmezve, csak nemnegatív értéket vesz fel, és teljesíti a következő feltételeket:

$$(a) f(x \cdot f(y)) \cdot f(y) = f(x + y) \text{ minden nemnegatív } x\text{-re és } y\text{-ra;}$$

$$(b) f(2) = 0;$$

$$(c) f(x) \neq 0, \text{ ha } 0 \leq x < 2.$$

1986/6. Adott a síkon rácspontoknak egy véges halmaza. Döntsük el, vajon lehetséges-e minden esetben ezek közül a pontok közül néhányat pirosra, a többit pedig fehérre színezni úgy, hogy minden olyan egyenesen, amely párhuzamos valamelyik koordináta-tengellyel, a rajta levő piros pontok száma legfeljebb 1-gyel térjen el az ugyancsak rajta levő fehér pontok számától. (A rács itt négyzetrácsot jelent.)

1987.

1987/1. Legyen $S = \{1, 2, \dots, n\}$ ($n \geq 1$). Jelölje $p_n(k)$ az S olyan permutációinak a számát, melyeknek pontosan k fixpontja van. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{k=0}^n k p_n(k) = n!$$

(S egy permutációjának az i -edik elemét fixpontnak mondjuk, ha az i -vel egyenlő; $i = 1, 2, \dots, n$).

1987/2. Az ABC hegyesszögű háromszög A csúcsából induló belső szögfelező a BC oldalt az L pontban, a háromszög köré írt kört másodszor az N pontban metszi. L -ből az AB egyenesre emelt merőleges talppontja K , az AC egyenesre emelt merőlegesé pedig M . Bizonyítsuk be, hogy az $AKNM$ négyszög és az ABC háromszög területe egyenlő.

1987/3. Az x_1, x_2, \dots, x_n valós számokra teljesül az

$$(1) \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$$

egyenlőség. Bizonyítsuk be, hogy minden 2-nél nem kisebb k természetes számhoz található olyan a_i egész számok ($i = 1, 2, \dots, n$), amelyek nem mind egyenlők 0-val, $|a_i| \leq k - 1$ valamennyi i -re, és érvényes rájuk az alábbi egyenlőtlenség:

$$(2) \quad |a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n| \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}.$$

1987/4. Bizonyítsuk be, hogy nincs a nemnegatív egészek halmazán értelmezett olyan f függvény, amelynek értéke is nemnegatív egész, és minden n -re kielégíti az

$$(1) \quad f(f(n)) = n + 1987$$

egyenletet.

1987/5. Legyen n 3-nál nem kisebb természetes szám. Bizonyítsuk be, hogy létezik a síkban n olyan pont, amelyek közül bármely kettőnek a távolsága irracionális, és közülük bármely három olyan nem elfajuló háromszöget alkot, amelynek területe racionális.

1987/6. Legyen n 2-nél nem kisebb egész szám. Bizonyítsuk be, hogy ha $k^2 + k + n$ értéke prímszám minden olyan k egészre, amelyre $0 \leq k \leq \sqrt{\frac{n}{3}}$ teljesül, akkor $k^2 + k + n$ értéke minden olyan k -ra is prím, amely kielégíti a $0 \leq k \leq n - 2$ feltételt.

1988.

1988/1. Adott a síkon két, azonos középpontú kör, amelyek sugara R , ill. r ($R > r$). P a kisebb kör egy rögzített pontja, B pedig végigfut a nagyobb körön. A BP egyenes másik metszéspontja a nagyobb körrel C . A BP -re P -ben állított l merőleges másik metszéspontja a kisebb körrel A (ha l a kör érintője, legyen $A = P$).

I. Határozzuk meg a $BC^2 + CA^2 + AB^2$ által felvett értékek halmazát.

II. Határozzuk meg az AB szakasz felezőpontjának a mértani helyét.

1988/2. Legyen n pozitív egész szám, és legyenek $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$ a B halmaz részhalmazai. Tegyük fel, hogy

a) mindegyik A_i -nek pontosan $2n$ eleme van,

b) mindegyik $A_i \cap A_j$ metszetnek ($1 \leq i < j \leq 2n+1$) pontosan egy eleme van,

c) a B halmaz minden eleme benne van legalább két A_i -ben.

n milyen értékeire rendelhető hozzá B minden eleméhez a 0 és 1 számok egyike úgy, hogy minden A_i -nek pontosan n olyan eleme legyen, amelyhez 0-t rendeltünk?

1988/3. Az f függvényt a pozitív egészek halmazán értelmezzük a következő módon:

$$(1) \quad f(1) = 1, \quad f(3) = 3,$$

$$(2) \quad f(2n) = n,$$

$$(3) \quad f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n),$$

$$(4) \quad f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n)$$

minden pozitív egész n -re.

Határozzuk meg azoknak az n -eknek a számát, amelyek az $1 \leq n \leq 1988$, $f(n) = n$ feltételeket kielégítik.

1988/4. Bizonyítsuk be, hogy a

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geq \frac{5}{4}$$

egyenlőtlenségnek eleget tevő valós x számok halmaza diszjunkt intervallumok egyesítése, amelyek összhossza 1988.

1988/5. A derékszögű ABC háromszög A csúcsából a BC átfogóhoz vezető magasság talppontja D . Az ABD és ACD háromszögek beírt köreinek középpontját összekötő egyenes az AB , ill. AC befogókat K -ban, ill. L -ben metszi. Jelölje S , ill. T az ABC , ill. AKL háromszögek területét. Bizonyítsuk be, hogy $S \geq 2T$.

1988/6. Legyenek a és b olyan pozitív egészek, amelyekre $ab+1$ osztója a^2+b^2 -nek. Bizonyítsuk be, hogy

$$(1) \quad \frac{a^2+b^2}{ab+1}$$

egész szám négyzete.

1989.

1989/1. Bizonyítsuk be, hogy az $\{1, 2, \dots, 1989\}$ halmaz előáll 117 darab olyan diszjunkt (közös elem nélküli) A_1, A_2, \dots, A_{117} halmaz egyesítéseként, amelyekre teljesül, hogy

- a) mindegyiküknek 17 eleme van,
- b) mindegyikükben ugyanannyi az elemek összege.

1989/2. A hegyesszögű ABC háromszög A -ból, B -ből és C -ből induló belső szögfelezői rendre az A_1, B_1 , ill. C_1 pontban metszik a háromszög körülírt körét. Az AA_1 egyenest az A_0 pontban metszi a B és C -beli külső szögfelező és hasonlóan kapjuk a B_0 és az C_0 pontokat.

Bizonyítsuk be, hogy

- a) az $A_0B_0C_0$ háromszög területe egyenlő az $AC_1BA_1CB_1$ hatszög területének kétszeresével;
- b) az $A_0B_0C_0$ háromszög területe legalább négyszer akkora, mint az ABC háromszög területe.

1989/3. Legyenek az n és a k adott pozitív egész számok, az S pedig olyan n elemű síkbeli ponthalmaz, amelynek

- a) semelyik három pontja nincs egy egyenesen;
- b) az S halmaz minden P pontjához található legalább k darab S -beli pont, amelyek mind egyenlő távolságra vannak a P ponttól.

Bizonyítsuk be, hogy

$$k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}.$$

1989/4. A konvex $ABCD$ négyszög AB , BC és AD oldalaira teljesül, hogy $AB = AD + BC$. A négyszög belsejében úgy helyezkedik el a P pont, hogy $AP = h + AD$ és $BP = h + BC$, ahol h éppen a P pontnak a CD egyenestől mért távolsága.

Bizonyítsuk be, hogy

$$(1) \quad \frac{1}{\sqrt{h}} \geq \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}.$$

1989/5. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n -hez található n darab szomszédos pozitív egész szám úgy, hogy egyikük sem egyenlő egy prímszám pozitív egész kitevőjű hatványával.

1989/6. Az $1, 2, \dots, 2n-1, 2n$ számok egy $x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, x_{2n}$ permutációját nevezzük jónak, ha van olyan $i \in \{1, 2, \dots, 2n-1\}$, amelyre $|x_i - x_{i+1}| = n$.

Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n -re az $1, 2, \dots, 2n-1, 2n$ számok összes permutációjának több, mint a fele jó.

1990.

1990/1. Egy adott kör AB, CD húrjai a kör belsejében levő E pontban metszik egymást. Legyen M az EB szakasz egy belső pontja; a D, E, M pontokon átmenő körhöz E -ben húzott érintő messe a BC , ill. AC egyeneseket az F , ill. G pontban.

Ha $\frac{AM}{AB} = t$, fejezzük ki a $\frac{GE}{EF}$ hányadost t segítségével.

1990/2. Legyen $n \geq 3$ és tekintsünk egy E halmazt, amely egy kör kerületén levő $2n-1$ számú különböző pontból áll. Tegyük fel, hogy e pontok közül pontosan k számút feketére színezzünk. Egy ilyen színezést „jó”-nak nevezünk, ha található két olyan fekete pont, hogy az általuk meghatározott két körív legalább egyikének a belseje pontosan n számú E -beli pontot tartalmaz.

Határozzuk meg a legkisebb olyan k értéket, amelyre igaz, hogy E bármely k pontját színezzük is ki, a színezés „jó”.

1990/3. Határozzuk meg az összes olyan $n > 1$ egész számot, amelyre $\frac{2^n + 1}{n^2}$ is egész szám.

1990/4. Jelölje \mathbf{Q}^+ a pozitív racionális számok halmazát. Adjunk példát olyan $\mathbf{Q}^+ \rightarrow \mathbf{Q}^+$ függvényre, amelyre

$$(1) \quad f(x \cdot f(y)) = \frac{f(x)}{y}$$

teljesül minden $x, y \in \mathbf{Q}^+$ esetén.

1990/5. Egy $n_0 > 1$ egész számból kiindulva két játékos, A és B felváltva neveznek meg n_1, n_2, n_3, \dots egész számokat, az alábbi szabályokat betartva.

Ha n_{2k} már meg van nevezve, A tetszése szerint választ egy n_{2k+1} egész számot, amire

$$n_{2k} \leq n_{2k+1} \leq n_{2k}^2$$

teljesül. Ha már n_{2k+1} meg van nevezve, B tetszése szerint választ egy n_{2k+2} egész számot, amire

$$\frac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}}$$

legalább 1 kitevőjű prímhatvány. Az A játékos nyer, ha 1990-et nevezi meg, B játékos nyer, ha 1-et nevezi meg.

Mely n_0 értékekre teljesül:

- A -nak van nyerő stratégiája,
- B -nek van nyerő stratégiája,
- egyik játékos sem tudja kikényszeríteni a győzelmet?

1990/6. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan konvex 1990-szög, amelyik rendelkezik az alábbi két tulajdonsággal:

- A sokszög minden szöge egyenlő.
- Az oldalak hosszai az $1^2, 2^2, \dots, 1989^2, 1990^2$ számok valamilyen sorrendben.

1991.

1991/1. Jelöljük az ABC háromszög beírt körének középpontját I -vel, a $CAB\triangleleft$, $ABC\triangleleft$, $BCA\triangleleft$ szögek szögfelezőinek metszéspontját a szemközti oldalakkal pedig rendre A' , B' , C' -vel. Bizonyítsuk be, hogy

$$(1) \quad \frac{1}{4} < \frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \leq \frac{8}{27}.$$

1991/2. Legyen $n > 6$ egész szám és a_1, a_2, \dots, a_k az összes olyan pozitív egész, amely kisebb n -nél és relatív prím n -hez. Tegyük fel, hogy

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_k - a_{k-1} > 0.$$

Bizonyítsuk be, hogy ekkor n prímszám, vagy 2-nek egész kitevős hatványa.

1991/3. Legyen $S = \{1, 2, 3, \dots, 280\}$. Határozzuk meg azt a legkisebb n egész számot, amelyre igaz, hogy S minden n -elemű részhalmaza tartalmaz 5 olyan számot, amelyek páronként relatív prímek.

1991/4. Legyen a G összefüggő gráf éleinek száma k . Bizonyítsuk be, hogy meg lehet az éleket számozni az $1, 2, 3, \dots, k$ számokkal úgy, hogy minden olyan csúcs esetén, amelyből legalább két él indul ki, az illető csúcsokból kiinduló összes élhez rendelt számok legnagyobb közös osztója 1.

(Gráfnak nevezzük a csúcsnak mondott pontok egy halmazát, amelyben a két különböző csúcsból álló párok némelyikét élek kötik össze. Bármely két különböző u, v csúcs között legfeljebb egy él halad. A G gráf összefüggő, ha bármely két különböző x, y csúcshoz található a csúcsoknak egy olyan $x = v_0, v_1, \dots, v_m = y$ sorozata, hogy minden v_i, v_{i+1} ($0 \leq i < m$) csúcspárt él köt össze.)

1991/5. Legyen P az ABC háromszög belső pontja. Bizonyítsuk be, hogy a PAB , PBC , PCA szögek közül legalább az egyik nem nagyobb 30° -nál.

1991/6. A valós számok egy x_0, x_1, \dots sorozatát korlátosnak nevezik, ha létezik olyan C konstans, hogy $|x_i| \leq C$ minden $i \geq 0$ -ra.

Minden rögzített $a > 1$ valós számhoz konstruáljunk olyan korlátos, végtelen x_0, x_1, x_2, \dots sorozatot, amelyre

$$(1) \quad |x_i - x_j| \cdot |i - j|^a \geq 1$$

teljesül bármely két különböző, nemnegatív i, j egészre.

1992.

1992/1. Határozzuk meg az összes olyan a, b, c egész számot, amelyekre $1 < a < b < c$ és $(a-1)(b-1)(c-1)$ osztója $abc-1$ -nek.

1992/2. Jelölje \mathbf{R} a valós számok halmazát. Határozzuk meg az összes olyan $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvényt, amelyre

$$(1) \quad f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2$$

teljesül \mathbf{R} minden x, y elemére.

1992/3. Tekintsünk 9 pontot a térben, amelyekből semelyik négy nem fekszik egy síkban. Mindegyik pontpárt összekötjük egy éllel (vagyis egy egyenesszakasszal), és mindegyik ilyen élt pirosra vagy kékre festünk, vagy pedig színzetlenül hagyjuk. Határozzuk meg a legkisebb olyan n értéket, amelyre igaz, hogy valahányszor a kiszínezett élek száma pontosan n , mindig teljesül, hogy a kiszínezett élek halmaza szükségképpen tartalmaz egy olyan háromszöget, amelynek mindegyik éle ugyanolyan színű.

1992/4. Adott a síkon egy O középpontú C kör, C egy l érintőegyenese és l -nek egy M pontja. Határozzuk meg azoknak a P pontoknak a halmazát, amelyekre teljesül a következő feltétel:

Létezik l -en két pont: Q és R úgy, hogy M a QR szakasz felezőpontja, és C a PQR háromszög beírt köre.

1992/5. Legyen S a háromdimenziós tér pontjainak egy véges részhalmaza. Jelölje S_x , S_y , illetve S_z rendre az S pontjainak az yz -, xz -, xy koordinátasíkokon levő merőleges vetületeiből álló halmazokat.

Bizonyítsuk be, hogy

$$|S|^2 \leq |S_x| |S_y| |S_z|,$$

ahol $|A|$ a véges A halmaz elemszámát jelöli.

1992/6. Ha n pozitív egész szám, jelölje $S(n)$ a legnagyobb olyan egész számot, amelyre igaz, hogy minden pozitív egész k -ra, amelyre $k \leq S(n)$, n^2 felírható k darab pozitív négyzetszám összegeként.

(a) Bizonyítsuk be, hogy $S(n) \leq n^2 - 14$ minden $n \geq 4$ -re.

(b) Adjunk meg egy olyan n egész számot, amelyre $S(n) = n^2 - 14$.

(c) Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan n egész szám van, amelyre $S(n) = n^2 - 14$.

1993.

1993/1. Legyen $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$, ahol $n > 1$ egész szám. Bizonyítsuk be, hogy $f(x)$ nem írható fel két legalább elsőfokú polinom szorzataként, ahol mindkét polinom együtthatói egész számok.

1993/2. Legyen D az ABC hegyesszögű háromszög olyan belső pontja, amelyre

$$(1) \quad \angle ADB = \angle ACB + 90^\circ$$

és

$$(2) \quad AC \cdot BD = AD \cdot BC.$$

teljesül.

(a) Határozzuk meg az $\frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}$ hányados értékét.

(b) Bizonyítsuk be, hogy az ACD , ill. a BCD háromszög körülírt köréhez a C pontban húzott érintők merőlegesek.

1993/3. Egy végtelen sakktáblán a következő játékot játsszuk.

A kiinduló állásban n^2 báb van elhelyezve a sakktáblán egy szomszédos mezőkből álló $n \times n$ -es négyzetben, minden mezőn egy báb áll. A játék egy lépése abban áll, hogy amennyiben egy báb mellett vízszintes vagy függőleges irányban a közvetlenül szomszédos mezőn áll báb, a rákövetkező mező pedig üres, a báb átugorja a szomszéd mezőn álló bábot, és az üres mezőre érkezik. Az átugrott bábot ezután levesszük a tábláról.

Határozzuk meg n azon értékeit, amelyekre elérhető, hogy végül csak egy báb maradjon a táblán.

1993/4. Jelölje a sík három P, Q, R pontjára $m(PQR)$ a PQR háromszög magasságainak minimumát (amennyiben P, Q, R egy egyenesen van, legyen $m(PQR)=0$).

Legyenek adottak az A, B, C pontok a síkon. Bizonyítsuk be, hogy a sík tetszőleges X pontjára

$$m(ABC) \leq m(ABX) + m(AXC) + m(XBC).$$

1993/5. Legyen $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Állapítsuk meg, létezik-e olyan $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ függvény, amelyre

- (1) $f(1) = 2$,
 (2) $f(f(n)) = f(n) + n$ minden $n \in \mathbf{N}$ -re

és

- (3) $f(n) < f(n+1)$ minden $n \in \mathbf{N}$ -re.

1993/6. Legyen $n > 1$ egész szám.

Van n lámpánk: L_0, L_1, \dots, L_{n-1} , amelyek egy kör mentén vannak elhelyezve. Mindegyik lámpa BEkapcsolt (BE) vagy Kikapcsolt (KI) állapotban van. Lépések egy $S_0, S_1, \dots, S_i, \dots$ sorozatát hajtjuk egymás után végre. Az S_j lépés csak az L_j lámpa állapotát befolyásolja (a többi lámpa állapotát változatlanul hagyja) a következőképpen:

Ha L_{j-1} BE van kapcsolva, S_j az L_j lámpa állapotát BE-ről KI-re, ill. KI-ről BE-re változtatja; ha L_{j-1} KI van kapcsolva, S_j az L_j lámpa állapotát változatlanul hagyja.

A lámpákat mod n számozzuk, azaz $L_{-1} = L_{n-1}$, $L_0 = L_n$, $L_1 = L_{n+1}$ stb.

A kiinduló állásban minden lámpa BE van kapcsolva.

Bizonyítsuk be, hogy

- (a) van olyan egész $M(n)$ szám, hogy $M(n)$ lépés után az összes lámpa ismét BE van kapcsolva;
 (b) ha $n = 2^k$ alakú, akkor minden lámpa BE van kapcsolva $n^2 - 1$ lépés után;
 (c) ha $n = 2^k + 1$ alakú, akkor minden lámpa BE van kapcsolva $n^2 - n + 1$ lépés után.

1994.

1994/1. Legyenek m és n pozitív egészek, a_1, a_2, \dots, a_m pedig az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz különböző elemei. Tegyük fel, hogy valahányszor $a_i + a_j \leq n$ teljesül valamilyen i, j értékekre, ahol $1 \leq i \leq j \leq m$, akkor létezik olyan

k ($1 \leq k \leq m$), hogy

$$a_i + a_j = a_k.$$

Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_m}{m} \geq \frac{n+1}{2}.$$

1994/2. Az ABC egyenlő szárú háromszögben $AB = AC$. Tegyük fel, hogy

(i) M a BC szakasz felezőpontja, O pedig az AM egyenesnek az a pontja, amelyre teljesül, hogy OB merőleges AB -re;

(ii) Q a BC szakasz tetszőleges belső pontja;

(iii) E az AB egyenes egy pontja, F pedig az AC egyenes egy pontja, amelyre teljesül, hogy E , Q és F különbözőek és egy egyenesen van.

Bizonyítsuk be, hogy OQ akkor és csak akkor merőleges EF -re, ha $QE = QF$.

1994/3. Tetszőleges pozitív egész k esetén jelölje $f(k)$ az $A_k = \{k+1, k+2, \dots, 2k\}$ halmaz olyan elemeinek a számát, amelyek kettes alapú számrendszerben való felírásában pontosan három darab 1-es számjegy található.

(a) Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész m -hez létezik legalább egy olyan pozitív egész k , hogy $f(k) = m$.

(b) Határozzuk meg mindazokat a pozitív egész m -eket, amelyekre pontosan egy olyan k létezik, amelyre $f(k) = m$.

1994/4. Határozzuk meg az összes olyan pozitív egészekből álló (m, n) rendezett párt, amelyre

$$(1) \quad \frac{n^3 + 1}{mn - 1}$$

is egész szám.

1994/5. Legyen S a (-1) -nél nagyobb valós számok halmaza. Határozzuk meg az összes olyan $f: S \rightarrow S$ függvényt, amelyre teljesül a következő két feltétel:

(i) $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$ minden $x, y \in S$ -re;

(ii) $\frac{f(x)}{x}$ szigorúan monoton növekvő a $-1 < x < 0$, ill. $x > 0$ intervallumok mindegyikén.

1994/6. Mutassuk meg, hogy létezik olyan pozitív egész számokból álló A halmaz, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

a prímszámok tetszőleges végtelen S halmazához létezik olyan $k \geq 2$ és két pozitív egész: $m \in A$ és $n \notin A$, hogy m és n mindegyike S k darab különböző elemének a szorzata.

1995.

1995/1. Legyen A, B, C, D egy egyenes négy különböző pontja, amelyek ebben a sorrendben fekszenek az egyenesen. Az AC , ill. BD átmérők fölé rajzolt körök metszéspontjai legyenek X és Y . Az XY egyenes metszéspontja a BC egyenessel legyen Z , legyen továbbá P az XY egyenes egy Z -től különböző pontja. A CP egyenes metszéspontjai az AC átmérőjű körrel legyenek C és M , a BP egyenes metszéspontjai a BD átmérőjű körrel legyenek B és N . Bizonyítsuk be, hogy az AM , DN és XY egyenesek egy ponton mennek át.

1995/2. Legyenek a, b, c olyan pozitív valós számok, amelyekre $abc = 1$ teljesül. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

1995/3. Határozzuk meg az összes olyan $n > 3$ egész számot, amelyre létezik a síkon n pont: A_1, A_2, \dots, A_n és r_1, r_2, \dots, r_n valós számok, amelyekre a következő két feltétel teljesül:

- (i) az A_1, A_2, \dots, A_n pontok közül semelyik három sem fekszik egy egyenesen;
- (ii) minden i, j, k számhármásra ($1 \leq i < j < k \leq n$) az $A_i A_j A_k$ háromszög területe $r_i + r_j + r_k$ -val egyenlő.

1995/4. Határozzuk meg azt a maximális x_0 értéket, amelyre létezik a pozitív valós számoknak olyan $x_0, x_1, \dots, x_{1995}$ sorozata, amely kielégíti az alábbi két feltételt:

- (i) $x_0 = x_{1995}$;
- (ii)
$$x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \frac{1}{x_i}$$

minden $i = 1, 2, \dots, 1995$ esetén.

1995/5. Legyen $ABCDEF$ olyan konvex hatszög, amelyre

$$AB = BC = CD, \quad DE = EF = FA$$

és

$$\angle BCD = \angle EFA = 60^\circ$$

teljesül. Legyen G és H a hatszög két olyan belső pontja, amelyekre $\angle AGB = \angle DHE = 120^\circ$. Bizonyítsuk be, hogy

$$(1) \quad AG + GB + GH + DH + HE \geq CF.$$

1995/6. Legyen p páratlan prímszám. Határozzuk meg az $\{1, 2, \dots, 2p\}$ halmaz olyan A részhalmazainak a számát, amelyekre teljesül, hogy

- (i) A -nak p eleme van,
- (ii) A elemeinek az összege osztható p -vel.

1996.

1996/1. Legyen $ABCD$ egy téglalap alakú tábla, amelynek oldalhosszai: $AB=20$, $BC=12$. A táblát felbontjuk 20×12 egységnégyzetre. Legyen r egy adott pozitív egész szám. Egy bábuval akkor és csakis akkor léphetünk valamelyik négyzetről egy másik négyzetre, ha a két négyzet középpontjának a távolsága \sqrt{r} . A feladat az, hogy olyan lépéssorozatot találjunk, amivel a bábuval eljuthatunk arról a négyzetről, amelynek egyik csúcsa A , arra a négyzetre, amelynek egyik csúcsa B .

- (a) Mutassuk meg, hogy a feladatnak nincs megoldása, ha r osztható 2-vel vagy 3-mal.
- (b) Mutassuk meg, hogy a feladat megoldható, ha $r=73$.
- (c) Van-e megoldása a feladatnak $r=97$ esetén?

1996/2. Legyen P az ABC háromszög olyan belső pontja, amelyre

$$(1) \quad \angle APB < \angle ACB < \angle APC < \angle ABC <$$

teljesül. Legyen D , ill. E az APB , ill. APC háromszögek beírt körének középpontja. Mutassuk meg, hogy az AP , BD és CE egyenesek egy ponton mennek át.

1996/3. Legyen $S = \{0, 1, \dots\}$ a nemnegatív egész számok halmaza. Határozzuk meg az összes olyan f függvényt, ami S -en van értelmezve és az értékei is S -ből valók, és amire teljesül

$$(1) \quad f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$$

minden S -beli m, n elemre.

1996/4. a és b olyan pozitív egész számok, amelyekre teljesül az, hogy $15a + 16b$ és $16a - 15b$ mindegyike négyzetszám. Határozzuk meg ezen két négyzetszám minimumának legkisebb lehetséges értékét.

1996/5. Az $ABCDEF$ konvex hatszögre teljesül, hogy AB párhuzamos ED -vel, BC párhuzamos FE -vel és CD párhuzamos AF -fel. Jelölje R_A , R_C , ill. R_E az FAB , BCD , DEF háromszögek körülírt köreinek a sugarát, és jelölje p a hatszög területét. Bizonyítsuk be, hogy

$$(1) \quad R_A + R_C + R_E \geq \frac{p}{2}.$$

1996/6. Legyenek n, p, q olyan pozitív egészek, amelyekre teljesül: $n > p + q$. Legyenek továbbá x_0, x_1, \dots, x_n olyan egész számok, amelyek kielégítik az alábbi feltételeket:

(a) $x_0 = x_n = 0$;

(b) minden i egész számra, amire $1 \leq i \leq n$, igaz az $x_i - x_{i-1} = p$ vagy az $x_i - x_{i-1} = -q$ állítás.

Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan (i, j) indexpár, amire $i < j$ és $(i, j) \neq (0, n)$, és amire fennáll: $x_i = x_j$.

1997.

1997/1. A sík egész koordinátájú pontjai egységnégyzetek csúcsai. Ezeket a négyzeteket váltakozva fehérre és feketére színezzük (mint a sakktáblán).

Pozitív egészek tetszőleges (m, n) párja esetén tekintsünk egy olyan derékszögű háromszöget, amelynek csúcsai egész koordinátájúak és amelynek befogói, amelyek hossza m és n , a négyzetek éleire illeszkednek.

Legyen S_1 a háromszög fekete színű részének az összterülete, S_2 pedig a fehér színű rész összterülete. Legyen

$$f(m, n) = |S_1 - S_2|.$$

(a) Számítsuk ki $f(m, n)$ -et minden olyan m és n pozitív egész szám esetén, amelyek vagy mindketten párosak, vagy mindketten páratlanok.

(b) Bizonyítsuk be, hogy $f(m, n) \leq \frac{1}{2} \max(m, n)$ minden m és n -re.

(c) Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan c állandó, hogy $f(m, n) < c$ minden (m, n) párja teljesüljön.

1997/2. Az ABC háromszögben az A -nál levő szög a legkisebb. A háromszög körülírt körét a B, C pontok két ívre bontják. Legyen U annak a B és C közötti ívnek a belső pontja, amelyik nem tartalmazza A -t.

AB és AC felezőmerőlegese az AU egyenest a V , ill. W pontban metszi. A BV és CW egyenesek metszéspontja T . Bizonyítsuk be, hogy

$$AU = TB + TC.$$

1997/3. Legyenek x_1, x_2, \dots, x_n olyan valós számok, amelyek kielégítik az

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| = 1$$

és az

$$|x_i| \leq \frac{n+1}{2} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

feltételeket.

Bizonyítsuk be, hogy x_1, x_2, \dots, x_n -nek van olyan y_1, y_2, \dots, y_n permutációja, amire

$$|y_1 + 2y_2 + 3y_3 + \dots + ny_n| \leq \frac{n+1}{2}.$$

1997/4. Egy $n \times n$ -es mátrixot (négyzetes táblázatot), amelynek elemei az $S = \{1, 2, \dots, 2n-1\}$ halmazból valók, ezüst mátrixnak nevezzük, ha minden $i = 1, 2, \dots, n$ esetén az i -edik sor és az i -edik oszlop együtt tartalmazza S valamennyi elemét. Bizonyítsuk be, hogy

- (a) nem létezik ezüst mátrix, ha $n = 1997$;
- (b) végtelen sok olyan n van, amire létezik ezüst mátrix.

1997/5. Határozzuk meg az összes olyan egészekből álló (a, b) párt, ahol $a \geq 1, b \geq 1$, amelyek kielégítik az

$$(1) \quad a^{b^2} = b^a$$

egyenletet.

1997/6. Minden pozitív egész n esetén jelölje $f(n)$ azt, hogy n hányféleképpen állítható elő nemnegatív egész kitevős 2-hatványok összegeként.

Azokat az előállításokat, amelyek csak az összeadandók sorrendjében különböznek, azonosnak tekintjük. Pl. $f(4) = 4$, mert a 4 számot a következő négyféle módon állíthatjuk elő:

$$4; \quad 2+2; \quad 2+1+1; \quad 1+1+1+1.$$

Bizonyítsuk be, hogy minden $n \geq 3$ egész számra

$$2^{\frac{n^2}{4}} < f(2^n) < 2^{\frac{n^2}{2}}.$$

1998.

1998/1. Az $ABCD$ konvex négyszögben az AC és BD átlók merőlegesek és a szemközi AB, CD oldalak nem párhuzamosak. Tegyük fel, hogy az a P pont, ahol az AB és CD felezőmerőlegese metszi egymást, az $ABCD$ négyszög belsejében van. Bizonyítsuk be, hogy $ABCD$ akkor és csak akkor húrnégyszög, ha az ABP és CDP háromszögek területe egyenlő.

1998/2. Egy versenyen a versenyző és b bíró van, ahol $b \geq 3$ páratlan szám. Mindegyik bíró mindegyik versenyző teljesítményét „megfelelt”, ill. „nem megfelelt” minősítéssel értékeli. Tegyük fel, hogy a k számra igaz az, hogy bármely két bíró értékelése legfeljebb k versenyző esetén esik egybe. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}.$$

1998/3. Tetszőleges pozitív egész n esetén jelölje $d(n)$ n pozitív osztóinak a számát (beleértve 1-et és magát n -et is). Határozzuk meg az összes olyan pozitív egész k számot, amihez létezik olyan n , hogy

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = k.$$

1998/4. Határozzuk meg az összes olyan pozitív egész számokból álló (a, b) rendezett párt, amire $(ab^2 + b + 7)$ osztója $(a^2b + a + b)$ -nek.

1998/5. Legyen I az ABC háromszög beírt körének a középpontja. Érintse a beírt kör a BC , CA , AB oldalakat rendre a K , L , M pontokban. A B -n keresztülmenő, MK -val párhuzamos egyenes metszéspontja az LM , ill. LK egyenesekkel legyen R , ill. S . Bizonyítsuk be, hogy az RIS hegyesszög.

1998/6. Tekintsük az összes olyan f függvényt, amelyik a pozitív egész számok \mathbf{N} halmazát önmagába képezi le, és amelyre teljesül az

$$(1) \quad f(t^2 f(s)) = s(f(t))^2$$

feltétel minden \mathbf{N} -beli s, t esetén. Határozzuk meg $f(1998)$ lehetséges legkisebb értékét.

1999.

1999/1. Határozzuk meg az összes olyan, legalább három pontot tartalmazó síkbeli véges S ponthalmazt, amire az alábbi feltétel teljesül:

S bármely két különböző A, B pontjára az AB szakasz felezőmerőlegese szimmetriatengelye az S halmaznak.

1999/2. Legyen n adott egész szám ($n \geq 2$).

(a) Határozzuk meg a legkisebb olyan C állandót, amire

$$(1) \quad \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C \left(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i \right)^4$$

egyenlőtlenség minden x_1, x_2, \dots, x_n nemnegatív valós szám n -esre teljesül.

(b) Határozzuk meg, hogy ezen C állandó mellett mikor áll fenn egyenlőség.

1999/3. Tekintsünk egy $n \times n$ -es négyzet alakú táblát, ahol n rögzített páros pozitív egész. A tábla n^2 egységnyezetre van felosztva. Azt mondjuk, hogy a tábla két különböző négyzete szomszédos, ha van közös oldaluk.

A táblán N egységnyezet meg van jelölve oly módon, hogy minden négyzet (jelölt vagy nem jelölt) szomszédos legalább egy jelölt négyzettel.

Határozzuk meg N lehetséges legkisebb értékét.

1999/4. Határozzuk meg az összes olyan pozitív egészekből álló (n, p) számpárt, amelyben p prím, $n \leq 2p$ és $(p-1)^n + 1$ osztható n^{p-1} -gyel.

1999/5. A Γ_1 és Γ_2 körök a Γ kör belsejében vannak és érintik a Γ kört a különböző M, N pontokban.

Γ_1 átmegy a Γ_2 kör középpontján. A Γ_1 és Γ_2 két metszéspontján átmenő egyenes a Γ kört az A és B pontokban metszi. Az MA és MB egyenesek Γ_1 -et a C , ill. D pontokban metszik. Bizonyítsuk be, hogy CD érintője a Γ_2 körnek.

1999/6. Határozzuk meg az összes olyan $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvényt, amelyre

$$(1) \quad f(x - f(y)) = f(f(y)) + x f(y) + f(x) - 1$$

teljesül minden $x, y \in \mathbf{R}$ esetén.

2000.

2000/1. A Γ_1 és Γ_2 körök az M és N pontokban metszik egymást.

Legyen l a Γ_1 és Γ_2 köröknek az a közös érintője, amelyre teljesül, hogy M közelebb van l -hez mint N . Érintse l a Γ_1 -et az A , Γ_2 -t a B pontban. Legyen az M -en átmenő, l -vel párhuzamos egyenes másik metszéspontja a Γ_1 körrel C , a Γ_2 körrel pedig D . A CA és DB egyenesek metszéspontja legyen E ; az AN és CD egyenesek metszéspontja legyen P ; a BN és CD egyeneseké pedig legyen Q .

Bizonyítsuk be, hogy $EP = EQ$.

2000/2. Legyenek a, b, c olyan pozitív valós számok, amelyekre $abc = 1$ teljesül. Bizonyítsuk be, hogy

$$(1) \quad \left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

2000/3. Legyen $n \geq 2$ pozitív egész szám. A kiinduló állásban n bolha ül egy vízszintes egyenesen, nem mind ugyanabban a pontban.

Egy λ valós számra definiáljunk egy *lépést* a következőképpen:

válasszunk ki két bolhát, amelyek az A és B pontokban ülnek, ahol A balra van B -től;

ugorjon az A -n lévő bolha az egyenesnek abba a C pontjába, ami jobbra van B -től, és amelyre $BC/AB = \lambda$ teljesül.

Határozzuk meg az összes olyan λ értéket, amelyre teljesül, hogy akárhogy választva az M pontot az egyenesen, és akárhogy választva az n bolha kiindulási pozícióját, létezik lépéseknek egy olyan véges sorozata, amelyek végrehajtása után az összes bolha M -től jobbra helyezkedik el.

2000/4. Egy bűvésznek száz kártyája van, amelyek 1-től 100-ig vannak számozva. Mindegyiket beleteszi három doboz – egy piros doboz, egy fehér doboz és egy kék doboz – valamelyikébe, olymódon, hogy mindegyik dobozban van legalább egy kártya.

A közönség egy tagja kiválaszt kettőt a három doboz közül, és mindegyikből kivesz egy kártyát, majd kihirdeti a kivett kártyákon lévő két szám összegét. Ennek az összegnek az ismeretében a bűvész meg tudja mondani, hogy melyik az a doboz, amiből nem vettek ki kártyát.

Hányféleképpen lehet a kártyákat a dobozokban úgy elhelyezni, hogy ez a mutatvány mindig sikerüljön? (Két elhelyezést különbözőnek tekintünk, ha van legalább egy kártya, ami másik dobozba kerül.)

2000/5. Döntsük el, hogy létezik-e olyan n pozitív egész szám, amelyre teljesül, hogy n pontosan 2000 különböző prímszámmal osztható, és $2^n + 1$ osztható n -nel.

2000/6. Legyenek AH_1 , BH_2 , CH_3 az ABC hegyesszögű háromszög magasságai. Az ABC háromszög beírt köre a BC , CA , AB oldalakat rendre a T_1 , T_2 , T_3 pontokban érinti. Legyenek l_1 , l_2 , l_3 egyenesek rendre a H_2H_3 , H_3H_1 , H_1H_2 egyeneseknek a tükörképei a T_2T_3 , T_3T_1 , T_1T_2 egyenesekre.

Bizonyítsuk be, hogy l_1 , l_2 , l_3 egy olyan háromszöget határoznak meg, amelynek csúcsai az ABC háromszög beírt körén vannak.

2001.

2001/1. Legyen az ABC hegyesszögű háromszög körülírt körének középpontja O . Legyen P az A -ból induló magasság talppontja a BC oldalon. Tegyük fel, hogy $\angle BCA \geq \angle ABC + 30^\circ$. Bizonyítsuk be, hogy $\angle CAB + \angle COP < 90^\circ$.

2001/2. Bizonyítsuk be, hogy

$$(1) \quad \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1$$

minden a, b, c pozitív valós számra.

2001/3. Egy matematikaversenyen 21 lány és 21 fiú vett részt.

- (1) Mindegyik versenyző legfeljebb hat feladatot oldott meg.
- (2) Mindegyik fiúhoz és mindegyik lányhoz van legalább egy olyan feladat, amelyet mindketten megoldottak.

Bizonyítsuk be, hogy van olyan feladat, amelyet legalább három lány és legalább három fiú megoldott.

2001/4. Legyen n egy 1-nél nagyobb páratlan egész, k_1, k_2, \dots, k_n pedig adott egészek. Az $1, 2, \dots, n$ számok mind az $n!$ darab $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ permutációjára legyen

$$S(a) = \sum_{i=1}^n k_i a_i.$$

Bizonyítsuk be, hogy van két olyan b és c permutáció, amelyekre $b \neq c$, és $n!$ osztója $(S(b) - S(c))$ -nek.

2001/5. Az ABC háromszögben legyen AP a $\angle BAC$ felezője, ahol P a BC oldalon van, BQ pedig az $\angle ABC$ felezője, ahol Q a CA oldalon van. Tudjuk, hogy $\angle BAC = 60^\circ$ és hogy $AB + BP = AQ + QB$.

Mik az ABC háromszög szögeinek lehetséges értékei?

2001/6. Legyenek a, b, c, d egészek, amelyekre $a > b > c > d > 0$. Tegyük fel, hogy

$$(1) \quad ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c).$$

Bizonyítsuk be, hogy $ab + cd$ nem prímszám.

2002.

2002/1. Legyen n pozitív egész szám. Legyen T a sík azon (x, y) pontjainak a halmaza, amelyekre x és y nemnegatív egész számok és $x + y < n$. T minden pontját pirosra vagy kékre színezzük. Ha az (x, y) pont színe piros, akkor T minden olyan (x', y') pontjának a színe is piros, amelyre $x' \leq x$ és $y' \leq y$ mindegyike teljesül. Nevezzük X -halmaznak az olyan halmazokat, amelyek n olyan kék pontból állanak, amelyeknek x -koordinátái mind különbözők, és nevezzük Y -halmaznak az olyan halmazokat, amelyek n olyan kék pontból állanak, amelyek y -koordinátái mind különbözők. Bizonyítsuk be, hogy az X -halmazok száma megegyezik az Y -halmazok számával.

2002/2. Legyen BC az O középpontú Γ kör átmérője. Legyen A a Γ kör egy olyan pontja, amire $0^\circ < \angle AOB < 120^\circ$. Legyen D a C -t nem tartalmazó \widehat{AB} ív középpontja. Az O -n keresztül DA -val párhuzamosan húzott egyenes messe az AC egyenest a J pontban. OA felező merőlegeseinek és Γ -nak a metszéspontjai legyenek E és F . Bizonyítsuk be, hogy J a CEF háromszög beírt körének a középpontja.

2002/3. Határozzuk meg az összes olyan (m, n) párt, ahol m, n egész számok, amikre $m, n \geq 3$, amelyekhez létezik végtelen sok olyan a pozitív egész szám, amire

$$\frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$$

egész szám.

2002/4. Legyen n 1-nél nagyobb egész szám, n összes pozitív osztója d_1, d_2, \dots, d_k , ahol

$$1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n.$$

Legyen $D = d_1 d_2 + d_2 d_3 + \dots + d_{k-1} d_k$.

(a) Bizonyítsuk be, hogy $D < n^2$.

(b) Határozzuk meg az összes olyan n számot, amire D osztója n^2 -nek.

2002/5. Határozzuk meg az összes olyan f függvényt, amely a valós számok \mathbf{R} halmazát önmagába képezi le, és amire

$$(1) \quad (f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz)$$

teljesül minden $x, y, z, t \in \mathbf{R}$ esetén.

2002/6. Legyenek $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ egységsugarú körök a síkban, ahol $n \geq 3$. Jelölje a középpontjaikat rendre O_1, O_2, \dots, O_n . Tegyük fel, hogy nincs olyan

egyenes, amelynek kettőnél több körrel van közös pontja. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{O_i O_j} \leq \frac{(n-1)\pi}{4}.$$

2003.

2003/1. Legyen A az $S = \{1, 2, \dots, 1000000\}$ halmaz egy 101 elemű részhalmaza. Bizonyítsuk be, hogy találhatók olyan t_1, t_2, \dots, t_{100} számok az S halmazban, amelyekre az

$$A_j = \{x + t_j \mid x \in A\} \quad j = 1, 2, \dots, 100$$

halmazok páronként diszjunktak.

2003/2. Határozzuk meg az összes olyan, pozitív egészekből álló (a, b) párt, amelyre

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

pozitív egész.

2003/3. Adott egy konvex hatszög, amelyben bármely két szemközti oldalra teljesül a következő tulajdonság: az oldalak középpontjai közötti távolság $\sqrt{3}/2$ -szere a hosszuk összegének. Bizonyítsuk be, hogy a hatszög valamennyi szöge egyenlő.

(Az $ABCDEF$ konvex hatszögben három szemközti oldalpár van: AB és DE , BC és EF , CD és FA .)

2003/4. Legyen $ABCD$ egy húrnégyszög. A D pontból a BC , CA és AB egyenesekre bocsátott merőlegesek talppontjai legyenek rendre P , Q és R . Bizonyítsuk be, hogy akkor és csak akkor teljesül $PQ = QR$, ha az $ABC \triangleleft$ és $ADC \triangleleft$ szögek szögfelezőinek metszéspontja az AC egyenesen van.

2003/5. Legyen n pozitív egész és legyenek x_1, x_2, \dots, x_n olyan valós számok, amelyekre $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ teljesül.

(a) Bizonyítsuk be, hogy

$$\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - x_j| \right)^2 \leq \frac{2(n^2 - 1)}{3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - x_j)^2.$$

(b) Mutassuk meg, hogy egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha x_1, \dots, x_n számtani sorozatot alkotnak.

2003/6. Legyen p prímszám. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan q prímszám, amivel minden n egész számra igaz, hogy $n^p - p$ nem osztható q -val.

5. A feladatok megoldásai

1959.

1959/1. Mutassuk meg, hogy – bármilyen természetes számot jelentsen n – $a \frac{21n+4}{14n+3}$ tört sohasem egyszerűsíthető.

1. megoldás. Ha d osztója két egész számnak, akkor osztója egész számú többszöröseiknek és összegüknek (különbségüknek) is. Mivel

$$3(14n+3) - 2(21n+4) = 1,$$

a számláló és a nevező minden közös osztója osztója 1-nek is; a tört ezért nem egyszerűsíthető.

2. megoldás. Vegyük figyelembe, hogy ha $\frac{a}{b} = e + \frac{c}{b}$ (a, b, c, e egész számok), akkor $c = a - be$, $a = c + be$, tehát a és b minden közös osztója c -nek is osztója és c és b minden közös osztója a -nak is osztója; ezért $\frac{a}{b}$ akkor és csak akkor egyszerűsíthető, ha $\frac{c}{b}$ is egyszerűsíthető; nyilván ugyanez igaz $\frac{a}{b}$ -re és $\frac{b}{a}$ -ra is. Mivel

$$\frac{21n+4}{14n+3} = 1 + \frac{7n+1}{14n+3}$$

és

$$\frac{14n+3}{7n+1} = 2 + \frac{1}{7n+1},$$

viszont az utolsó tört nem egyszerűsíthető, ezért ugyanez igaz az eredeti törtre is.

1959/2. Az x változó mely valós értékei mellett érvényesek a következő egyenlőségek:

$$\sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}} = \sqrt{2},$$

$$\sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}} = 1,$$

$$\sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}} = 2.$$

Megoldás. Kiindulásul vegyük észre, hogy

$$x + \sqrt{2x-1} = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{2x-1})^2 \text{ és } x - \sqrt{2x-1} = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{2x-1})^2.$$

Itt ki kell kötnünk, hogy $x \geq \frac{1}{2}$. Jelölje az egyenletek bal oldalán álló kifejezést B :

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| 1 + \sqrt{2x-1} \right| + \left| 1 - \sqrt{2x-1} \right| \right).$$

Mivel $x \geq \frac{1}{2}$ esetén $1 + \sqrt{2x-1} > 0$, mellőle az abszolút érték jele elhagyható; a második kifejezés akkor nemnegatív, ha

$$(1) \quad 1 \geq \sqrt{2x-1}.$$

Mivel (1) mindkét oldala nemnegatív, ezért egyenértékű az

$$1 \geq 2x-1, \quad \text{azaz} \quad x \leq 1$$

egyenlőtlenséggel. Ezek szerint

$$1 - \sqrt{2x-1} \geq 0, \quad \text{ha } x \leq 1 \quad \text{és} \quad 1 - \sqrt{2x-1} < 0, \quad \text{ha } x > 1.$$

Ha tehát $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$,

$$(2) \quad B = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \sqrt{2x-1} + 1 - \sqrt{2x-1} \right) = \sqrt{2},$$

ha viszont $x > 1$,

$$(3) \quad B = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \sqrt{2x-1} + \sqrt{2x-1} - 1 \right) = \sqrt{4x-2}.$$

Eredményünk a fentiek alapján, mivel átalakításaink egyenértékűek:

a) akkor teljesül, ha $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$,

b) akkor teljesülhet, ha $\sqrt{4x-2} = 1$, azaz $x = \frac{3}{4}$; a b) alatti egyenletnek tehát nincs megoldása.

c) akkor teljesülhet, ha $\sqrt{4x-2} = 2$, azaz $x = \frac{3}{2}$, ez kielégíti a (3) alatti feltételt, tehát c) megoldása: $x = \frac{3}{2}$.

1959/3. Valamely x értékre teljesül az

$$(1) \quad a \cos^2 x + b \cos x + c = 0$$

egyenlet. Írjunk fel olyan másodfokú egyenletet, amelyet $\cos 2x$ elégít ki. Alkalmazzuk eredményünket az $a = 4$, $b = 2$, $c = -1$ esetben.

Megoldás. Mivel $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ és ebből $\cos^4 x = \frac{1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}$, az (1) egyenletet átrendezéssel és négyzetreemeléssel alakítsuk át úgy, hogy benne $\cos^4 x$, ill. $\cos^2 x$ szerepeljen:

$$b \cos x = -a \cos^2 x - c,$$

$$b^2 \cos^2 x = a^2 \cos^4 x + 2ac \cos^2 x + c^2.$$

Végezzük most el $\cos^2 x$ és $\cos^4 x$ helyettesítését:

$$a^2 \frac{1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x}{4} + (2ac - b^2) \frac{1 + \cos 2x}{2} + c^2 = 0$$

Ebből kapjuk (1) *következményeként* a keresett egyenletet:

$$(2) \quad a^2 \cos^2 2x + (2a^2 + 4ac - 2b^2) \cos 2x + (a^2 + 4ac - 2b^2 + 4c^2) = 0.$$

Az adott helyettesítésekkel kapott egyenletek:

$$4 \cos^2 x + 2 \cos x - 1 = 0,$$

$$16 \cos^2 2x + 8 \cos 2x - 4 = 0,$$

vagy egyszerűsítve:

$$(3) \quad 4 \cos^2 2x + 2 \cos 2x - 1 = 0.$$

Megjegyzés. Érdekes, hogy $\cos x$ és $\cos 2x$ ugyanannak a másodfokú egyenletnek a gyökei. Ennek az az oka, hogy (3)-ból $\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$ és így pl. $x = 72^\circ$, ill. 144° , tehát $2x = 144^\circ$, ill. 288° , de $\cos 288^\circ = \cos(360^\circ - 288^\circ) = \cos 72^\circ$.

1959/4. Szerkesszünk derékszögű háromszöget, ha adott az átfogója és tudjuk, hogy az átfogóhoz tartozó súlyvonal a két befogó mértani középárányosa.

Megoldás. Thalész tételéből következik, hogy a derékszögű háromszög átfogójához tartozó súlyvonal fele az átfogónak és egyenlő a köré írt kör sugarával. Ha tehát a befogók a és b , az átfogó $2R$, a súlyvonal R . A feltétel szerint

$$(1) \quad ab = R^2.$$

Jelölje az átfogóhoz tartozó magasságot m . A derékszögű háromszög kétszeres területét két módon kifejezve kapjuk, hogy

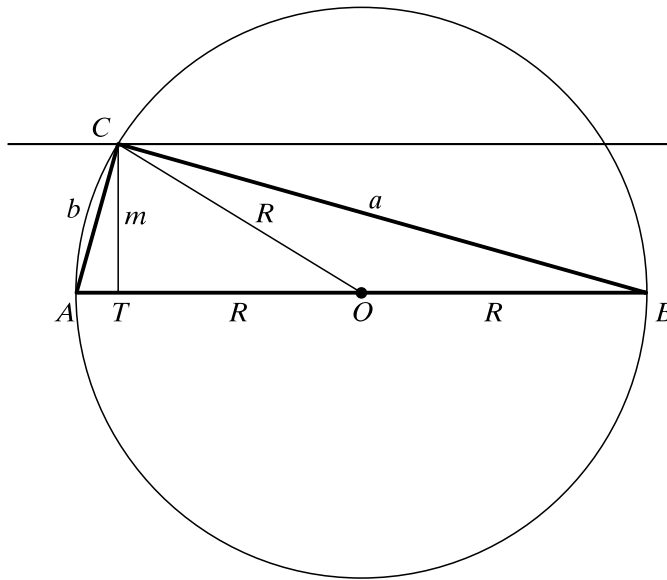
$$(2) \quad R^2 = ab = 2R \cdot m,$$

ebből

$$m = \frac{R}{2}.$$

Ennek alapján a háromszög szerkesztése (1959/4.1. ábra): az $AB = 2R$ átfogó fölé Thalész-kört szerkesztünk, ezt elmetsszük az átfogótól $\frac{R}{2}$ távolságra húzott, az átfogóval párhuzamos egyenessel; a kör és az egyenes bármelyik metszéspontja megfelel a C csúcsnak (a négy lehetséges metszéspont nyilván egybevágó háromszögeket eredményez).

A szerkesztéssel kapott háromszög kielégíti a feladat feltételeit, hiszen $m = \frac{R}{2}$ -ből (2) és (1) következik.



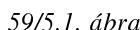
59/4.1. ábra

Megjegyzés. Megjegyezzük, hogy eredményünk szerint az 1959/4.1 ábrán az OTC derékszögű háromszögben $COT \angle = 30^\circ$ és így az ABC háromszög hegyesszögeinek mértéke 15° , ill. 75° . Ezek az észrevételek más szerkesztést is lehetővé tesznek.

1959/5. Az AB szakaszon mozog az M pont. Az AM és MB szakasz fölé az AB egyenes ugyanazon oldalán megszerkesztjük az $AMCD$ és $BMEF$ négyzeteket és körülírt körüket. A két kör M -ben és N -ben metszi egymást. Mutassuk meg, hogy az AE és BC egyenesek átmennek az N ponton. Mutassuk meg, hogy az MN egyenes átmegy egy állandó ponton. Mi a mértani helye a két négyzet középpontját összekötő szakasz felezőpontjának?

Megoldás. Ha M az AB szakasz felezőpontja, $C = E = N$, a feladat első állítása nyilvánvaló; az $MN = f$ egyenes ekkor AB felező merőlegese, ezért az MN egyenesek közös pontját f -en kell keresnünk. Tegyük fel, hogy $AM \neq MB$.

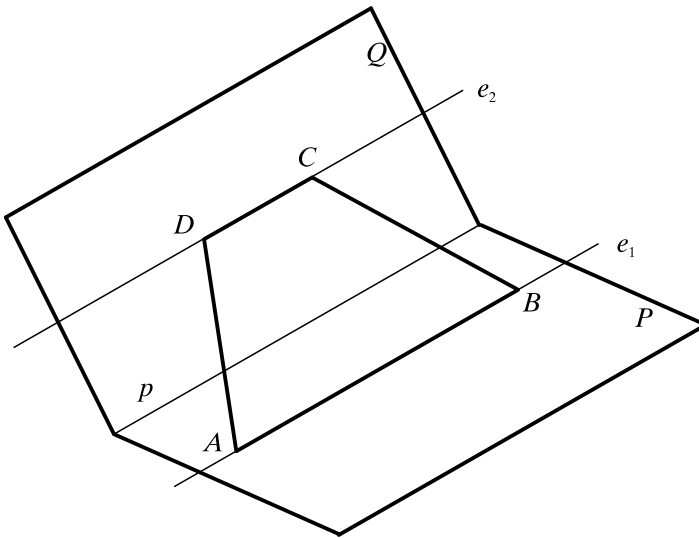
Először megmutatjuk, hogy C az ABE háromszög magasságpontja (1959/5.1 ábra). EM minden esetre magasságvonal, de AC is merőleges a BE oldalra, mert a két négyzet átlói párhuzamosak. C tehát két magasság metszéspontja, ezért magasságpont. Ebből következik, hogy a BC is magasságvonalon van, tehát BC merőleges AE -re. Jelölje AE és BC metszéspontját N' . N' -ből az AC átló és a BE átló is derékszögben látszik, ezért rajta van az átlók fölé szerkesztett Thalész körökön, vagyis a négyzetek körülírt körén. Ez azt jelenti, hogy N' a két kör közös pontja: $N' \equiv N$, és így AE és BC valóban átmegy N -en.



Legyen AC és BE metszéspontja Q . Mivel ABQ az AB fölé szerkesztett egyenlőszárú derékszögű háromszög derékszögű csúcsa, Q is független M választásától. Ha a négyzetek középpontja K_1 és K_2 , az MK_2QK_1 négyszög téglalap. A K_1K_2 átló F felezőpontja a QM átlót felezi, ezért F rajta van az ABQ háromszög AB -vel párhuzamos XY középvonalán. A keresett mértani hely tehát a nyílt XY szakasz; ennek ui. tetszőleges F pontjához egyértelműen hozzárendelhető AB -n egy M belső pont (F -nek Q -ból való kétszeres nagytöltje), az M -hez tartozó négyzetek középpontját összekötő szakasz felezőpontja pedig az előzőek szerint téppen F .

1959/6. A P és Q sík egymást a p egyenesben metszi, és A a P síknak, C a Q síknak olyan pontja, amely nincs rajta p -n. Megszerkesztendő az az $ABCD$ szimmetrikus trapéz ($AB \parallel CD$) melynek B csúcsa a P -n, D csúcsa a Q síkban van, és amelybe kört írhatunk.

Megoldás. Mivel AB és CD olyan párhuzamos egyenesek, amelyek két különböző, egymást metsző síkban helyezkednek el, szükségképpen párhuzamosak a p metszévonalal. Jelölje a párhuzamosokat e_1 , ill. e_2 ; a szerkesztés az e_1 és e_2 által meghatározott síkbeli szerkesztés (1959/6.1. ábra). Legyen e_1 és

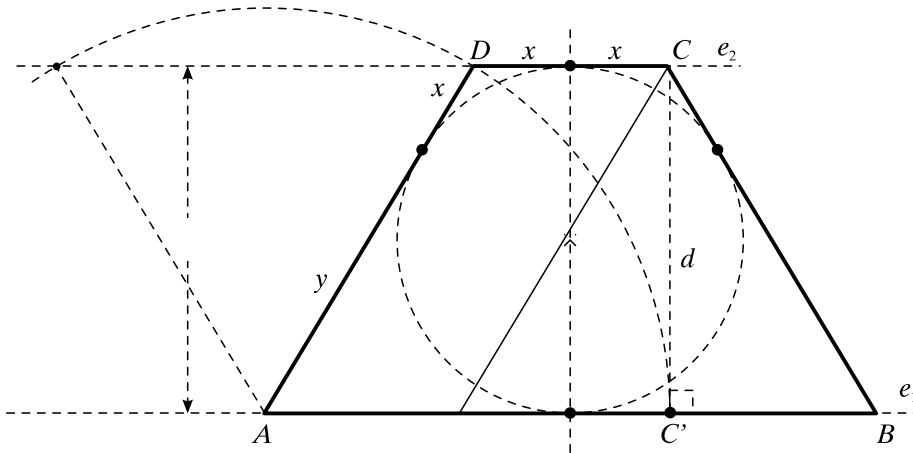


59/6.1. ábra

e_2 távolsága d . A 1959/6.2. ábrán a megszerkesztett trapézból indulunk el. Legyen C merőleges vetülete e_1 -en C' . Az érintő-szakaszok tételéből következik, hogy $AC' = AD$. Ennek ismeretében a trapézt a következő módon szerkeszthetjük meg:

Az A középpontú AC' sugarú kör e_2 -t D -ben metszi. A CD szakasz t felező merőlegesére tükrözve az AD oldalt, a trapéz BC oldalát kapjuk meg. Az $ABCD$ trapéz kielégíti a feladat feltételeit, hiszen a szerkesztésből következik, hogy szimmetrikus trapéz, és érintőnégyyszög is, mivel szemközti oldalpárjainak az összege egyenlő.

Ha $AC' < d$, a feladatnak nincs megoldása. Ha $AC' = d$, egy megoldás van, a trapéz ebben az esetben d oldalú négyzet. Ha $AC' > d$, az A középpontú AC' sugarú kör két pontban metszi e_2 -t, a feladatnak két megoldása van (a második ábránkon az \overline{ABCD} trapéz).



59/6.2. ábra

1960.

1960/1. Melyek azok a háromjegyű természetes számok, amelyek egyenlők számjegyeik négyzetösszegének 11-szeresével?

Megoldás. Jelölje a számjegyeket a, b, c ($a \neq 0$). A feladat feltétele

$$(1) \quad 100a + 10b + c = 11(a^2 + b^2 + c^2)$$

alakba írható. Ezt átalakítva kapjuk, hogy

$$(99a + 11b) + (a - b + c) = 11(a^2 + b^2 + c^2).$$

Az első zárójeles kifejezés és a jobb oldal is osztható 11-gyel, ezért $a - b + c$ -nek is oszthatónak kell lennie, $-8 \leq a - b + c \leq 18$ miatt ez két esetben lehetséges: $a - b + c = 0$ vagy $a - b + c = 11$.

Az első esetben $b = a + c$. Helyettesítsük ezt (1)-be:

$$100a + 10(a + c) + c = 11(a^2 + (a + c)^2 + c^2).$$

Ezt átrendezve a

$$(2) \quad 2a^2 + (2c - 10)a + (2c^2 - c) = 0,$$

a -ban másodfokú egyenletet kapjuk. Mivel ebben az első két tag páros, a harmadiknak is párosnak kell lennie, mert csak így lehet összegük 0; de ez azt jelenti, hogy c is páros. A (2) másodfokú egyenletnek csak akkor lehet egész a megoldása, ha diszkriminánsa:

$$4(-3c^2 - 8c + 25)$$

négyszám. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy c lehetséges értékei közül ez csak $c = 0$ -ra teljesül. $c = 0$ -t (2)-be behelyettesítve kapjuk, hogy

$$2a^2 - 10a = 0, \text{ s mivel } a \neq 0, \text{ } a = 5.$$

$$b = a + c = 5,$$

a kapott szám 550; ez valóban kielégíti a feladat feltételeit.

A második esetben $b = a + c - 11$. Ezt (1)-be helyettesítve rendezés után a

$$(3) \quad 2a^2 + (2c - 32)a + (2c^2 - 23c + 131) = 0$$

egyenletet kapjuk; itt viszont azt láthatjuk, hogy c nem lehet páros. Az egyenlet diszkriminánsa:

$$4(-3c^2 + 14c - 6)$$

páratlan c számjegyekre csak $c = 3$ esetén négyzetszám. Ezt (3)-ba helyettesítve a

$$2a^2 - 26a + 80 = 0$$

egyenletet kapjuk. Ennek megoldásai $a = 5$ vagy $a = 8$, ezekkel (3)-ból $b = -3$, ill. $b = 0$ adódik; a feladatnak nyilván csak az utóbbi felelhet meg; a kapott háromjegyű szám: 803, ez kielégíti a feladat feltételeit. A végeredmény tehát: a keresett számok 550 és 803.

1960/2. Az x változó mely valós értékeire teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$\frac{4x^2}{(1 - \sqrt{1+2x})^2} < 2x + 9.$$

Megoldás. A bal oldali tört akkor van értelmezve, ha a nevező nem nulla, azaz $x \neq 0$ és a négyzetgyökjel alatt nemnegatív szám áll, tehát $1 + 2x \geq 0$, $x \geq -\frac{1}{2}$. Bővítsük a törtet $(1 + \sqrt{1+2x})^2$ -nel:

$$\frac{4x^2 (1 + \sqrt{1+2x})^2}{4x^2} < 2x + 9,$$

$$2\sqrt{1+2x} < 7,$$

$$4 + 8x < 49,$$

$$x < \frac{45}{8}.$$

Mivel egyenértékű átalakításokat végeztünk, az egyenlőtlenséget a

$$-\frac{1}{2} \leq x < 0, \quad 0 < x < \frac{45}{8}$$

feltételeknek eleget tevő x értékek elégítik ki.

1960/3. Az ABC derékszögű háromszög $BC = a$ átfogóját n számú egyenlő szakaszra osztjuk, ahol n tetszés szerinti páratlan természetes szám. Jelöljük h -val az átfogóhoz tartozó magasságot, továbbá α -val azt a szöget, amely alatt az átfogó felezőpontját tartalmazó szakasz látszik az A csúcsból. Bizonyítsuk be,

hogy

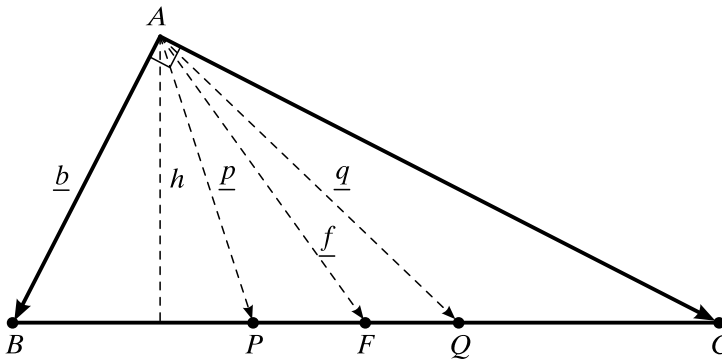
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4nh}{(n^2 - 1)a}.$$

1. megoldás. Értelmszerűen feltesszük, hogy $n > 1$. Legyen a BC átfogó felezőpontja F , az F -et közrefogó osztás-szakasz két végpontja P és Q ; legyen továbbá $AP = p$, $AQ = q$. (1960/3.1. ábra). Thalész tétele értelmében $AF = \frac{a}{2}$. Az APQ háromszögben AF a PQ oldalhoz tartozó súlyvonal és $PQ = \frac{a}{n}$, ezért (1. [1]-et)

$$\frac{a^2}{4} = \frac{1}{4} \left(2p^2 + 2q^2 - \frac{a^2}{n^2} \right),$$

ebből

$$(1) \quad p^2 + q^2 = \frac{(n^2 + 1)a^2}{2n^2}.$$



60/3.1. ábra

Írjuk fel kétféle módon az APQ háromszög kétszeres területét:

$$(2) \quad pq \sin \alpha = \frac{ah}{n}.$$

Alkalmazzuk az APQ háromszögre a koszinusz-tételt; ebből kapjuk figyelembe véve (1)-et is, hogy

$$(3) \quad pq \cos \alpha = \frac{1}{2} \left(p^2 + q^2 - \frac{a^2}{n^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{(n^2 + 1)a^2}{2n^2} - \frac{a^2}{n^2} \right) = \frac{(n^2 - 1)a^2}{4n^2}.$$

(2) és (3) megfelelő oldalainak a hányadosait véve nyerjük:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{pq \sin \alpha}{pq \cos \alpha} = \frac{ah \cdot 4n^2}{n(n^2 - 1)a^2} = \frac{4nh}{(n^2 - 1)a},$$

ami bizonyítandó volt.

2. megoldás. Valamivel egyszerűbben érünk célt vektorok alkalmazásával. Jelöljük az A csúcsból az átfogó pontjaihoz mutató vektorokat a végpontjaiknak megfelelő betűvel. Mivel f felezőpont helyvektora,

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{2}$$

és így

$$\mathbf{p} = \mathbf{f} + \overrightarrow{FP} = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{2} + \frac{\mathbf{b} - \mathbf{c}}{2n} = \frac{(n+1)\mathbf{b} + (n-1)\mathbf{c}}{2n},$$

hasonlóan

$$\mathbf{q} = \mathbf{f} + \overrightarrow{FQ} = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{2} + \frac{\mathbf{c} - \mathbf{b}}{2n} = \frac{(n-1)\mathbf{b} + (n+1)\mathbf{c}}{2n}.$$

Ebből, mivel \mathbf{b} és \mathbf{c} merőlegesek egymásra,

$$pq = \frac{(n^2 - 1)(\mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2)}{4n^2} = \frac{(n^2 - 1)a^2}{4n^2}$$

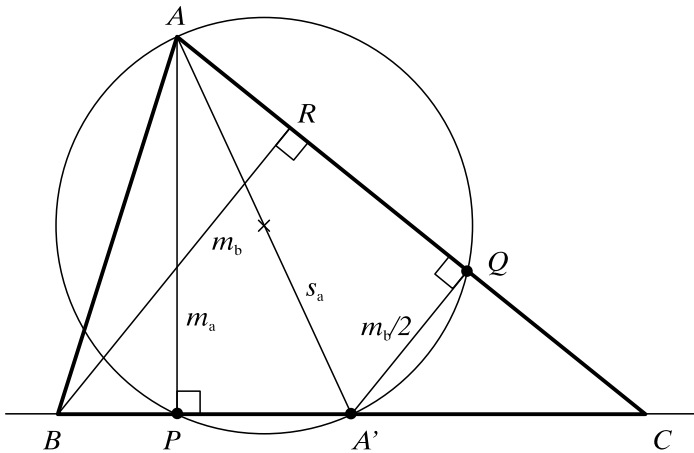
(2) felhasználásával

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{pq \sin \alpha}{pq \cos \alpha} = \frac{pq \sin \alpha}{pq} = \frac{ah \cdot 4n^2}{n(n^2 - 1)a^2} = \frac{4nh}{(n^2 - 1)a^2},$$

ami bizonyítandó volt.

1960/4. Adva van az ABC háromszögnek az A és B csúcsból kiinduló m_a , m_b magassága és az A csúcsból kiinduló súlyvonala. Szerkesszük meg a háromszöget.

Megoldás. Képzeld el a megszerkesztett háromszöget. Jelölje az A -ból induló magasság talppontját P , a B -ből indulóét R ; a BC oldal felezőpontja A' és A' -ből AC -ra állított merőleges talppontja Q (1960/4.1. ábra). Vegyük észre, hogy $A'Q = \frac{m_b}{2}$, mivel a BRC háromszög középvonala, továbbá: a P és



60/4.1. ábra

Q pontokból az AA' súlyvonal derékszögben látszik, ezért rajta vannak az AA' fölé szerkesztett Thalész-körön.

Ezekből az észrevételekből már kiolvasható a szerkesztés menete: az $AA' = s_a$ átmérő fölé kört szerkesztünk, ebből az A' középpontú $\frac{m_b}{2}$ sugarú kör a Q pontot, az A középpontú m_a sugarú pedig a P -t metszi ki. Az AQ és $A'P$ egyenesek metszéspontja C , C -nek A' -re való tükörképe pedig B . Az ABC háromszögnek AA' súlyvonala, $AP = m_a$ magassága és a B -hez tartozó magasság $2 \cdot \frac{m_b}{2} = m_b$, tehát ABC megfelel a feladat feltételeinek.

A szerkesztés elvégezhető, ha a kívánt metszéspontok létrejönnek, azaz $m_a \leq s_a$, $\frac{m_b}{2} \leq s_a$ és AQ nem párhuzamos $A'P$ -vel. Általában két megoldás van, mert a szerkesztésnél alkalmazott segédkörök a Thalész-kört rendszerint két pontban metszik.

Ha $m_a = s_a > \frac{m_b}{2}$, A' és P egybeesik, az $A'P$ egyenes a kör érintője, a megoldás egyetlen egyenlő szárú háromszög.

Ha $m_a < s_a = \frac{m_b}{2}$, Q azonos A -val, most AQ körérintő.

Ha $m_a = s_a = \frac{m_b}{2}$, nincs megoldás, mert a két érintő párhuzamos.

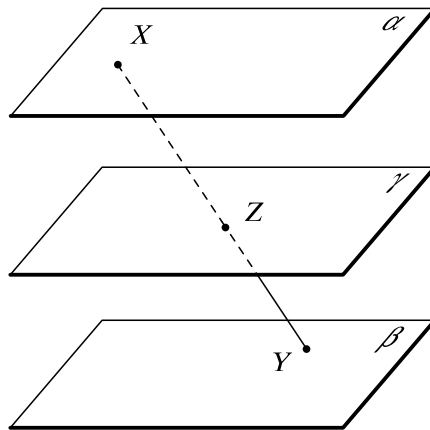
Ha $s_a > \frac{m_b}{2} = m_a$, csak egy megoldás van, mert az egyik esetben AQ és $A'P$ párhuzamosak.

1960/5. Adott egy $ABCD A' B' C' D'$ kocka. Jelöljük X -szel a kocka AC lapátlójának tetszés szerinti pontját, Y -nal pedig a $B' D'$ lapátló egy tetszés szerinti pontját.

Mi a mértani helye valamennyi XY szakasz felezőpontjának?

Tekintsük valamennyi XY szakasznak azt a Z pontját, amelyre fennáll a $ZY = 2XZ$ egyenlőség és keressük meg ezeknek a Z pontoknak a mértani helyét!

Megoldás. A feladat megoldásánál a következő segédtelet használjuk fel: legyen α , β és γ három párhuzamos sík, γ az α és β között helyezkedik el és az α és β közötti távolságot $a : b$ arányban osztja. Ha X az α , Y pedig a β sík tetszőleges pontja, akkor azoknak a Z pontoknak a mértani helye, amelyek az XY szakaszt $a : b$ arányban osztják fel (pontosabban: amelyekre $XZ : ZY = a : b$ teljesül), éppen a γ sík (1960/5.1. ábra).

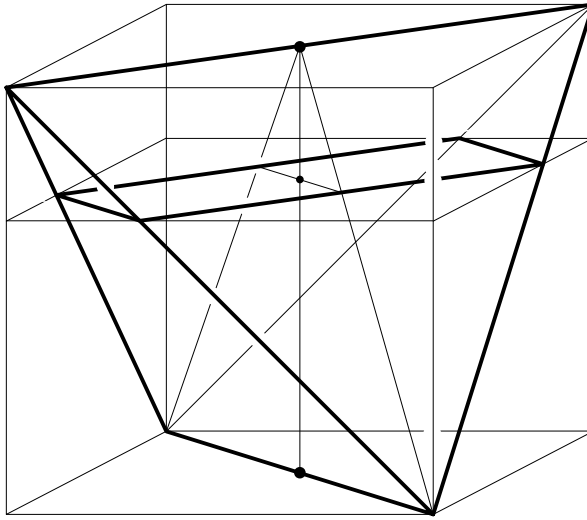


60/5.1. ábra

Keressük meg először azoknak a pontoknak a mértani helyét, amelyek a feladatban leírt XY szakaszokat $a : b$ arányban osztják. A kocka $ABCD$ alaplapja és $A' B' C' D'$ fedőlapja párhuzamos síkokban vannak, ezért segédteletünk szerint a szóban forgó Z pontok olyan γ síkra illeszkednek, amely az alap- és fedőlap távolságát $a : b$ arányban osztja (1960/5.2 ábra).

Az A , C , B' , D' pontok a kockába írt szabályos tetraéder csúcsai, s mivel a tetraéder konvex test, tehát belsejében vagy határán tartalmazza bármely két pontjának összekötő szakaszát, az XY szakaszok s így azok Z pontjai is a tetraéderek belsejében vagy határán vannak; a keresett mértani hely (ponthalmaz) tehát közös része γ -nak és a tetraédernek.

γ a szabályos tetraédert téglalapban metszi. Ez abból következik, hogy ha két metsző síkot a metszésvonalakkal párhuzamos síkkal metszünk el, akkor a kapott két metszésvonal párhuzamos lesz a két sík metszésvonalával: az $AB' D'$



60/5.2. ábra

és $CB'D'$ síkok esetén a $B'D'$ -vel, a $B'AC$ és $D'AC$ síkok esetén pedig AC -vel. A metszetréteg szögkötő oldalai tehát párhuzamosak, de a szomszédosak merőlegesek egymásra, hiszen a velük párhuzamos lapátlók: $B'D'$, ill. AC is merőlegesek.

Ábránknak megfelelően jelölje a téglalap négy csúcsát: P, Q, R, S . Megmutatjuk, hogy e téglalap minden belső- és határpontja hozzá tartozik a keresett pontthalmazhoz. Legyen ui. Z egy ilyen pont. A Z -n át AC -vel húzott párhuzamos AC -vel együtt egy síkot határoz meg, ez a sík a tetraéderből egy háromszöget metsz ki, ennek AC -vel szemközti Y csúcsa a $B'D'$ átlón van. Az YZ egyenes benne van az ACY háromszög síkjában és ezért metszi AC -t egy belső (vagy határon lévő) X pontban. Mivel Z a γ síkon van, segédtevéünk szerint $XZ : ZY = a : b$, tehát Z valóban hozzátartozik a mértani helyhez.

A feladatban keresett mértani hely tehát az $AB'CD'$ szabályos tetraédernek olyan téglalapsíkjai, amelynek síkja párhuzamos az $ABCD$ és $A'B'C'D'$ kockalapok síkjával és azok távolságát $a : b$ arányban osztja.

A feladat a) részében $a = b$, tehát γ középpárhuzamos sík, a kapott téglalap csúcsai az $AB', B'C, CD', D'A$ élek felezőpontjai; a b) részében kapott téglalap csúcsai pedig az előbbi éleket $1 : 2$ arányban osztó pontok.

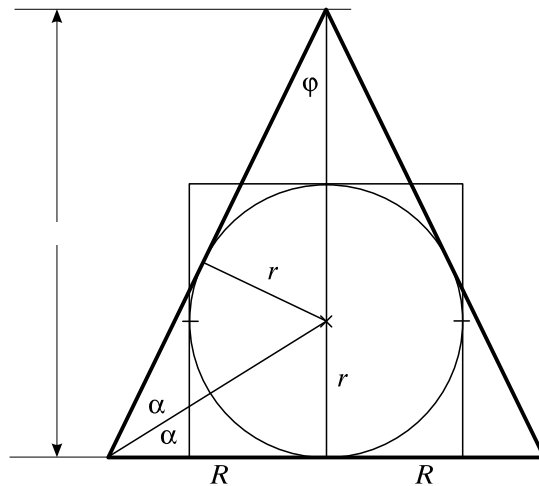
Megjegyezzük, hogy az a) esetben kapott téglalap négyzet, mert minden oldala fele a kocka lapátlójának, a négyzet csúcsai a kocka négy lapjának a középpontjával azonosak.

1960/6. Adott egy forgáskúp. Írjunk bele gömböt, majd e gömb köré hengert úgy, hogy annak alaplappja legyen rajta a kúp alapkörének a síkján. Jelölje V_1 a kúp, V_2 pedig a henger térfogatát.

Bizonyítsuk be, hogy V_1 nem lehet egyenlő V_2 -vel.

Állapítsuk meg annak a k számnak a legkisebb értékét amelyre még fennállhat a $V_1 = kV_2$ egyenlőség, és ha k ezt a minimális értéket veszi fel, szerkesszük meg azt a szöveget, amelyet a kúp alkotói a tengellyel bezárnak.

1. megoldás. A feladat kúpból, gömbből és hengerből álló összetett alakzatát metsszük el a közös forgástengelyükön átmenő síkkal; a tengelymetszet egy egyenlő szárú háromszögből, annak beírt köréből és e kör köré írt négyzetből áll (1960/6.1. ábra). A háromszög alapja a kúp alapkörének $2R$ átmérőjével, beírt



60/6.1. ábra

körének sugara a gömb r sugarával egyenlő.

Mivel a háromszögbe írt kör sugara a terület és a félkerület hányadosa, ha a háromszög (azaz: a kúp) magasságát m -mel jelöljük,

$$r = \frac{Rm}{R + \sqrt{R^2 + m^2}}.$$

Ebből: $r\sqrt{R^2 + m^2} = R(m - r)$,

$$R^2 = \frac{r^2 m}{m - 2r}.$$

Minthogy $V_1 = \frac{r^2 m^2 \pi}{3(m - 2r)}$ és $V_2 = 2r^3 \pi$,

$$k = \frac{V_1}{V_2} = \frac{m^2}{6(mr - 2r^2)} = \frac{1}{6\left(\frac{r}{m} - 2\frac{r^2}{m^2}\right)},$$

k értéke akkor minimális, ha a kapott tört nevezője maximális. Alakítsuk át a nevezőt:

$$-12 \left(\left(\frac{r}{m} - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{1}{16} \right) = -12 \left(\frac{r}{m} - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{3}{4},$$

ez azt jelenti, hogy a nevező maximuma $\frac{3}{4}$, tehát k minimuma $\frac{4}{3}$ és ezt akkor veszi fel, ha $\frac{r}{m} = \frac{1}{4}$, azaz $m = 4r$.

Ennek alapján a kúp φ félnyílásszögét úgy szerkeszthetjük meg, hogy egy (tetszőleges) r sugarú körhöz középpontjától $3r$ távolságra levő pontból érintőket szerkesztünk és a két érintő szögét megfigyeljük.

Eredményünk már tartalmazza az a) feladatrész bizonyítását is: mivel k minimuma $\frac{4}{3}$, az 1 értéket nem veheti fel, tehát $V_1 = V_2$ nem lehetséges.

2. megoldás. Az 1960/6.1. ábra jelölését használva a kúpalkotók az alapsíkkal 2α szöget zárnak be, ezért

$$r = R \operatorname{tg} \alpha, \quad m = R \operatorname{tg} 2\alpha,$$

ennek felhasználásával a kúp, ill. henger térfogata

$$V_1 = \frac{R^3 \pi \cdot \operatorname{tg} 2\alpha}{3}, \quad V_2 = 2\pi R^3 \operatorname{tg}^3 \alpha,$$

ebből

$$k = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{6 \operatorname{tg}^3 \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{6 \operatorname{tg}^3 \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)} = \frac{1}{3(-\operatorname{tg}^4 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha)} = \frac{1}{-3 \left(\operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}}.$$

Ez viszont azt jelenti, hogy a nevező maximuma $\frac{3}{4}$, tehát k minimuma $\frac{4}{3}$; ebből az is következik, hogy $k = 1$, azaz $V_1 = V_2$ nem lehetséges.

Minimális k esetén egyébként $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{2}$, s mivel α hegyesszög $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = 2\sqrt{2}. \text{ Ebből}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} (90^\circ - 2\alpha) = \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

amiből φ már szerkeszthető.

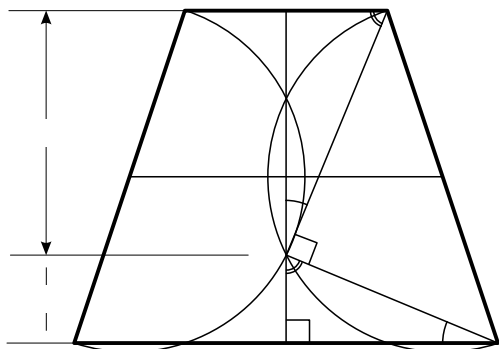
1960/7. Egy szimmetrikus trapéz párhuzamos oldalainak a hossza a és b , magassága m .

Szerkesszük meg a trapéz szimmetriatengelyének azt a P pontját, amelyből a szárak derékszög alatt láthatók.

Számítsuk ki P távolságát az egyik párhuzamos oldaltól.

Mi a P pont létezésének feltétele?

Megoldás. Az $ABCD$ trapéz $AB=a$ alapját a szimmetriatengely a Q , $CD=b$ alapját pedig az S pontban metszi. A szimmetriatengely P pontjából akkor látszanak a szárak derékszögben, ha P rajta van (bármelyik szár fölé szerkesztett Thálész-körön (1960/7.1. ábra); ez ad lehetőséget P szerkesztésére.



60/7.1. ábra

Legyen $PQ=x$, ekkor $PS=m-x$. CSP és PQB hasonló derékszögű háromszögek, mert hegyesszögeik merőleges szárú szögek. A hasonlóságból:

$$(m-x) : \frac{b}{2} = \frac{a}{2} : x,$$

ebből

$$x^2 - mx + \frac{ab}{4} = 0,$$

$$x = \frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2 - ab}{4}}.$$

A kapott két x érték P -nek a párhuzamos oldalakból mért két távolsága (összegük éppen m). P akkor létezik, ha a négyzetgyök alatt nemnegatív szám van, azaz $m^2 \geq ab$. $m^2 > ab$ esetén két P pont is megfelel a feladat feltételének, ezek azonban — mint a szerkesztésből is látszik — a trapéz középvonalára szimmetrikus helyzetűek.

Ha $m^2 = ab$, $x = \frac{m}{2}$, a Thálész kör érinti a szimmetriatengelyt; könnyen látható, hogy ekkor a trapéz érintőnégyyszög.

1961.

1961/1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} (1) \quad & x + y + z = a \\ (2) \quad & x^2 + y^2 + z^2 = b^2, \\ (3) \quad & xy = z^2, \end{aligned}$$

ahol a és b adott számok. Milyen feltételt kell teljesíteniök az a és b számoknak, hogy az egyenletrendszer megoldását adó x, y, z számok mind pozitívak és különbözők legyenek?

Megoldás. Vonjuk ki (1) négyzetéből (2)-t, majd helyettesítsük (3) alapján xy -t z^2 -tel:

$$\begin{aligned} 2xy + 2xz + 2yz &= a^2 - b^2, \\ 2z^2 + 2z(x+y) &= a^2 - b^2. \end{aligned}$$

Helyettesítsük $x+y$ -t az (1)-ből adódó $a-z$ -vel:

$$2z^2 + 2az - 2z^2 = a^2 + b^2.$$

Ha $a=0$, akkor előző egyenletünkben $b=0$ és (2)-ből $x=y=z=0$ következik, ami a feltételek szerint nem megoldás. Ezért $a \neq 0$ és így

$$z = \frac{a^2 - b^2}{2a}, \quad z^2 = \frac{(a^2 - b^2)^2}{4a^2}.$$

Így most már $x+y$ -t és xy -t az adott paraméterekkel tudjuk kifejezni:

$$(4) \quad x+y = a-z = \frac{a^2 + b^2}{2a} \quad \text{és} \quad xy = z^2 = \frac{(a^2 - b^2)^2}{4a^2}.$$

Felírhatjuk azt az u -ban másodfokú egyenletet, amelynek x és y a megoldásai:

$$4a^2u^2 - 2a(a^2 + b^2)u + (a^2 - b^2)^2 = 0.$$

Ennek megoldásai

$$\begin{aligned} (5) \quad u_{1,2} &= \frac{1}{8a^2} \left(2a(a^2 + b^2) \pm \sqrt{4a^2(a^2 + b^2)^2 - 16a^2(a^2 - b^2)^2} \right) = \\ &= \frac{1}{4a} \left(a^2 + b^2 \pm \sqrt{(3a^2 - b^2)(3b^2 - a^2)} \right). \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldásai tehát $a \neq 0$ esetén:

$$\begin{aligned} x &= u_1, & y &= u_2, & z &= \frac{a^2 - b^2}{2a}, \\ x &= u_2, & y &= u_1, & z &= \frac{a^2 - b^2}{2a}, \end{aligned}$$

ezek nyilván kielégítik az egyenletrendszert.

Vizsgáljuk most meg, milyen feltételek mellett léteznek ezek a megoldások. (1)-ből következik, hogy $a > 0$ -nak teljesülnie kell; z pozitív voltához pedig $a > |b|$ szükséges. (4)-ből következik, ha a megoldások léteznek, x és y pozitív. x és y akkor különbözők, ha az (5) alatti diszkrimináns pozitív; $a > |b|$ miatt ehhez az szükséges, hogy $|b|\sqrt{3} > a$ teljesüljön. Ebben az esetben x és y egyike sem lehet z -vel egyenlő, mert ha pl. $x=z$, akkor (3)-ból $y=z$ is tehát $x=y$ következne, ami kikötéseink miatt lehetetlen. Összefoglalva: az egyenletrendszerünknek akkor létezik a kívánt megoldása, ha

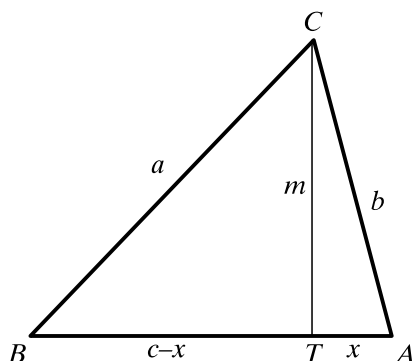
$$|b| < a < |b|\sqrt{3}.$$

Megjegyzés. Feladatunknak geometriai háttérrel is tulajdoníthatunk: (1) olyan sík egyenlete, amely a koordinátatengelyekből a hosszúságú szakaszokat metsz

le, s így az origótól mért távolsága $\frac{a}{\sqrt{3}}$. (2) origó középpontú $|b|$ sugarú gömb egyenlete; ezért közös pontjuk csak akkor létezik, ha $|b| \geq \frac{a}{\sqrt{3}}$, azaz $a \leq |b|\sqrt{3}$. (3) viszont origó csúcsú kúp egyenlete, alapgörbéinek az xy koordinátságokkal párhuzamos síkban fekvő hiperbolák tekinthetők.

1961/2. A háromszög oldalai a, b, c , területe t . Bizonyítsuk be, hogy
(1) $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4t\sqrt{3}$
Milyen esetben áll fenn egyenlőség?

1. megoldás. Legyen az ABC háromszög (egyik) legnagyobb szöge C -nél, ebben az esetben a C -ből induló m magasság T talppontja az AB oldal belsejében van, és jelölje AT -t x (1961/2.1. ábra). Használjuk fel a $cm = 2t$



61/2.1. ábra

területképletet és állítsuk elő a^2 -et és b^2 -et Pitagorász tétele segítségével:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 - 4t\sqrt{3} &= (m^2 + (c-x)^2) + (m^2 + x^2) + c^2 - 2\sqrt{3}cm = \\ &= 2c^2 + 2m^2 + 2x^2 - 2cx - 2\sqrt{3}cm = \\ &= \frac{1}{2}[(c-2x)^2 + (c\sqrt{3} - 2m)^2] \geq 0, \end{aligned}$$

ami bizonyítandó volt.

Egyenlőség csak $x = \frac{c}{2}$, $m = \frac{c\sqrt{3}}{2}$ esetén áll fenn, ami éppen azt jelenti, hogy a háromszög szabályos.

2. megoldás. (1) egyenértékű az

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 48t^2 = 3 \cdot 16t^2$$

egyenlőtlenséggel. Ennek bizonyítására használjuk fel Héron képletének a következő alakját [16]:

$$16t^2 = -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2.$$

Ezzel azt kell igazolnunk, hogy

$$a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 \geq -3a^4 - 3b^4 - 3c^4 + 6a^2b^2 + 6b^2c^2 + 6c^2a^2,$$

Ez viszont egyenértékű az

$$(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 \geq 0$$

egyenlőtlenséggel, ami nyilván mindig teljesül; egyenlőség csakis $a = b = c$ esetben áll fenn.

3. megoldás. Induljunk ki ismét Héron képletéből. A számtani-mértani közép egyenlőtlenségéből

$$(s-a)(s-b)(s-c) \leq \left(\frac{(s-a) + (s-b) + (s-c)}{3} \right)^3 = \frac{s^3}{27},$$

ezért

$$(2) \quad t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \sqrt{\frac{s^4}{27}} = \frac{s^2}{3\sqrt{3}},$$

és egyenlőség csak szabályos háromszög esetén áll fenn. Ebből a számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenség felhasználásával kapjuk:

$$4t\sqrt{3} \leq 3 \left(\frac{2s}{3} \right)^2 = 3 \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^2 \leq 3 \frac{a^2+b^2+c^2}{3} = a^2+b^2+c^2,$$

és egyenlőség csakis $a = b = c$ esetben áll fenn.

4. megoldás. Használjuk fel a $2t = ab \sin \gamma$ területképletet, továbbá a koszinusz-tételből a $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ összefüggést.

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 - 4t\sqrt{3} &= 2a^2 + 2b^2 - 4ab \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \gamma + \frac{1}{2} \cos \gamma \right) = \\ &= 2a^2 + 2b^2 - 4ab \sin(\gamma + 30^\circ) \geq \\ &\geq 2a^2 + 2b^2 - 4ab = 2(a-b)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Egyenlőség csak $a = b$, $\gamma = 60^\circ$ esetén, tehát szabályos háromszögre áll fenn.

5. megoldás. Egyenlőtlenségünket lényegesen finomíthatjuk. Ehhez felhasználjuk a pozitív x, y, z számokra azonosan teljesülő

$$(3) \quad \sqrt{3xyz(x+y+z)} \leq xy + yz + zx$$

egyenlőtlenséget. Induljunk ki a nyilvánvaló

$$0 \leq (xy - yz)^2 + (yz - zx)^2 + (zx - xy)^2$$

egyenlőtlenségéből. Négyzetreemelés után átrendezéssel kapjuk:

$$3x^2yz + 3xy^2z + 3xyz^2 \leq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2x^2yz + 2xy^2z + 2xyz^2,$$

$$3xyz(x+y+z) \leq (xy + yz + zx)^2,$$

amiből a bizonyítandó már következik. Egyenlőség csak $x = y = z$ esetén.

Alkalmazzuk most (3)-at $x = s - a$, $y = s - b$, $z = s - c$, $x + y + z = s$ szereposztással a Héron képletből nyert $t\sqrt{3}$ összefüggésre:

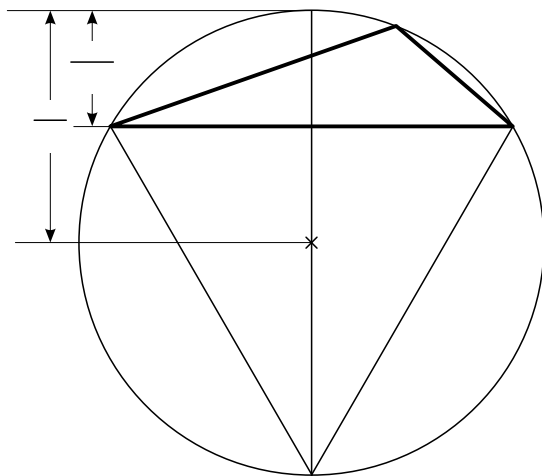
$$\begin{aligned} t\sqrt{3} &= \sqrt{3(s-a)(s-b)(s-c)s} \leq (s-a)(s-b) + (s-b)(s-c) + (s-c)(s-a) \\ &= 3s^2 - s(2a+2b+2c) + ab+bc+ca = \\ &= -s^2 + ab+bc+ca = \frac{1}{4}(-(a+b+c)^2 + 4ab+4bc+4ca) = \\ &= \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2 - (a-b)^2 - (b-c)^2 - (c-a)^2). \end{aligned}$$

Ebből kapjuk, hogy

$$(4) \quad 4t\sqrt{3} \leq a^2 + b^2 + c^2 - (a-b)^2 - (b-c)^2 - (c-a)^2,$$

és egyenlőség csak $a = b = c$ mellett teljesül. (4)-ből (1) nyilván következik.

6. megoldás. Ez a megoldás a feladat legvalószínűbb eredetére mutat rá, ti. arra, hogy a feladat állítása nyilvánvalóan igaz, ha a háromszögnek van 120° -nál nem kisebb szöge. Legyen ui. az ABC háromszög A -nál levő szöge 120° -nál nem kisebb és legyen $BC = a$. Szerkesszük meg az a oldalú $A'BC$ szabályos háromszöget, az e köré írt kör sugara $\frac{a}{\sqrt{3}}$ (1961/2.2. ábra). Helyezzük el az

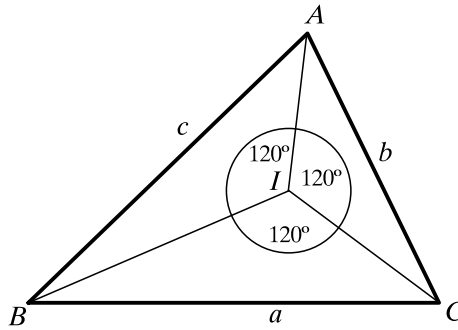


61/2.2. ábra

ABC háromszöget a BC oldal A' -vel ellentétes oldalára, az A csúcs a szabályos háromszög köré írt körön, vagy azon belül helyezkedik el, ezért az A -hoz tartozó magasság legfeljebb a sugár fele és így ABC területe:

$$t \leq \frac{1}{2}a \cdot \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a^2}{4\sqrt{3}},$$

ebből $4t\sqrt{3} \leq a^2$, tehát az ABC háromszögre $4t\sqrt{3} \leq a^2 + b^2 + c^2$ még inkább teljesül.



61/2.3. ábra

Ha az ABC háromszögnek kisebbek a szögei 120° -nál, akkor van a belsejében olyan I pont (izogonális pont [4]), amelyből minden oldal 120° -os szögben látszik (1961/2.3. ábra). Előző megjegyzésünk szerint az IAB , IBC , ICA háromszögek területei rendre nem nagyobbak, mint $\frac{c^2}{4\sqrt{3}}$, $\frac{a^2}{4\sqrt{3}}$, $\frac{b^2}{4\sqrt{3}}$, tehát ABC területére

$$t \leq \frac{a^2}{4\sqrt{3}} + \frac{b^2}{4\sqrt{3}} + \frac{c^2}{4\sqrt{3}}$$

teljesül, amiből már (1) következik. Egyenlőség akkor állhat, ha a részháromszögek egyenlő szárúak, azaz I a köré írt kör középpontja, tehát ABC szabályos.

Megjegyzések. Megoldásaink sorát még hosszan folytathatnánk; ennek az oka, hogy (1) a háromszög-geometria olyan alapvető egyenlőtlensége, amely számos egyéb egyenlőtlenséggel is kapcsolatos; vizsgálatainak már kötetnyi irodalma van. Elsőnek R. Weitzenböck közölte 1919-ben, a (4)-beli finomítás pedig P. Finsler-től és H. Hadwiger-től való (1937). Néhány érdekesebb kapcsolat:

1. Ha az a, b, c oldalú háromszög oldalai fölé befelé szabályos háromszögeket szerkesztünk, ezek középpontjai olyan szabályos háromszögnek a csúcsai, amely oldalának négyzete

$$\frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2 - 4t\sqrt{3}).$$

2. A háromszög oldalainak a négyzetösszege, a terület és a szögek között fennáll az

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4t(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma)$$

összefüggés [2]. Ebből már következik, hogy (1) egyenértékű a

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma \geq \sqrt{3}$$

ún. kotangens-egyenlőtlenséggel [3].

3. Egy F. Goldnertől származó egyenlőtlenség:

$$4t\sqrt{3} \leq \sqrt{3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)} \leq a^2 + b^2 + c^2.$$

4. Ha r, r_a, r_b, r_c a beírt, ill. hozzáírt körök sugarai, (4)-gyel egyenértékű az

$$r(r_a + r_b + r_c) \geq t\sqrt{3}$$

egyenlőtlenség.

5. A 3. megoldás (2) egyenlőtlensége azt jelenti, hogy az adott $2s$ kerületű háromszögek közül a szabályos háromszög területe a legnagyobb; a maximum értéke $\frac{s^2}{3\sqrt{3}} = \frac{s^2}{3} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}$. Bebizonyítható ennek a tételnek az általánosítása: adott $2s$ kerületű n -szögek közül a szabályos n -szög területe a legnagyobb, ennek a maximális területnek a mértéke $\frac{s^2}{n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$. Ebből a 3. megoldás módszerét követve igazolhatjuk, hogy

ha egy n -szög oldalai a_1, a_2, \dots, a_n , területe t , akkor

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq 4t \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}.$$

1961/3. Oldjuk meg a

$$\cos^n x - \sin^n x = 1$$

egyenletet, ahol n tetszőleges pozitív egész.

Megoldás. Tegyük fel először, hogy $n = 1$, egyenletünk ebben az esetben a következő alakban írható:

$$\begin{aligned} \cos x - \sin x &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \right) = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + x \right) = 1, \\ \cos \left(\frac{\pi}{4} + x \right) &= \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{aligned}$$

ebből $x = 2k\pi$, ill. $x = (4k + 3)\frac{\pi}{2}$, k itt és a továbbiakban tetszőleges egész.

Legyen most $n \geq 2$. Alakítsuk át egyenletünket:

$$\begin{aligned} \cos^n x - \sin^n x &= \cos^2 x + \sin^2 x, \\ \sin^2 x (1 + \sin^{n-2} x) + \cos^2 x (1 - \cos^{n-2} x) &= 0. \end{aligned}$$

A bal oldali tagok tényezői nem negatívak, ezért a tagok sem negatívak, összegük csak úgy lehet 0, ha külön-külön is 0-val egyenlők:

- (1) $\sin^2 x (1 + \sin^{n-2} x) = 0.$
- (2) $\cos^2 x (1 - \cos^{n-2} x) = 0.$

Az (1) esetben két lehetőség van:

- a) $\sin x = 0,$
- b) $\sin^{n-2} x = -1.$

a) Ebben az esetben $x = k\pi$. (2)-ben akkor $\cos^2 x = 1$, tehát (2) csak akkor teljesülhet, ha $\cos^{n-2} x = 1$. Ez páros n -re mindig teljesül, páratlan n -re viszont csak akkor, ha $\cos x = 1$, azaz $x = 2k\pi$.

b) Ez csak páratlan n esetén állhat fenn, ekkor $\sin x = -1$, $x = (4k+3)\frac{\pi}{2}$. Erre az x -re viszont $\cos x = 0$, tehát (2) mindig teljesül.

A vizsgált eseteket foglaljuk össze megjegyezve, hogy átalakításaink mindenkor egyenértékű egyenletekre vezettek:

$$\text{ha } n \text{ páros,} \quad x = k\pi,$$

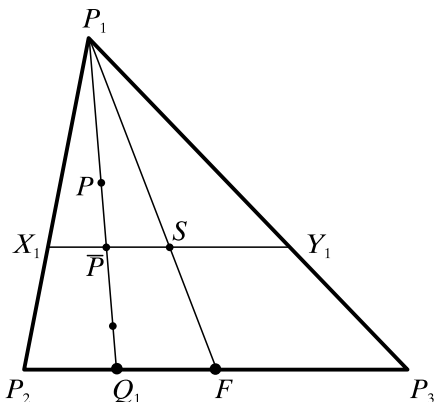
$$\text{ha } n \text{ páratlan,} \quad x = 2k\pi \text{ és } x = (4k+3)\frac{\pi}{2}.$$

1961/4. A $P_1P_2P_3$ háromszög belsejében adott egy tetszőleges P pont. A P_1P , P_2P , P_3P egyenesek metszéspontja a szemközti oldallal legyen Q_1 , Q_2 , illetve Q_3 . Bizonyítsuk be, hogy a

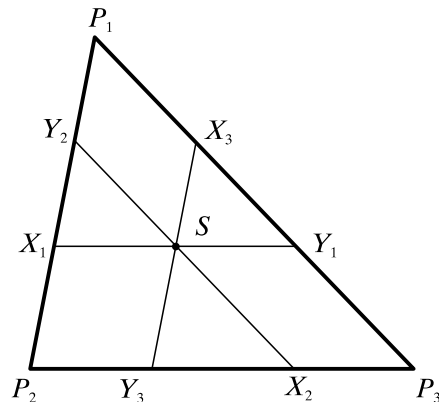
$$\frac{P_1P}{PQ_1}, \frac{P_2P}{PQ_2}, \frac{P_3P}{PQ_3}$$

arányok között van olyan, amelyik nem nagyobb, és olyan is, amelyik nem kisebb mint 2.

1. megoldás. Húzzunk párhuzamost a háromszög S súlypontján át pl. a P_2P_3 oldallal, ez P_1P_2 -t X_1 -ben, P_1P_3 -at Y_1 -ben metszi (1961/4.1. ábra). Mivel X_1Y_1 harmadolja a P_1 -ből induló P_1F súlyvonalat, harmadol minden olyan szakaszt, amely P_1 -et P_2P_3 pontjaival köti össze. X_1Y_1 a háromszöget egy $P_1X_1Y_1$ háromszög tartományra és egy $X_1Y_1P_3P_2$ trapéztartományra vágja szét, X_1Y_1 -et mindkettőhöz hozzászámítjuk, a tartományokat P_1 -hez tartozónak mondjuk.



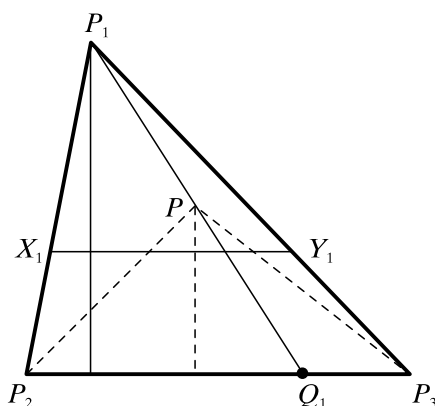
61/4.1. ábra



61/4.2. ábra

Ha P a háromszögtartományban van, akkor nyilván $\frac{P_1P}{PQ_1} \leq 2$, ha a trapéz-
tartományban, $\frac{P_1P}{PQ_1} \geq 2$. Hasonló megfontolás érvényes a másik két csúcshoz
tartozó háromszög-, ill. trapéztartományokra is.

Állításunk bizonyítására azt kell belátnunk, hogy a P tetszőleges választá-
sa mellett beletartozik valamelyik csúcs háromszögtartományába és egy csúcs
trapéztartományába is. Az 1961/4.2. ábrán látjuk, hogy a három háromszög-
tartomány együttesen bőven lefedi a $P_1P_2P_3$ háromszöget és ugyanez igaz a
trapéztartományokra is, tehát P tetszőleges választásánál benne van háromszög-
tartományban és trapéztartományban is.



61/4.3. ábra

2. megoldás. Az első megoldás gondolatmenetét követve azt mutatjuk meg,
hogy P háromszögtartományban és trapéztartományban is van. Világos, hogy P
akkor és csak akkor van a P_1 -hez tartozó háromszögtartományban, ha $\frac{PQ_1}{P_1Q_1} \geq$
 $\frac{1}{3}$ és a trapéztartományban, ha $\frac{PQ_1}{P_1Q_1} \leq \frac{1}{3}$ (1961/4.3. ábra). Viszont PQ_1 és
 P_1Q_1 aránya megegyezik a PP_2P_3 és $P_1P_2P_3$ háromszögek P_2P_3 -hoz tartozó
magasságaik arányával, tehát e háromszögek területének az arányával is, mivel
alapjuk közös. Ha a PP_2P_3 , PP_3P_1 , PP_1P_2 háromszögek területét rendre t_1 ,
 t_2 , t_3 jelöli és $P_1P_2P_3$ területe: $t_1 + t_2 + t_3 = t$, akkor

$$\frac{PQ_1}{P_1Q_1} = \frac{t_1}{t}, \quad \frac{PQ_2}{P_2Q_2} = \frac{t_2}{t}, \quad \frac{PQ_3}{P_3Q_3} = \frac{t_3}{t},$$

s mivel

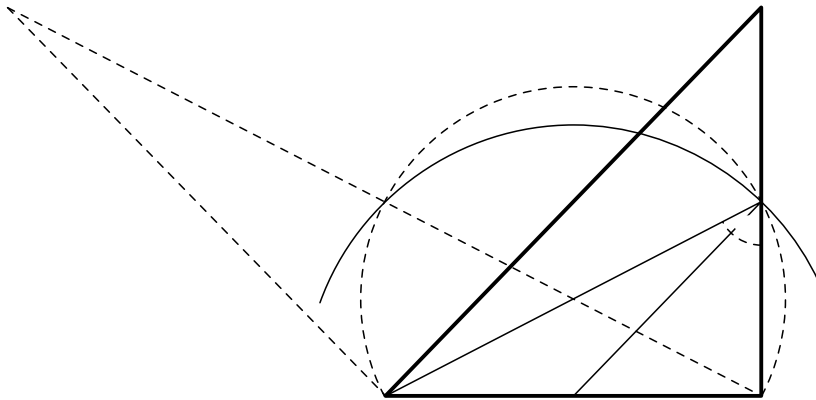
$$\frac{t_1}{t} + \frac{t_2}{t} + \frac{t_3}{t} = \frac{t}{t} = 1,$$

e három arány között kell $\frac{1}{3}$ -nál nem kisebbnek és $\frac{1}{3}$ -nál nem nagyobbak is lennie, amit éppen bizonyítanunk kellett.

1961/5. Szerkesztendő az ABC háromszög, ha adott két oldalának $AC = b$, $AB = c$ hossza és az $AMB = \omega$ szög, ahol M a BC szakasz felezőpontja; ω hegyesszög. Bizonyítandó, hogy a feladat akkor és csakis akkor oldható meg, ha

$$\text{btg } \frac{\omega}{2} \leq c < b.$$

Megoldás. Induljunk ki a megszerkesztett háromszögből (1961/5.1. ábra). Az M pont rajta van az $AB = c$ fölé szerkesztett ω látószögű köríven, s ha AB



61/5.1. ábra

felezőpontja F , az FM középvonal hossza $\frac{b}{2}$, ezért M rajta van az F körül $\frac{b}{2}$ sugárral szerkesztett körön.

Ennek alapján a szerkesztés: AB fölé ω látószögű körívet szerkesztünk, az F középpontú $\frac{b}{2}$ sugarú kör ebből kimetszi M -et. BM -et M -en túl kétszeresére növelve megkapjuk C -t. Az ABC háromszög megfelel a feladat feltételeinek, hiszen AM így súlyvonal és $AC = 2FM = b$, $AMB \sphericalangle = \omega$.

A megoldhatóságnak az a feltétele, hogy az F középpontú $\frac{b}{2}$ sugarú s segédkör messe a k látókörívet. Mivel ω hegyesszög, az AB fölé szerkesztett Thalész-félkör teljesen k belsejében van, s tehát csak akkor metszi k -t, ha sugara nagyobb, mint $\frac{c}{2}$, tehát $b > c$. Viszont a metszésnek az is feltétele, hogy s -nek az AB -től leg távolabbi pontja ne legyen messzebb AB -ből, mint a k körív



ugyancsak AB -től legtávolabbi pontja. Mivel e pontok távolságai AB -től $\frac{b}{2}$, ill. $\frac{c}{2} \operatorname{ctg} \frac{\omega}{2}$ (1961/5.2. ábra) ezért

$$\frac{b}{2} \leq \frac{c}{2} \operatorname{ctg} \frac{\omega}{2}, \quad \text{azaz} \quad b \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \leq c.$$

A szerkeszthetőség feltétele tehát

$$b > c \geq b \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}.$$

Ennek teljesülése esetén két megoldás van (az 1961/5.1. ábrán a második megoldást szaggatott vonallal rajzoltuk meg).

1961/6. Adott az ε sík, és a sík egyik oldalán az A, B, C pontok, amelyek nincsenek egy egyenesen, és az általuk meghatározott sík nem párhuzamos ε -nal. A', B', C' legyen az ε sík három tetszőleges pontja. Az AA', BB', CC' szakaszok felezőpontja legyen rendre L, M, N és az LMN háromszög súlypontja legyen G . (Figyelmen kívül hagyjuk az olyan A', B', C' ponthármasokat, amelyekre vonatkozóan L, M, N nem alkot háromszöget.) Mi a G pontok mértani helye, ha A', B', C' egymástól függetlenül befutja az ε síkot?

Megoldás. Válasszuk origónak az ABC háromszög súlypontját (1961/6.1. ábra), a nagybetűkkel jelölt pontok O -ból kiinduló helyvektorait jelöljük a végpontjaiknak megfelelő kisbetűkkel. A súlypont alaptulajdonságaiból következik, hogy

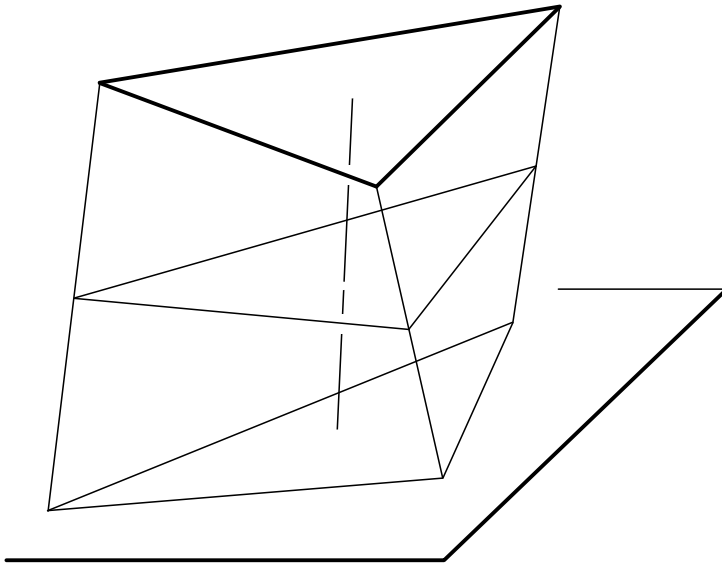
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

A megadott adatok szerint

$$\mathbf{l} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{a}'}{2}, \quad \mathbf{m} = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{b}'}{2}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{c} + \mathbf{c}'}{2},$$

ebből LMN súlypontjának helyvektora

$$\mathbf{g} = \frac{1}{3} \left(\frac{\mathbf{a} + \mathbf{a}'}{2} + \frac{\mathbf{b} + \mathbf{b}'}{2} + \frac{\mathbf{c} + \mathbf{c}'}{2} \right) = \frac{1}{6} ((\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) + (\mathbf{a}' + \mathbf{b}' + \mathbf{c}')) = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{a}' + \mathbf{b}' + \mathbf{c}'}{3} \right).$$



61/6.1. ábra

Jelölje az A' , B' , C' ponthármas súlypontját S' . A súlypont fogalmát egy egyenesen levő ponthármasra is kiterjesztjük: az A' , B' , C' ponthármas súlypontján a pontok tetszőleges elhelyezkedése mellett azt a pontot értjük, amelynek helyvektora $\frac{\mathbf{a}' + \mathbf{b}' + \mathbf{c}'}{3}$. Fenti eredményünk szerint tehát $\mathbf{g} = \frac{1}{2}\mathbf{s}'$, G -t ezért úgy kapjuk, hogy az ε sík egy S' pontját felére kicsinyítjük. G tehát benne van abban az ε' síkban, amely ε -ból O középpontú felező kicsinyítéssel jön létre, azaz ε' az ε és O távolságát felező, az ε -nal párhuzamos sík.

Megmutatjuk, hogy így az ε' minden pontját megkaphatjuk. Legyen ezért G az ε' tetszőleges pontja. Jelölje OG és ε metszéspontját S' . Válasszuk ki ε egy olyan A' pontját, hogy az AA' egyenes ne menjen át G -n, így az AA' szakasz L felezőpontja nem azonos G -vel. Illesszünk most B -re olyan egyenest, amely nem metszi sem LG -t, sem pedig $A'S'$ -t, de metszi ε -t egy B' pontban és legyen BB' felezőpontja M . Egészítsük ki az A' , B' , S' ponthármaszt egy C' ponttal úgy, hogy S' az $A'B'C'$ háromszög súlypontja legyen, és jelölje CC' felezőpontját N . Az előzőek szerint az LMN háromszög súlypontja S' felére kicsinyítettje, tehát G . L , M , N nincs egy egyenesen, mert ebben az esetben G is az egyenesükön lenne, ez pedig L és M választása miatt lehetetlen.

A szóban forgó mértani hely tehát az ε -nal párhuzamos ε' sík, amely felezi ABC súlypontjának és ε -nak a távolságát.

1962.

1962/1. Keressük meg azt a legkisebb x természetes számot, melynek a tízes számrendszerben felírt alakja 6-ra végződik, és ha ezt az utolsó 6-os számjegyet töröljük, de egyidejűleg a többi megmaradt számjegy elé egy 6-os számot írunk, akkor x négyszeresét kapjuk.

1. megoldás. Legyenek az eredeti n -jegyű szám számjegyei: $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0 = b$, tehát

$$x = 10^{n-1}a_{n-1} + 10^{n-2}a_{n-2} + \dots + 10a_1 + 6$$

A feladat szerint

$$4x = 6 \cdot 10^{n-1} + (10^{n-2}a_{n-1} + 10^{n-3}a_{n-2} + \dots + 10a_2 + a_1)$$

A zárójelben levő kifejezés $\frac{x-6}{10}$, ezért

$$4x = 6 \cdot 10^{n-1} + \frac{x-6}{10},$$

ebből

$$\begin{aligned} 40x &= 6 \cdot 10^n + x - 6, \\ 13x &= 2(10^n - 1). \end{aligned}$$

$10^n - 1$ -nek (tehát egy csupa 9-esből álló számnak) oszthatónak kell lennie 13-mal; ha elkezdjük az ilyen számokat vizsgálni, elsőnek 999 999-et találjuk 13-mal oszthatónak:

$$999\,999 = 13 \cdot 76\,923,$$

ezért

$$x = 2 \cdot 76\,923 = 153\,846,$$

és ez valóban kielégíti a feladatot.

2. megoldás. Ha a szám 6-ra végződik, négyszerese 4-re, tehát $x \dots 6$ alakú, $4x$ pedig $\dots 4$ alakú. De $4x$ úgy jön létre, hogy x végéről a 6-ost elhagytuk, tehát $x = \dots 46$ alakú. Most már $4x$ -nek is meg tudjuk mondani az utolsó két jegyét: $4x = \dots 84$. Ezt felhasználva x -ből és $4x$ -ből egyre több jegyet ismerhetünk meg:

x	$4x$
$\dots 46$	$\dots 84$
$\dots 846$	$\dots 384$
$\dots 3846$	$\dots 5384$
$\dots 53846$	$\dots 15384$
153846	615384

Ebből viszont már látjuk, hogy 153 846 kielégíti a feladat feltételét és ez az ilyen legkisebb szám.

1962/2. Határozzuk meg az összes olyan x valós számot, amely kielégíti a

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$$

egyenlőtlenséget.

Megoldás. Rendezzük át egyenlőtlenségünket a következő alakra:

$$\sqrt{3-x} > \frac{1}{2} + \sqrt{x+1}.$$

Az itt előforduló kifejezések a $-1 \leq x \leq 3$ intervallumban vannak értelmezve és itt pozitívak, egyenlőtlenségünk ezekre egyenértékű a négyzetre emeléssel kapott egyenlőtlenséggel:

$$\begin{aligned} 3-x &> \frac{1}{4} + x + 1 + \sqrt{x+1}, \\ \sqrt{x+1} &< \frac{7}{4} - 2x. \end{aligned}$$

Mivel a bal oldal nemnegatív, a jobb oldalnak pozitívnak kell lennie, ennek feltétele a

$$(1) \quad -1 \leq x < \frac{7}{8}$$

teljesülése. Ilyen x -ek esetén az egyenlőtlenség négyzetre emelése ekvivalens átalakítás, tehát

$$\begin{aligned} x+1 &< \frac{49}{16} - 7x + 4x^2, \\ (x-1)^2 &> \frac{31}{64}, \\ |x-1| &> \frac{\sqrt{31}}{8}, \end{aligned}$$

ebből

$$x > 1 + \frac{\sqrt{31}}{8} \quad \text{vagy} \quad x < 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}.$$

Az (1) feltételnek ebből csak az utóbbi tesz eleget, s minthogy ekvivalens átalakításokat végeztünk, egyenlőtlenségünk megoldása a

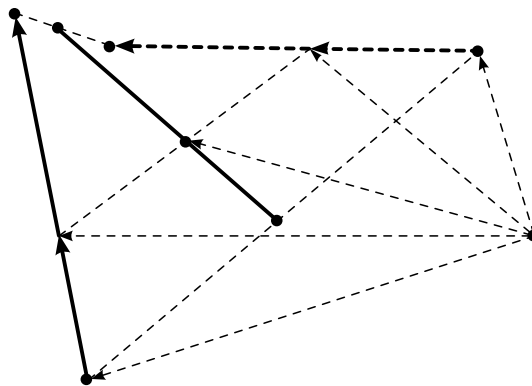
$$-1 \leq x < 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}.$$

feltételt kielégítő x számokból áll; megjegyezzük, hogy ezekre $1 - \frac{\sqrt{31}}{8} < \frac{7}{8}$ miatt az $x < \frac{7}{8}$ feltétel is teljesül.

1962/3. Adott az $ABCD A' B' C' D'$ kocka: két szemben fekvő lapja $ABCD$ és $A' B' C' D'$, ahol $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$. Az X pont állandó sebességgel futja be az $ABCD$ négyzet kerületét a felírt körüljárási irányban, míg az Y pont ugyanakkora sebességgel a $B' C' C B$ négyzet kerületét futja be, szintén az itt felírt körüljárási irányban. Az X és Y ugyanabban a pillanatban indul el az A , illetve B' pontokból. Mi az XY szakasz Z felezőpontjának mértani helye?

Megoldás. Megoldásunkat a következő segédtételekre alapozzuk: ha AB és CD két, tetszőleges elhelyezkedésű egységszakasz, rajtuk A -ból indulva B felé az X pont, C -ből indulva D felé az Y pont egyenletes sebességgel mozog, akkor az XY szakasz F felezőpontja az AC felezőpontját BD felezőpontjával összekötő szakaszt írja le.

Legyen ugyanis A helyvektora \mathbf{a} , C helyvektora \mathbf{c} , $\overrightarrow{AB} = \mathbf{e}_1$, $\overrightarrow{CD} = \mathbf{e}_2$ (1962/3.1. ábra); ekkor X és Y helyzetét az



62/3.1. ábra

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{y} = \mathbf{c} + \lambda \mathbf{e}_2 \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

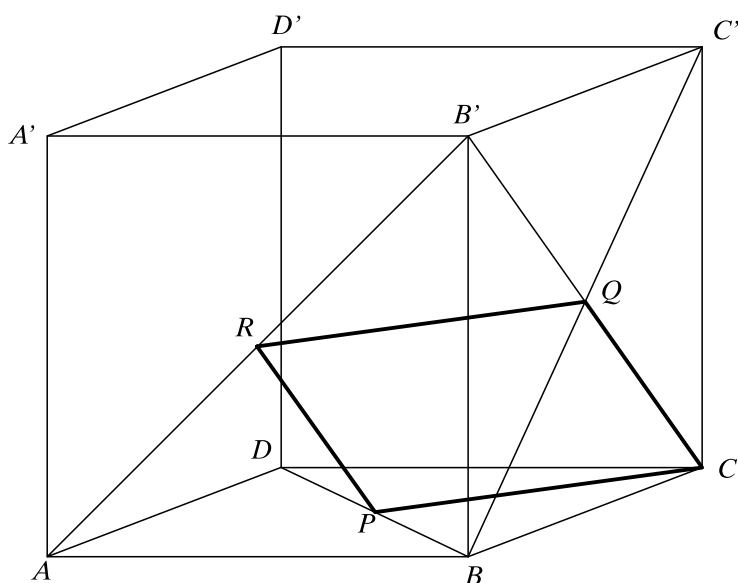
helyvektorok adják meg, míg F helyvektora

$$(1) \quad \mathbf{f} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{c}}{2} + \lambda \frac{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2}{2}.$$

F tehát rajta van azon a szakaszon, amelynek kezdő pontja ($\lambda = 0$) az AC felezőpontja és irányát az $\frac{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2}{2}$ vektor adja meg. A leírt szakasz végpontja ($\lambda = 1$) a BD szakasz felezőpontja, mivel ebben az esetben

$$\mathbf{f} = \frac{(\mathbf{a} + \mathbf{e}_1) + (\mathbf{c} + \mathbf{e}_2)}{2},$$

s ez éppen BD felezőpontjának a helyvektora. E szakasz minden pontja felezőpontja egy XY szakasznak, mivel az (1) alatti \mathbf{f} -hez egyértelműen hozzárendelhető egy \mathbf{x} és \mathbf{y} .



62/3.2. ábra

A feladatban leírt mozgást négy szakaszpáron való mozgásra bonthatjuk fel, a felezőpont mozgását segédvonalunk alapján határozzuk meg (1962/3.2 ábra). Legyen BD felezőpontja P , BC' felezőpontja Q és AB' felezőpontja R . A négy mozgás:

az X által befutott szakasz:	Y által befutott szakasz:
1. AB ,	$B'C'$,
2. BC ,	$C'C$,
3. CD ,	CB ,
4. DA ,	BB' .

Segédvonalunk szerint a felezőpont által leírt szakasz pl. az 1. esetben az AB' R felezőpontját a BC' Q felezőpontjával összekötő RQ szakasz, a 2. esetben a QC szakasz, a 3. esetben a CP szakasz, a 4. esetben a PR szakasz.

Segédvonalunk szerint ezeknek a szakaszoknak minden pontja hozzátartozik a mértani helyhez. A mértani hely tehát a $PCQR$ négyszög. Mivel RQ mérőleges vetülete az $ABCD$ lapon, $R'Q' = RQ = PC$, továbbá $R'Q'$ párhuzamos RQ -val és PC -vel is, $PCQR$ paralelogramma, sőt rombusz, minthogy QC is és CP is fél-fél lapátlóval egyenlő. A rombusz hegyesszöge 60° -os, mert az egy csúcsból induló lapátlók 60° -os szöget zárnak be egymással.

1962/4. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1.$$

Megoldás. Végezzük el a szokásos

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1, \quad \cos 3x = \cos x(4 \cos^2 x - 3)$$

helyettesítéseket, majd rendezzük az egyenletet:

$$\begin{aligned}\cos^2 x + (2 \cos^2 x - 1)^2 + \cos^2 x (4 \cos^2 x - 3)^2 &= 1, \\ \cos^2 x (8 \cos^4 x - 10 \cos^2 x + 3) &= 0, \\ \cos^2 x (2 \cos^2 x - 1)(4 \cos^2 x - 3) &= 0, \\ \cos x \cos 2x \cos 3x &= 0.\end{aligned}$$

Egyenletünknek tehát azok az x -ek a megoldásai, amelyekre $\cos x$ vagy $\cos 2x$ vagy $\cos 3x$ nullával egyenlő. Mivel $\cos x$ nullahelyei $\cos 3x$ -nek is nullahelyei, elegendő $\cos 2x = 0$ és $\cos 3x = 0$ megoldásait áttekintenünk.

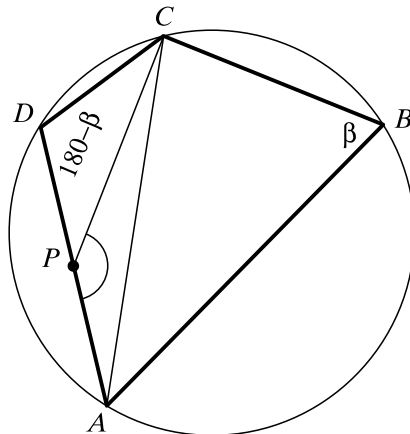
$$\begin{aligned}\cos 2x &= 0, \text{ ha } 2x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad x = (2k+1)\frac{\pi}{4}, \\ \cos 3x &= 0, \text{ ha } 3x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad x = (2k+1)\frac{\pi}{6},\end{aligned}$$

ahol k tetszőleges egész. Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, a fenti értékek tényleg kielégítik a vizsgált egyenletet.

1962/5. Adott egy k kör három különböző pontja: A , B és C . Jelöljük ki szerkesztéssel ennek a körnek azt a D pontját, amelyre az $ABCD$ négyszög érintőnégyszög.

1. megoldás. Az érintőnégyszögnek azt a tulajdonságát használjuk fel, hogy egy négyszög akkor és csak akkor érintőnégyszög, ha szemközti oldalainak az összege egyenlő.

Tegyük fel, hogy D az ABC háromszög köré írt kör B -t nem tartalmazó AC ívének olyan pontja, amelyre $AB + CD = BC + AD$, tehát $ABCD$ érintőnégyszög (1962/5.1. ábra). Ha $AB = BC$, akkor $CD = AD$, tehát D az AC ív



62/5.1. ábra

felezőpontja, $ABCD$ ekkor deltoid, s így biztosan érintőnégyszög.

Feltehetjük, hogy $AB > BC$, ekkor $AB - BC = AD - CD > 0$. Mérjük rá CD -t D -ből kiindulva DA -ra; legyen a végpontja P . A CDP háromszög egyenlő szárú, a száruk szöge $180^\circ - \beta$, az alapján fekvő szögek $\frac{\beta}{2}$ -vel egyenlők, ezért az APC szög $180^\circ - \frac{\beta}{2}$.

Ennek alapján a D pont szerkesztése a következő: szerkesszünk az AC oldal fölé a B -vel ellentétes oldalra $180^\circ - \frac{\beta}{2}$ látószögű körívet, ezt metsszük el A -ból $AB - BC$ sugarú körívvel, a metszéspont legyen P , tehát $AP = AB - BC$. AP meghosszabbítása ABC körülírt körét a szerkesztendő D pontban metszi.

Megmutatjuk, hogy $ABCD$ valóban érintőnégyyszög. Mivel $CDA \sphericalangle = 180^\circ - \beta$, $CPA \sphericalangle = 180^\circ - \frac{\beta}{2}$, a CDP háromszög P -nél levő szöge $\frac{\beta}{2}$ és így $\frac{\beta}{2}$ a C -nél levő szög is, CDP tehát egyenlő szárú háromszög, $CD = DP$, ennélfogva $AD = AP + CD = AB - BC + CD$. Az $ABCD$ négyszögben ezért a szemközti oldalak összege egyenlő: $AB + CD = AD + BC$, $ABCD$ valóban érintőnégyyszög.

A szerkesztés elvégezhetősége P szerkeszthetőségén múlik. P azonban mindig szerkeszthető, mert az AC fölé szerkesztett $180^\circ - \frac{\beta}{2}$ szögű látókörív a körülírt körön belül van, hiszen $180^\circ - \beta$ -nál nagyobb látószög tartozik hozzá és az A körül szerkesztett $AP = AB - BC$ sugarú kör is mindig metszi a belső körívet, mert $AP = AB - BC < AC$ az ABC háromszögre alkalmazott háromszög egyenlőtlenség következményeként. A szerkesztési feladatnak tehát mindig egy megoldása van.

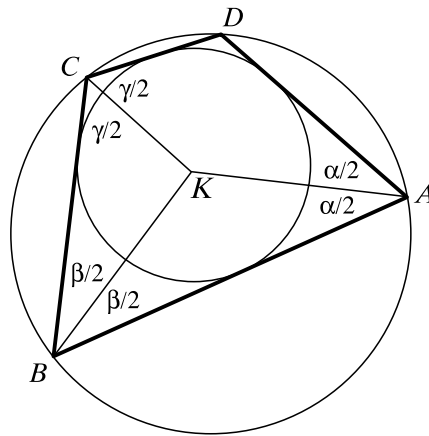
2. megoldás. Az érintőnégyyszögnek most azt a jellemző tulajdonságát használjuk ki, hogy a belső szögfelezői egy adott pontban, a beírt kör K középpontjában metszik egymást (1962/5.2. ábra).

Legyenek a megszerkesztett négyszög A, B, C csúcsainál a szögek rendre α, β, γ ; $\alpha + \gamma = 180^\circ$, mivel $ABCD$ húrnégyszög. Minthogy $AKB \sphericalangle = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2}$, $BKC \sphericalangle = 180^\circ - \frac{\beta + \gamma}{2}$,

$$AKC \sphericalangle = 360^\circ - \left(180^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2}\right) - \left(180^\circ - \frac{\beta + \gamma}{2}\right) = \frac{2\beta + \alpha + \gamma}{2} = 90^\circ + \beta.$$

Ha $\beta = 90^\circ$, ABC derékszögű háromszög, a szerkesztendő érintőnégyyszög D csúcsa B -nek az AC átfogójára való tükörképe.

Ha $\beta < 90^\circ$, a K körközepont az AC fölé, AC -nek B -vel egyező oldalára szerkesztett $90^\circ + \beta$ látószögű körívnek és a B -nél levő szög felezőjének a metszéspontja. K -t megszerkesztve már a négyszög beírt körét is meg tudjuk



62/5.2. ábra

szerkeszteni, mivel a kör érinti BA -t és BC -t is. Az A -ból és C -ből a körhöz húzott érintők metszéspontja a D pont.

Az így szerkesztett négyszög érintőnégyszög; azt kell még belátnunk, hogy húrnégyszög is. A szerkesztés szerint a K -nál levő három szög összege:

$$360^\circ = 90^\circ + \beta + \left(180^\circ - \frac{\beta + \gamma}{2}\right) + \left(180^\circ - \frac{\beta + \alpha}{2}\right) = 450^\circ - \frac{\alpha + \gamma}{2},$$

ebből

$$\alpha + \gamma = 180^\circ,$$

tehát $ABCD$ húrnégyszög és így D szükségképpen rajta van ABC körülírt körén.

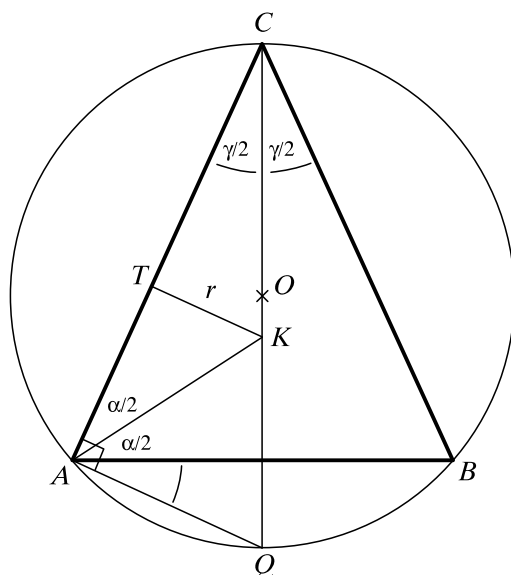
Ha $\beta > 90^\circ$, a szerkesztés csak annyit módosul, hogy AC fölé AC -nek B -vel ellentétes oldalára kell $270^\circ - \beta$ látószögű körívet szerkeszteni. A szerkesztés minden esetben elvégezhető és egyértelmű.

Megjegyzés. A feladatban szereplő négyszög ún. kétközéppontú (bicentrikus) négyszög, mert létezik beírt és körülírt köre is. Az ilyen négyszögeknek számos érdekes tulajdonságuk van, pl. a beírt kör sugara, a körülírt kör sugara és középpontjaik távolsága közül két adat a harmadikat már meghatározza [5].

1962/6. Jelentse R egy tetszőleges egyenlő szárú háromszög köré írható kör sugarát, r pedig a beírt kör sugarát. Bizonyítsuk be, hogy a két kör középpontjának távolsága:

$$(1) \quad d = \sqrt{R(R - 2r)}.$$

1. megoldás. Legyen az ABC egyenlő szárú háromszög ($AC = BC$) köré írt körének középpontja O , beírt körének középpontja K ; a C -ből induló szögfelező a körülírt kört másodszor az AB ív felezőpontjában, Q -ban metszi; K -ból az AC -re állított merőleges talppontja T (1962/6.1. ábra).



62/6.1. ábra

Kiindulásunk annak észrevétele, hogy $QA = KQ$. Ezt azzal bizonyíthatjuk, hogy megmutatjuk: AKQ egyenlő szárú háromszög, ti. $\angle AKQ = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$ a külsőszög-tétel alapján, $\angle QAB = \angle QCB = \frac{\gamma}{2}$, amivel azonos ívhez tartozó kerületi szögek, és így $\angle QAK = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$, tehát AKQ valóban egyenlő szárú.

Legyen $OK = d$. A K pont körülírt körre vonatkozó hatványa [6]

$$(2) \quad KQ \cdot KC = R^2 - d^2.$$

Viszont a CAQ és CTK hasonló derékszögű háromszögekből

$$(3) \quad \frac{r}{QA} = \frac{KC}{CQ} = \frac{KC}{2R},$$

ebből

$$2Rr = QA \cdot KC,$$

vagy, mivel $QA = KQ$,

$$2Rr = KQ \cdot KC.$$

Ezt (2)-vel összehasonlítva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 2Rr &= R^2 - d^2, \\ d &= \sqrt{R(R - 2r)}, \end{aligned}$$

ami bizonyítandó volt.

2. megoldás. Az (1) összefüggés minden háromszögre érvényes. Ennek most egy semmi ötletet sem kívánó formális levezetését adjuk meg.

Válasszuk origónak a háromszög köré írt kör középpontját, a csúcsokhoz vezető vektorok: \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , nyilván $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = R$. Ismeretes, hogy a beírt kör K középpontjának helyvektora [7]

$$\mathbf{k} = \frac{a\mathbf{a} + b\mathbf{b} + c\mathbf{c}}{a + b + c} = \frac{a\mathbf{a} + b\mathbf{b} + c\mathbf{c}}{2s},$$

ahol a , b , c a háromszög oldalai. Jelöléseink szerint $|\mathbf{k}| = d$. Emeljük négyzetre a

$$2s\mathbf{k} = a\mathbf{a} + b\mathbf{b} + c\mathbf{c}$$

egyenlőséget (skaláris szorzás!):

$$(2) \quad 4s^2 d^2 = (a^2 R^2 + b^2 R^2 + c^2 R^2 + 2ab\mathbf{a}\mathbf{b} + 2bc\mathbf{b}\mathbf{c} + 2ca\mathbf{c}\mathbf{a})$$

Használjuk most fel, hogy $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = c$, azaz $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 = c^2$,

$$2R^2 - 2\mathbf{a}\mathbf{b} = c^2,$$

$2\mathbf{a}\mathbf{b} = 2R^2 - c^2$; és hasonlóan $2\mathbf{b}\mathbf{c} = 2R^2 - a^2$, $2\mathbf{c}\mathbf{a} = 2R^2 - b^2$. Helyettesítsük ezeket (2)-be:

$$4s^2 d^2 = R^2(a + b + c)^2 - abc(a + b + c) = R^2 \cdot 4s^2 - abc \cdot 2s$$

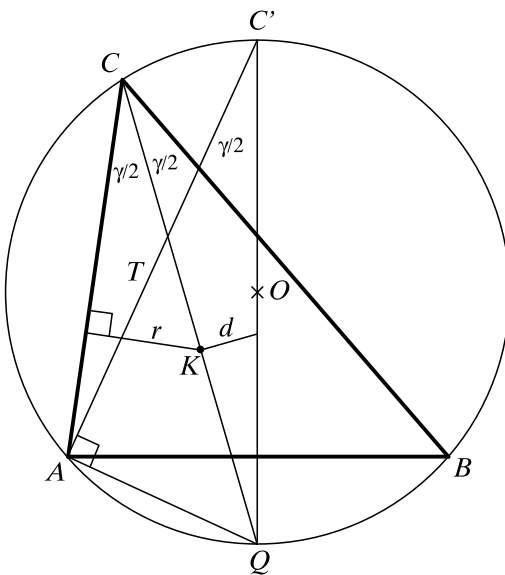
ebből:

$$d^2 = R^2 - \frac{abc}{2s}.$$

Mivel a sugárképletekből [8] $abc = 4tR$, $t = rs$,

$$d^2 = R^2 - 2Rr, \quad d = \sqrt{R^2 - 2Rr},$$

ami bizonyítandó volt.



62/6.2. ábra

Megjegyzések. 1. Az (1) összefüggés L. Eulertől származik; fontos következménye a sugárregyenlőtlenség [37]:

$$R \geq 2r,$$

egyenlőség csak $d = 0$, tehát szabályos háromszög esetén áll fenn.

2. (1) szoros összefüggésben van az ún. Poncelet-féle záródási tételekkel [9].

3. Az 1. megoldás gondolatmenetének csekély módosításával is belátható, hogy (1) minden háromszögre érvényes. Ha ABC nem egyenlő szárú, tehát K és O nincsenek a körülírt kör ugyanazon átmérőjén, vegyük a Q végpontú QC' átmérőt, ahol Q az AB

ív felezőpontja, Q -n ezért a CK szögfelező is átmegy (1962/6.2. ábra). Az előbbi bizonyítás mindössze annyit módosul, hogy (3)-ban CQ helyébe $C'Q$ írandó; az előtte levő sorban pedig a $C'AQ$ és CTK háromszögek hasonlóságáról van szó.

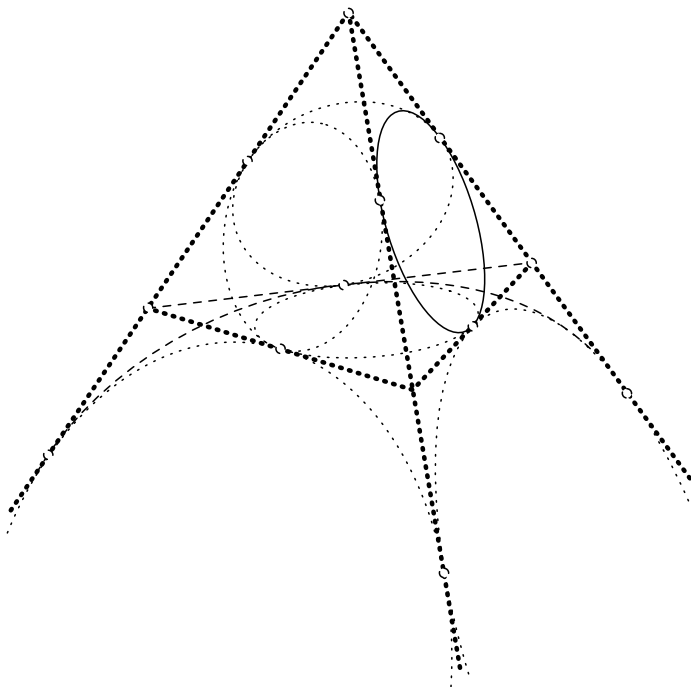
1962/7. Az $SABC$ tetraéderről annyit tudunk, hogy öt olyan gömb van, melyek mindegyike érinti a tetraéder valamennyi élét, illetőleg azok meghosszabbítását. Bizonyítsuk be, hogy

az $SABC$ tetraéder szabályos;

megfordítva: bármely szabályos tetraéder esetén létezik öt olyan gömb, amely az említett tulajdonsággal rendelkezik.

Megoldás. Ha egy gömb érinti egy tetraéder élegyeneseseit, akkor a lapjai szükségképpen olyan köröket metszenek ki a gömbből, amelyek érintik az élegyeneseket; síkmetszetként tehát a tetraéder lapháromszögeinek a beírt-, ill. hozzáírt körei jöhetnek szóba.

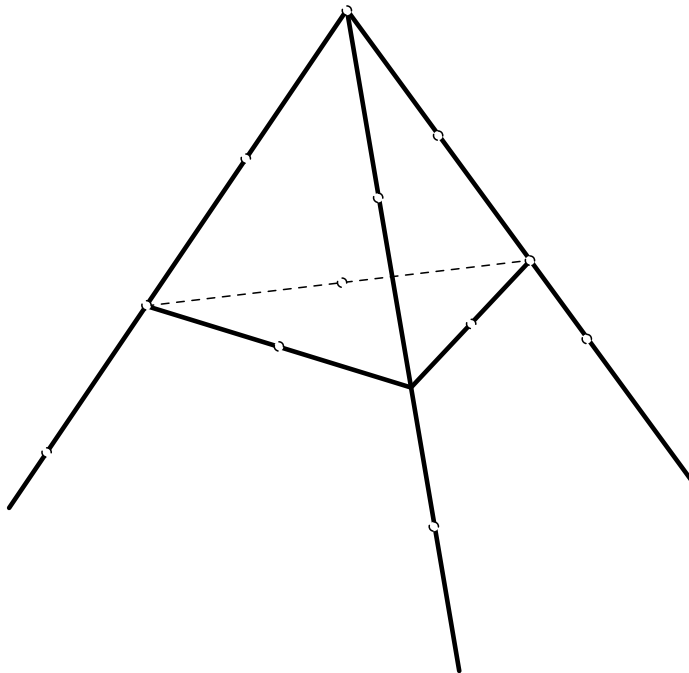
Egy háromszög két érintőköre nem lehet ugyanazon a gömbön és egy hozzáírt kör is csak azzal a beírt körrel lehet egy gömbön, amelyet egy él közös belső pontjában érintenek (1962/7.1. ábra). Ha ehhez még hozzávesszük azt a



62/7.1. ábra

tényt, hogy két különböző síkban fekvő érintkező kör egyértelműen meghatározza azt a gömböt, amely a két kört tartalmazza, és ezen a gömbön rajta van minden olyan kör, amely azt a két kört érinti [10], megállapíthatjuk, hogy az öt érintő gömb egyike tartalmazza a lapháromszögbe írt négy beírt kört (ez a G gömb), a többi négy gömbön pedig egy-egy beírt kör és az azt érintő három hozzáírt kör van rajta. (Két kört akkor mondunk érintkezőnek, ha közös pontjukban közös az érintőjük.)

Az $SABC$ szabályos voltához elegendő igazolni, hogy tetszőlegesen kiválasztott lapja szabályos háromszög. Válasszuk ki az ABC lapot. A tetraéder élein megjelölhetjük azokat a pontokat, amelyekben a G gömb érinti a tetraéder éleit. Az egy csúcsból induló éleken az érintési pontok a csúcstól egyenlő távolságra vannak, mert külső pontból a gömbhöz húzott érintőszakaszok, az 1962/7.2. ábrán az egyenlő érintőszakaszokat a közös csúcsnak megfelelő kisbetűvel jelöltük.



62/7.2. ábra

Legyen G_s az az érintőgömb, amely az ABC háromszögbeírt körét, a másik négy lapháromszögnek pedig a hozzáírt körét tartalmazza. G_s az SA , SB , SC élegyeneseket rendre az X , Y , Z pontokban érinti, s mivel az A pontból ABC beírt köréhez húzott érintőszakasz (a) ugyanaz, mint az A -ból a G_s -hez húzott érintőszakasz, $AX = a$ és hasonlóan $BY = b$, $CZ = c$. Viszont S -ből a G_s -hez húzott érintőszakaszok is egyenlők, tehát $SX = SY = SZ$, azaz

$$s + 2a = s + 2b = s + 2c,$$

amiből $a = b = c$ következik, tehát ABC minden oldala egyenlő, azaz szabályos.

Hasonlóan: ha $SABC$ -nek ABC lapját kívülről érintő beírt gömb középpontja K_s , sugara r_s , az ABC háromszög hozzáírt körének sugara ϱ_s , akkor K_s távolsága valamennyi élegyenestől $r'_s = \sqrt{r_s^2 + \varrho_s^2}$, a K_s középpontú r'_s sugarú gömb tehát érint minden élegyenest.

Megjegyzések. 1. Megoldásainkból az 1962/7.2. ábra viszonyait figyelve kikövetkeztethetjük, hogy ha a tetraédernek létezik az éleket belső pontban érintő gömbje, a szemközti élek összege mindhárom élpárra ugyanakkora (ábránkon: $a + b + c + s$). Bebizonyítható, hogy ez a feltétel elegendő is az ilyen élérintő gömb létezéséhez.

167

3. Megoldásunkban megmutattuk, hogy ha létezik a belső érintőgömb és az ABC lap éleit belülről érintő külső érintőgömb, akkor ABC bármely szabályos, az SA , SB , SC élek pedig egyenlők. Ugyanígy következik, hogy ha létezik az SBC háromszög éleit belülről érintő külső érintőgömb, akkor SBC is megoldás és $SA = AB = AC$. Ez azonban éppen azt jelenti, hogy a tetraéder minden éle egyenlő, tehát szabályos. Ezek szerint már egy belső és két külső érintőgömb létezése is biztosítja $SABC$ szabályos voltát.

1963.

1963/1. Határozzuk meg a

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$$

egyenlet valamennyi valós gyökét. p valós paramétert jelent.

Megoldás. Mivel x két nemnegatív szám összege, $x \geq 0$; a gyökmennyiségek értelmezéséhez szükséges, hogy $x^2 \geq p$, $x \geq 1$ legyen. E feltételek mellett négyzetreemeléssel és átrendezéssel az ekvivalens

$$4\sqrt{x^2 - p}\sqrt{x^2 - 1} = p + 4 - 4x^2$$

egyenletet kapjuk.

A bal oldal nem negatív, ezért $p + 4 - 4x^2 \geq 0$ -nak is teljesülnie kell, ami azt jelenti, hogy $x^2 \leq \frac{p+4}{4}$.

Ha ez a feltétel is teljesül, egy újabb négyzetreemelés és rendezés a

$$8(2-p)x^2 = (p-4)^2$$

egyenletre vezet, ami az eredetivel egyenértékű.

$p \neq 2$, mert ekkor a bal oldal nulla, a jobb oldal viszont nem, ezért

$$(1) \quad x^2 = \frac{(p-4)^2}{8(2-p)},$$

Vizsgáljuk most meg, milyen p értékekre teljesülnek az x -re tett kikötések:

$$a) \ x^2 \geq 1, \text{ azaz } \frac{(p-4)^2}{8(2-p)} \geq 1, \frac{p^2}{8(2-p)} \geq 0, \text{ tehát } p < 2.$$

$$b) \ x^2 \geq p, \text{ azaz } \frac{(p-4)^2}{8(2-p)} \geq p, \frac{(3p-4)^2}{8(2-p)} \geq 0, \text{ tehát } p < 2.$$

$$c) \ x^2 \leq \frac{p+4}{4}, \text{ azaz } \frac{(p-4)^2}{8(2-p)} \leq \frac{p+4}{4}, \frac{3p(p-\frac{4}{3})}{8(2-p)} \leq 0, \text{ tehát } 0 \leq p \leq \frac{4}{3}.$$

E feltételek közös része:

$$0 \leq p \leq \frac{4}{3},$$

ha tehát ez teljesül, az egyenletnek van megoldása, mégpedig

$$x = \frac{4-p}{\sqrt{16-8p}},$$

ha viszont a fenti feltétel nem teljesül, az egyenletnek nincs megoldása.

1963/2. Adott a térben az A pont és a BC szakasz. Mi a mértani helye az összes olyan derékszög csúcsának, melynek egyik szára az A pontot, másik szára pedig a BC szakasznak legalább egy pontját tartalmazza?

Megoldás. Legyen a BC szakasz tetszőleges (belső- vagy határ-) pontja X . Ha a feladatbeli derékszög egyik szára A -t, másik pedig X -et tartalmazza, a derékszögek P csúcsai rajta vannak az AX mint átmérő fölé szerkesztett Thalész-gömbön, és ennek a gömbnek minden pontja lehet ilyen derékszögnek a csúcsa.

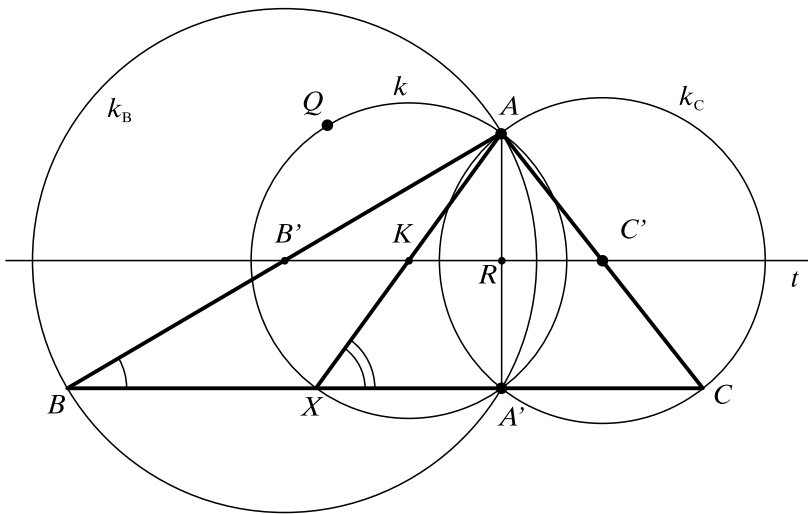
Ha X befutja a zárt BC szakaszt, minden helyzetben hozzátartozik egy Thalész gömb, az összes ilyen gömb felületi pontjai és csakis ezek alkotják a szóbanforgó M mértani helyet. (*)

A következőkben erről az M halmazról akarunk valamivel szemléletesebb képet nyújtani. Jelölje G_B az AB átmérőjű, G_C pedig az AC átmérőjű gömböt. Megmutatjuk, hogy M azokból a pontokból áll, amelyek az egyik gömbnek nem külső, a másiknak nem belső pontjai.

Vizsgáljuk meg most ennek a gömbhalmaznak egy síkmetszetét; a metsző sík legyen az A, B, C pontokat tartalmazó valamelyik S sík; ha A nincs a BC egyenesen, választása egyértelmű. A gömbök középpontjai rajta vannak az AB szakasz B' felezőpontját az AC szakasz C' felezőpontjával összekötő szakaszon; a $B'C' = t$ egyenes az M halmaz minden gömbjének forgástengelye, t körül M minden pontja S -be forgatható. Legyen S és G_B síkmetszete a k_B kör, S és G_C metszésvonala pedig k_C (1963/2.1. ábra).

Állításunk bizonyítására elegendő megmutatnunk, hogy az M halmaz gömbjeinek főköréi kitöltik azt a tartományt, amely úgy jön létre, hogy a k_B és k_C körlemezekből elhagyjuk közös belső pontjaikat; legyen ez a tartomány T . Jelölje k_B és k_C másik közös pontját A' (ez egybe is eshet A -val), t tehát az AA' felező merőlegese. Mivel minden olyan S -beli kör, amelynek középpontja t -n van és átmegy A -n, A' -n is átmegy, a vizsgált főkörök átmennek A -n és A' -n is.

k_B és k_C pontjai nyilván hozzátartoznak M -hez. Legyen most Q a T -nek egy belső pontja, pl. k_B belsejében. Az A, A', Q pontokon átmenő k kör K középpontja t -n van, átmérőjének X végpontja a BA' szakaszon, mert AA' Q -ból nagyobb szögben látszik, mint k_B pontjaiból és ezért az ABA' szög kisebb



63/2.1. ábra

az AXA' szögnél, következésképpen Q rajta van egy olyan körön, amelynek átmérője a BC szakasz egy X pontját az A -val összekötő szakasz, Q tehát M -hez tartozik. Ugyanilyen okból minden AX átmérőjű körvonal teljes egészében T -hez tartozik.

Megjegyezzük, hogy meggondolásaink (esetleg kis módosítással) arra az esetre is érvényesek, ha A a BC egyenesén van.

Megjegyzés. A feladat megoldását tulajdonképpen a $(*)$ -gal jelölnél befejezhetjük, mert kérdésre pontos választ adtunk. A helyzet az, hogy a „mi a mértani helye” jellegű kérdések mindig tartalmaznak határozatlanságot, mert a mértani helynek megfelelő halmaz sokféleképpen megadható.

1963/3. Tekintsük egy konvex n -szöget, amelynek minden szöge egyenlő, és az egymás után elhelyezkedő a_1, a_2, \dots, a_n oldalaira fennáll, hogy

$$(1) \quad a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n.$$

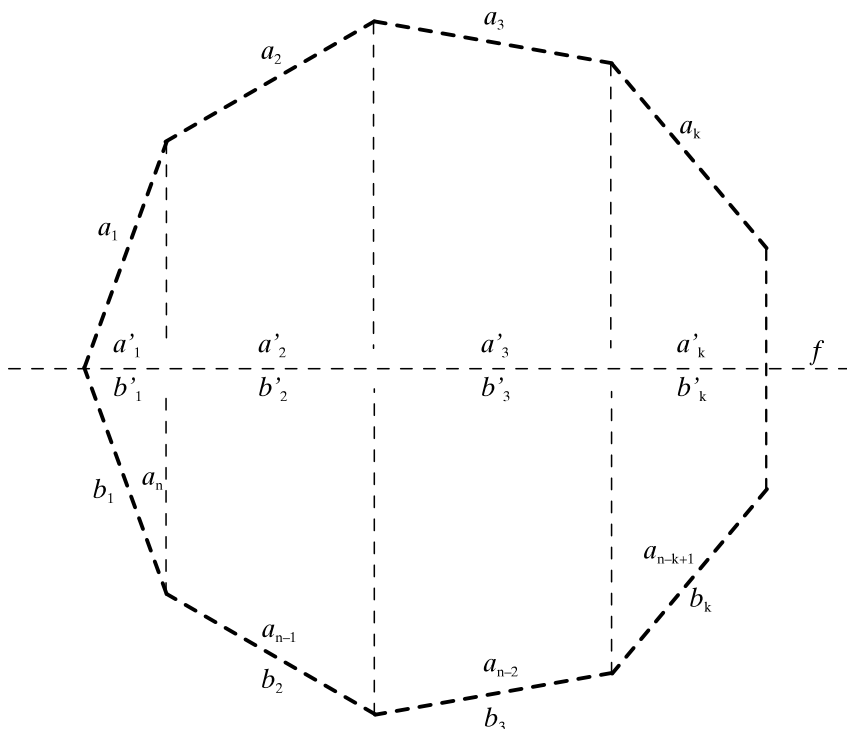
Bizonyítsuk be, hogy ekkor szükségképpen

$$(2) \quad a_1 = a_2 = \dots = a_n.$$

Megoldás. A szögek egyenlősége azt jelenti, hogy a sokszög oldalai rendre párhuzamosak egy szabályos n -szög oldalaival, a bizonyítandó pedig azt, hogy a sokszög szabályos. Vezessük be az $n = 2k$ vagy $n = 2k + 1$, továbbá az

$$a_n = b_1, a_{n-1} = b_2, \dots, a_{n-k+1} = b_k, a_{n-k} = b_{k+1}$$

jelöléseket, és legyen az a_1 és $a_n = b_1$ oldalak közös csúcsából induló belső szögfelező f (1963/3.1. ábra).



63/3.1. ábra

Az a_k él végpontja egybeesik a b_k él egyik végpontjával, ha n páros; ha pedig n páratlan, e két végpont összekötő szakasza (az $a_{k+1} = b_{k+1}$ oldal) merőleges f -re, ezért az a_1, a_2, \dots, a_k élsorozat merőleges vetülete f -en ugyanakkora, mint a b_1, b_2, \dots, b_k élsorozaté. Jelölje a_i vetületét a'_i , b_i -ét b'_i ; tehát

$$(3) \quad a'_1 + a'_2 + \dots + a'_k = b'_1 + b'_2 + \dots + b'_k.$$

Mivel a_i és b_i ugyanakkora szöget zárnak be f -fel, a_i és b_i nagysági sorrendje ugyanaz, mint a'_i -é és b'_i -é; (1) szerint

$$(4) \quad a_i \geq b_i, \quad \text{ezért} \quad a'_i \geq b'_i.$$

(3)-ból következik, hogy

$$(a'_1 - b'_1) + (a'_2 - b'_2) + \dots + (a'_k - b'_k) = 0$$

Mint hogy (4) szerint a zárójelben levő különbségek nem negatívak, összegük csak úgy lehet nulla, ha mindegyikük 0, tehát $a'_1 = b'_1$, de ez azt jelenti, hogy $a_1 = b_1 = a_n$, ezért (1)-ben szükségképpen mindenütt az egyenlőség érvényes; a sokszög oldalai egyenlők.

Megjegyzés. A feladat állítását a következő módon is szemléltethetjük: vegyünk egy a_1 oldalú szabályos n -szöget. a_1 -ből kiindulva szerkesszük meg az

(1)-nek eleget tevő sokszöget; ha (1)-ben valahol a $>$ jel érvényes, sokszögvo-
nalunk már eltér a szabályos sokszögétől és ettől kezdve a szabályos sokszög
belsejében halad, és így sohasem zárulhat vissza a_1 kezdőpontjához.

1963/4. Határozzuk meg az x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ismeretleneknek összes olyan
értékrendszerét, melyek kielégítik az

$$(1) \quad x_5 + x_2 = yx_1,$$

$$(2) \quad x_1 + x_3 = yx_2,$$

$$(3) \quad x_2 + x_4 = yx_3,$$

$$(4) \quad x_3 + x_5 = yx_4,$$

$$(5) \quad x_4 + x_1 = yx_5$$

egyenletrendszert, ahol y paramétert jelöl.

Megoldás. (1)-ből és (2)-ből fejezzük ki x_5 -öt, ill. x_3 -at:

$$(6) \quad x_5 = yx_1 - x_2,$$

$$(7) \quad x_3 = yx_2 - x_1,$$

(6)-ot (5)-be helyettesítve kapjuk, hogy

$$(8) \quad x_4 = (y^2 - 1)x_1 - yx_2.$$

Helyettesítsük (8)-at és (7)-et (3)-ba, rendezés után kapjuk:

$$(9) \quad (y^2 + y - 1)(x_1 - x_2) = 0.$$

(4)-ből viszont (6), (7) és (8) behelyettesítésével

$$(10) \quad (y^2 + y - 1)((y - 1)x_1 - x_2) = 0$$

adódik. Ha $y^2 + y - 1 = 0$, azaz

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

akkor (9)-et és (10)-et tetszőleges x_1 és x_2 kielégíti; s mivel ekvivalens átalakítá-
sokat végeztünk, ez az értékpár (7), (8) és (6) alapján egyértelműen meghatározza
az x_3, x_4, x_5 ismeretleneket.

Ha $y^2 + y - 1 \neq 0$, (9)-ből és (10)-ből az

$$(11) \quad x_1 - x_2 = 0,$$

$$(y - 1)x_1 - x_2 = 0,$$

és ezekből

$$(12) \quad (y - 2)x_1 = 0$$

következik. Ha $y = 2$, $x_1 = x_2$ tetszőleges szám lehet; ha pl. $x_1 = x_2 = c$, akkor az
eredeti egyenletrendszerből $x_3 = x_4 = x_5 = c$ következik.

Végül, ha $y \neq 2$, akkor (12)-ből $x_1 = 0$, (11)-ből $x_2 = 0$, és az eredeti egyen-
letrendszerből valamennyi ismeretlenre 0 adódik.

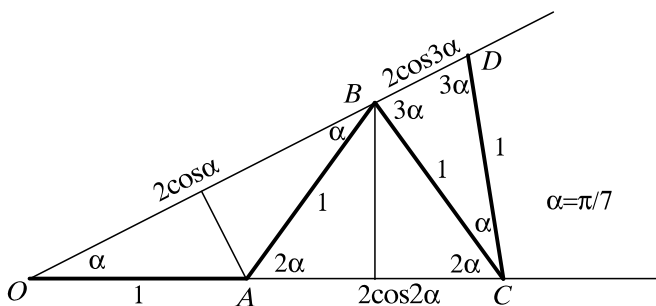
Összefoglalva tehát:

1. Ha $y = (-1 \pm \sqrt{5})/2$, akkor $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = yb - a$, $x_4 = (y^2 - 1)a - yb = -y(a + b)$, $x_5 = ya - b$, ahol a és b tetszőlegesen valós számok.
2. Ha $y = 2$, $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = c$, ahol c tetszőlegesen valós szám.
3. Ha y a fenti három értéktől különbözik, $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$.

1963/5. Bizonyítsuk be, hogy

$$(1) \quad \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

1. megoldás. Vezessük be az $\alpha = \frac{\pi}{7}$ jelölést, nyilván $7\alpha = \pi$. Az α mértékű O csúcsú szög szárai közé helyezzük el az OAB egyenlőszárú háromszöget, majd az ABC és BCD egyenlő szárú háromszökeket az 1963/5.1. ábrán látható módon úgy, hogy $OA = AB = BC = CD = 1$ teljesüljön. A háromszög



63/5.1. ábra

szögösszeg-, ill. külső szög- tételéből a háromszögek alapon fekvő szögeire rendre α , 2α , 3α adódik és a COD háromszög CD -n levő szögeire 3α . Ezért COD egyenlő szárú, $OC = OD$, viszont

$$OC = 1 + 2 \cos 2\alpha, \quad OD = 2 \cos \alpha + 2 \cos 3\alpha,$$

tehát

$$1 + 2 \cos 2\alpha = 2 \cos \alpha + 2 \cos 3\alpha,$$

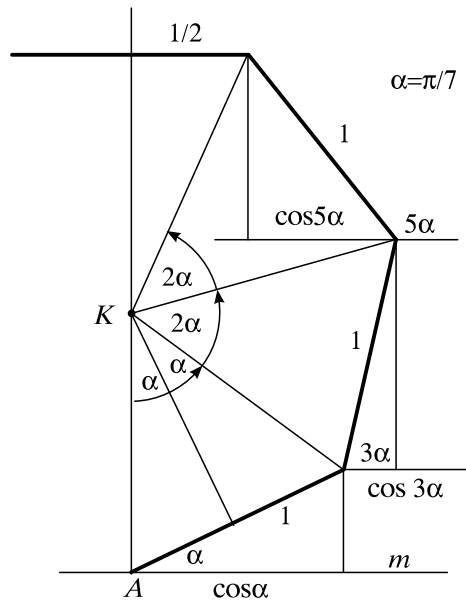
amiből átrendezéssel (1) adódik.

2. megoldás. Ha figyelembe vesszük, hogy

$$\cos \frac{5\pi}{7} = \cos \left(\pi - \frac{2\pi}{7} \right) = -\cos \frac{2\pi}{7},$$

(1) így írható:

$$(2) \quad \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$



63/5.2. ábra

Ez az összefüggés viszont a szabályos hétszög geometriai tulajdonságaival kapcsolatos. Az egységoldalú szabályos hétszög egy A csúcán átmenő szimmetriatengelye felezi a szemközi oldalt, a szimmetriatengelyre A -ban állított m merőleges az A -ból induló oldallal $\frac{\pi}{7} = \alpha$ szöget zár be, tehát m -en levő vetülete $\cos \alpha$ (1963/5.2. ábra). Mivel az egymást követő oldalak a szomszédos oldal 2α nagyságú elforgatásából származik, a következő két oldal m -mel bezárt szöge 3α , ill. 5α , a vetületek nagysága $\cos 3\alpha$, ill. $\cos 5\alpha$, ez utóbbi már negatív. E három irányított (előjeles) vetület összege ábránk alapján éppen az oldal felével, tehát $\frac{1}{2}$ -del egyenlő:

$$\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha = \frac{1}{2},$$

amit bizonyítanunk kellett.

3. megoldás. Az egyenlőséget a (2) alatti formában bizonyítjuk be. Jelöljük (2) bal oldalát K -val; felhasználjuk, hogy

$$2 \sin x \cos y = \sin(x+y) - \sin(y-x).$$

Ebből az $\alpha = \frac{\pi}{7}$ jelölést használva és figyelembe véve, hogy $\sin \alpha = \sin 6\alpha$:

$$\begin{aligned} K \cdot 2 \sin \alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \sin \alpha \cos 3\alpha + 2 \sin \alpha \cos 5\alpha = \\ &= \sin 2\alpha + \sin 4\alpha - \sin 2\alpha + \sin 6\alpha - \sin 4\alpha = \\ &= \sin 6\alpha = \sin \alpha, \end{aligned}$$

amiből

$$K = \frac{1}{2}$$

következik.

Megjegyzés. Mind a három megoldásmód alkalmas a következő általánosítás bizonyítására:

$$\text{Ha } \alpha = \frac{\pi}{2k+1} \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \text{ akkor}$$

$$\cos \alpha + \cos 3\alpha + \dots + \cos(2k-1)\alpha = \frac{1}{2}.$$

1963/6. Egy versenyen öt tanuló vett részt: A, B, C, D és E. Valaki előzőleg azt tippelte, hogy a versenyzők helyezési sorrendje ABCDE lesz, azonban — mint utóbb kiderült — így egyetlen versenyző helyezését sem találta el, sőt még azt sem, milyen sorrendben következett két egymás utáni helyezett. Másvalaki a DAECB sorrendre tippelt. Ez lényegesen jobbnak bizonyult, mivel ebben pontosan két versenyző helyezése megegyezett a ténylegessel, ugyancsak két esetben az is, hogy milyen sorrendben követte egymást két versenyző. Milyen eredménnyel végződött valójában a verseny?

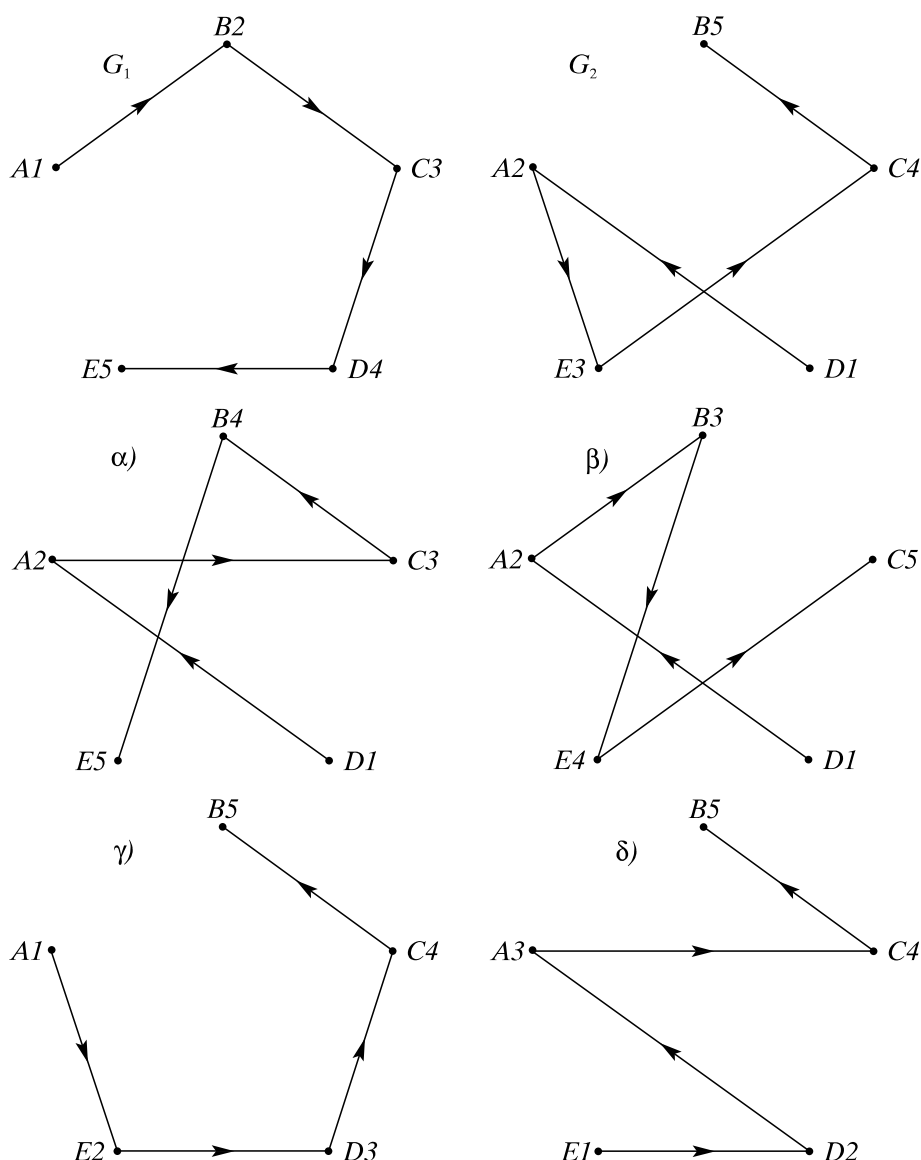
Megoldás. Az egyszerűbb megfogalmazás kedvéért feleltessük meg a versenyzőknek egy gráf öt csúcsát, két csúcsot irányított éllel kötünk össze, ha a kiindulási csúcsnak megfelelő versenyző közvetlenül megelőzte az élvégponthoz tartozó csúcs versenyzőjét; így módon minden lehetséges sorrendet egy négy élből álló irányított úttal jellemezhetünk. Minden csúcshoz odaírjuk hogy az adott sorrendbe hányadik helyet foglalja el.

Az ABCDE sorrendnek a G_1 gráf felel meg (1963/6.1. ábra), a DAECB-nek pedig G_2 . A feladat szerint olyan G gráfot kell megadni, amely

- egyetlen irányított élben és sorszámában sem egyezzek meg G_1 -gyel;
- két irányított élben és pontosan két sorszámában egyezzek meg G_2 -vel.

A hozzárendelésből következik, hogy ha G_2 -ben és G -ben egy-egy él megegyezik és kezdőpontuk sorszáma is megegyezik, akkor azonos végpontjuk sorszáma is. Továbbá: G_2 és G nem egyezhet meg két egymáshoz csatlakozó élben, mert akkor az egyik élnél sem állhat a kezdő és végpontban ugyanaz a szám, hiszen ebben az esetben a csatlakozó él végpontjának a sorszáma is megegyeznék a két gráfban, tehát már legalább három sorszám, ami ellentmond a b) feltételnek, és úgy sem egyezhetnek meg két egymáshoz csatlakozó élben, hogy a csúcsokhoz tartozó sorszámok különbözzenek; ilyenkor ugyanis G és G_2 megfelelő sorszámai — a feltétellel ellentétben — legalább négy helyen eltérnének.

Vegyük észre, hogy G és G_2 megegyező sorszámai egyik közös élükön vannak. Mivel pedig a többi három csúcs között még kell lennie közös (azaz



63/6.1. ábra

mindkét gráfban szereplő) élnek, a kikötéseknek nem megfelelő sorszámokkal, a közös sorszámú közös él vagy az 1 és 2, vagy pedig a 4 és 5 sorszámú csúcsokat köti össze. A második tipp csak úgy keletkezhetett, hogy e két él közül valamelyik megfelel, a többi helyezést pedig ciklikusan felcserélték.

Az eredeti sorrend ezért (a második tipp alapján) következő négy lehet:

$$\begin{array}{ll} \alpha: DACBE, & \beta: DABEC, \\ \gamma: AEDCB, & \delta: EDACB \end{array}$$

Ezek közül az α és γ esetben G és G_1 egyező sorszámú csúcsot, ($E5$ -öt, ill. $A1$ -et) tartalmaz, a β esetben pedig közös élt (AB -t), ezért nem felelnek meg; a δ eset viszont kielégíti a feladat feltételeit, tehát $EDACB$ az egyetlen helyes sorrend.

1964.

1964/1. Melyek az n összes olyan pozitív egész értékei, amelyekre $2^n - 1$ osztható 7-tel?

Bizonyítsuk be, hogy $2^n + 1$ sohasem osztható 7-tel, bármilyen pozitív egész számot jelentsen is n .

Megoldás. Konkrét esetek vizsgálatából gyorsan rájövünk, hogy a 7-tel való oszthatóság most n -nek 3-mal való oszthatóságával függ össze. Legyen $n = 3k + r$ ($r = 0, 1, 2$); ekkor

$$2^n = 2^{3k+r} = 2^r \cdot 8^k = 2^r (8^k - 1^k) + 2^r = 7E + 2^r,$$

ahol E valamilyen egészet jelöl, ezért

$$2^n - 1 = 7E + 2^r - 1 \quad \text{és} \quad 2^n + 1 = 7E + 2^r + 1.$$

Ebből, ha

$$\begin{array}{lll} r=0, & 2^n - 1 = 7E, & 2^n + 1 = 7E + 1, \\ r=1, & 2^n - 1 = 7E + 1, & 2^n + 1 = 7E + 3, \\ r=2, & 2^n - 1 = 7E + 3, & 2^n + 1 = 7E + 5, \end{array}$$

Ez viszont azt jelenti, hogy $2^n - 1$ akkor és csakis akkor osztható 7-tel, ha n osztható 3-mal; $2^n + 1$ viszont sohasem osztható 7-tel.

1964/2. Jelentse a, b, c egy háromszög oldalainak a hosszát. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$(1) \quad a^2(-a+b+c) + b^2(a-b+c) + c^2(a+b-c) \leq 3abc.$$

1. megoldás. Induljunk ki a következő nyilvánvaló egyenlőtlenségből (a második tényezők a háromszög-egyenlőtlenség miatt negatívak):

$$(b-c)^2(a-b-c) \leq 0,$$

$$(c-a)^2(b-c-a) \leq 0,$$

$$(a-b)^2(c-a-b) \leq 0.$$

Összegezzük ezt a három egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned} & a^2(b-c-a+c-a-b) + b^2(a-b-c+c-a-b) + c^2(a-b-c+b-c-a) - \\ & - 2bc(a-b-c) - 2ca(b-c-a) - 2ab(c-a-b) = \\ & = 2a^2(-a+b+c) + 2b^2(a-b+c) + 2c^2(a+b-c) - 6abc \leq 0, \end{aligned}$$

amiből (1) már közvetlenül következik.

2. megoldás. A szorzásokat elvégezve átrendezés után a

$$-a^3 - b^3 - c^3 + a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 - 2abc \leq abc$$

egyenlőtlenséghez jutunk; a bal oldalt szorzattá alakítva kapjuk az

$$(2) \quad (-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c) \leq abc$$

egyenlőtlenséget; ez egyenértékű az eredetivel. Mivel ennek mindkét oldala pozitív, ekvivalens a négyzetével:

$$\begin{aligned} (-a + b + c)^2(a - b + c)^2(a + b - c)^2 &\leq a^2b^2c^2, \\ (a^2 - (b - c)^2)(b^2 - (c - a)^2)(c^2 - (a - b)^2) &\leq a^2b^2c^2, \end{aligned}$$

a bal oldali tényezők itt rendre kisebbek (nem nagyobbak) a jobb oldali tényezőknél, amivel állításunkat bizonyítottuk.

3. megoldás. Rendezzük át (1)-et, majd osszuk el mind a két oldalát $2abc$ -vel:

$$\begin{aligned} a(b^2 + c^2 - a^2) + b(a^2 + c^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) &\leq 3abc, \\ \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} &\leq \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

A bal oldali törtek rendre egyenlők a háromszög szögeinek a koszinuszaival, mint azt a koszinusztételből egyszerűen levezethetjük:

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2},$$

ez viszont a nevezetes koszinusz-egyenlőtlenség, ami minden háromszögre teljesül és a fentiek szerint egyenértékű (1)-gyel [12].

4. megoldás. Megmutatjuk, hogy (1) tetszőleges nemnegatív a, b, c számhármásra teljesül. Mivel az egyenlőtlenségben a, b, c szerepe szimmetrikus, azaz az a, b, c változókat egymás között tetszőlegesen felcserélve az egyenlőtlenség változatlan marad, feltehetjük, hogy

$$0 \leq c \leq b \leq a.$$

Ebben az esetben

$$\begin{aligned} a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) - 3abc &= \\ = a(ab + ac - a^2 - bc) + b(bc + ba - b^2 - ac) + c(ac + cb - c^2 - ab) &= \\ = -a(a - b)(a - c) + b(b - c)(a - b) - c(a - c)(b - c) &\leq \\ \leq -a(a - b)(b - c) + b(b - c)(a - b) - c(a - c)(b - c) &= \\ = -(a - b)^2(b - c) - c(a - c)(b - c) &\leq 0. \end{aligned}$$

Egyenlőség csak $a = b = c$ vagy $a = b, c = 0$ esetben áll fenn.

Megjegyzések. 1. Az 1.–3. megoldásokból az is következik, hogy egyenlőség csak $a = b = c$ esetben állhat, azaz szabályos háromszögre.

2. Az, hogy (1) egyenértékű (2)-vel, ami a háromszög-geometria egyik leg-átfogóbb egyenlőtlensége, azt is jelenti, hogy egyenlőtlenségünk számos más geometriai egyenlőtlenséggel is kapcsolatba hozható; erre mutat rá a 3. megoldás is. Egy másik kapcsolat a következő: (2)-t

$$8s(s-a)(s-b)(s-c) \leq s \cdot abc$$

alakba írhatjuk át; ebből Héron képletét alkalmazva és felhasználva a $t = rs$, $abc = 4tR$ összefüggéseket, ahol r a beírt, R a körülírt kör sugara, t a háromszög területe, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 8t^2 &\leq s \cdot 4tR, \\ 2r^2s^2 &\leq s \cdot rsR, \\ 2r &\leq R, \end{aligned}$$

ez pedig a nevezetes sugáregyenlőtlenség.

3. Ha a 2. megoldásban használt átalakítás során az egyenlőtlenség mindkét oldalához $2(a^3 + b^3 + c^3)$ -t adunk, az (1)-gyel egyenértékű tetszetős alakú

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) \leq 2(a^3 + b^3 + c^3) + 3abc$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Ennek általánosítása szerepelt az 1968. évi Schweitzer Miklós emlékversenyen; ha a_i nemnegatív,

$$\begin{aligned} (a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \dots + a_n^{n-1})(a_1 + a_2 + \dots + a_n) &\leq \\ &\leq (n-1)(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) + na_1a_2 \dots a_n. \end{aligned}$$

1964/3. Jelentse a, b, c az ABC háromszög oldalainak a hosszát. Húzzuk meg az ABC háromszögbe írt körnek az oldalakkal párhuzamos érintőit. Ezek az érintők az ABC háromszögből három újabb háromszöget vágnak le; az utóbbiak mindegyikében ismét megrajzoljuk a beírt kört. Számítsuk ki a négy beírt kör területének az összegét.

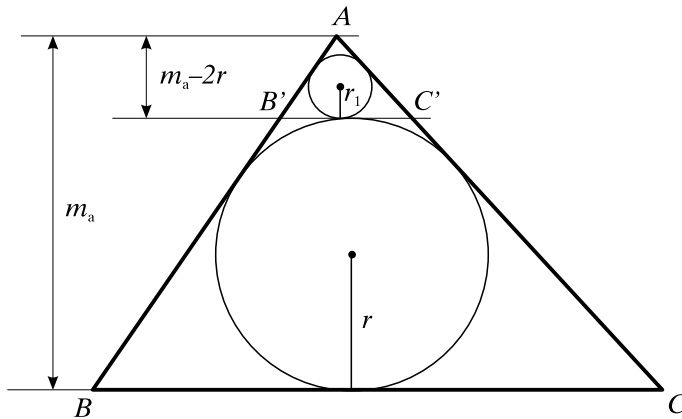
Megoldás. Legyen az ABC háromszög beírt körének BC -vel párhuzamos érintője $B'C'$, ahol B' az AB , c' az AC oldal egy pontja. $AB'C'$ beírt körének a sugarát jelölje r_1 , ABC beírt körének sugara r , területe t , a $BC = a$ oldalhoz tartozó magassága m_a (1964/3.1. ábra).

Az ABC és $AB'C'$ hasonló háromszögekben a beírt körök sugarainak aránya az A csúcshoz tartozó magasságok arányával egyenlő:

$$\frac{r_1}{r} = \frac{m_a - 2r}{m_a}, \quad r_1 = r \left(1 - \frac{2r}{m_a} \right).$$

Mivel $2t = am_a = 2rs$, $m_a = \frac{2rs}{a}$, ebből

$$(1) \quad r_1 = r \left(1 - \frac{a}{s} \right) = \frac{r(s-a)}{s},$$



64/3.1. ábra

és hasonlóan a másik két kör sugara: $r_2 = \frac{r(s-b)}{s}$, $r_3 = \frac{r(s-c)}{s}$. A négy kör területének az összege:

$$\begin{aligned} T &= \pi(r^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) = \\ &= \frac{\pi r^2}{s^2} (s^2 + (s-a)^2 + (s-b)^2 + (s-c)^2) = \frac{\pi r^2}{s^2} (a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

Mivel $r^2 = \frac{t^2}{s^2} = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}$,

$$T = \frac{\pi(s-a)(s-b)(s-c)(a^2 + b^2 + c^2)}{s^3}.$$

Megjegyzés. Az (1) alatti összefüggés érdekes következménye, hogy a három lemetezett háromszögbe írt kör sugarainak az összege a nagy háromszög beírt körének sugarával egyenlő, ti.:

$$r_1 + r_2 + r_3 = r \left(1 - \frac{a}{s} + 1 - \frac{b}{s} + 1 - \frac{c}{s} \right) = r.$$

1964/4. 17 tudós mindegyike levelezést folytat az összes többivel. Összesen háromféle témáról leveleznek, de bármelyik pár mindig csak ugyanarról a témáról. Bizonyítsuk be, hogy van közöttük legalább három olyan tudós, akik közül bármelyik kettő azonos témáról levelez egymással.

Megoldás. A feladat a „felöltöztetett” gráfelméleti feladatok közé tartozik. Feleltessünk meg minden tudósnak egy 17 csúcsú gráf egy-egy csúcsát. Két csúcsot él köt össze, ha a megfelelő tudósok leveleznek egymással. Az első témáról levelezők közötti élt pirosra, a másodikról kékre, a harmadikról zöldre festjük. Azt kell bizonyítanunk, hogy létezik a gráfban egyszínű háromszög, azaz van három olyan csúcs, amelyeket páronként azonos színű él köt össze.

Először egy gyakran használt segédtevélt fogunk bizonyítani, amit Ramsey-tétel néven szoktak emlegetni (ld. a megjegyzésünket), ez így szól: ha egy hatszúcsú gráfban bármely két csúcsot él köt össze (azaz, ha ún. teljes gráfról van szó) és az éleket két színnel színezzük, akkor van a gráfban egyszínű háromszög.

Tegyük fel, hogy a gráf éleit kékre és zöldre színeztük. Válasszunk ki egy tetszőleges A csúcsot, a belőle induló 5 él között biztosan van három egyszínű, mondjuk kék, ezek a B_1, B_2, B_3 csúcsokba vezetnek. Ha a $B_1 B_2 B_3$ háromszög élei között van kék, pl. a $B_1 B_2$ él, akkor a gráf $AB_1 B_2$ háromszöge kék. Ha nincs, akkor a $B_1 B_2 B_3$ háromszög minden éle zöld, és így állításunk bizonyítottuk.

Térjünk most vissza a 17 csúcsú gráf feladatára. Válasszunk ki ennek egy A csúcsát, az ebből kiinduló 16 él között van 6 egyszínű, mondjuk piros. Legyen ezek végpontja $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$. Ha az ezeket összekötő élek között van piros, pl. a $B_1 B_2$ él, akkor az $AB_1 B_2$ háromszög piros, tehát állításunkat igazoltuk.

Ha a B_1, \dots, B_6 csúcsok összekötő élei között nincs piros, akkor a közöttük lévő élek kékék vagy zöldek, ezért segédtevélünk szerint van benne egyszínű háromszög.

A feladat állítását ezzel igazoltuk.

Megjegyzés. 1. 16 csúcsú gráfra az állítás még nem igaz; a 16 csúcsú teljes gráf éleit lehet úgy színezeni három színnel, hogy ne legyen benne egyszínű háromszög.

2. A feladat egyike az ún. Ramsey-típusú gráf tételeknek, ezeknek számos általánosítása és alkalmazása van [13].

3. Feladatunkhoz közvetlenül kapcsolódik a következő általánosítás: legyen $a_1 = 3$, $a_n = na_{n-1} - (n-2)$, ha $n > 1$. Ha az a_n csúcsú teljes gráf éleit n színnel színezzük, akkor van a gráfban egyszínű háromszög.

Ez a tétel $n=2$ -re segédtevélünket, $n=3$ -ra pedig a feladat állítását adja meg. Bizonyítása teljes indukcióval történik. $n=2, 3$ -ra az állítás — mint láttuk — igaz, tegyük fel, hogy igaz $n-1$ -ig. Tekintsük az a_n csúcsú, n színnel színezett teljes gráfot; válasszunk ki ennek egy A csúcsát. Az ebből kiinduló $a_n - 1 = na_{n-1} - n + 1$ él is n színnel van színezve, ezért van közöttük a_{n-1} számú, amely ugyanolyan színű; ha ui. nem így lenne, akkor mind az n színből legfeljebb $a_{n-1} - 1$ él lenne, tehát összesen $na_{n-1} - n$, viszont A foka ennél 1-gyel nagyobb.

Legyenek az A -ból induló a_{n-1} számú egyszínű (mondjuk: piros) élek végpontjai: $B_1, B_2, \dots, B_{a_{n-1}}$. Ha ezek között van piros összekötő él, pl. B_i és B_k között, akkor az $AB_i B_k$ háromszög piros, állításunk bizonyított. Ha nincs, akkor a $B_1, B_2, \dots, B_{a_{n-1}}$ csúcsú teljes gráf élei $n-1$ színnel van színezve és így az indukciós feltevés szerint van benne egyszínű háromszög.

Egyébként bebizonyítható, hogy

$$a_n = [n!e] + 1.$$

(Ld. az 1978/6. feladathoz fűzött megjegyzésünket.)

1964/5. Adott a síkban 5 pont. Azok között az egyenesek között, melyek ezt az 5 pontot páronként összekötik, nincsenek sem párhuzamosok, sem egymásra merőlegesek, sem egymással egybeesők. Az adott pontok mindegyikéből merőlegeseket bocsátunk az összes olyan egyenesre, melyeket a megmaradó négy-négy pont páronkénti összekötésével nyerünk. Adjunk minél jobb felső becslést a merőlegesek egymás közötti metszéspontjainak a számára, ha az adott 5 pontot figyelmen kívül hagyjuk.

Megoldás. Jelölje az 5 adott pontot A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 , ezeknek összesen $\binom{5}{2} = 10$ összekötő egyenese van. Az A_i pontot kiválasztva a többi pontot páronként összekötő egyenesek száma $\binom{4}{2} = 6$, A_i -ből tehát 6 merőleget állíthatunk, az öt pontból ezért összesen 30-at.

Ennek a 30 egyenesnek az egymás közötti metszéspontjait kell összeszámolnunk; ezek maximális száma $\binom{30}{2} = 435$.

Számoljuk most össze, hogy az egybeesések, ill. a feladat utolsó kikötése értelmében mennyivel kell *biztosan* csökkentenünk ezt a számot.

a) Az $A_i A_k$ egyenesre a többi három pontból állított 3 merőleges párhuzamos ez, egyenesenként 3-mal csökkenti a metszéspontok számát, összesen tehát 30-cal.

b) $\binom{5}{3} = 10$ olyan háromszög van, amelynek csúcsai az A_i -k közül való, ezek magasságpontjában 3 merőleges metszi egymást; minden háromszög ezért 2-vel, összesen 20-szal csökkenti a metszéspontszámot.

c) Az A_i csúcsból a rajta át nem menő 6 összekötő egyenesre 6 merőleges állítható, ezek $\binom{6}{2} = 15$ metszéspontja nem számít bele a metszéspontok számába, tehát összesen $5 \cdot 15 = 75$ metszéspont.

A biztos csökkenések száma ezért $30 + 20 + 75 = 125$, ennélfogva legfeljebb $435 - 125 = 310$ metszéspont létezhet.

Megjegyzés. Meggondolásaink még nem bizonyítják, hogy a merőlegesek egymásközi metszéspontjai számának a maximuma 310; ehhez még meg kellene mutatni, hogy valóban létezik 310 metszésponttal rendelkező egyeneshalmaz,

ill. kiindulási pontötös. Ez viszont tényleg bizonyítható, de a bizonyítás eléggé bonyodalmas.

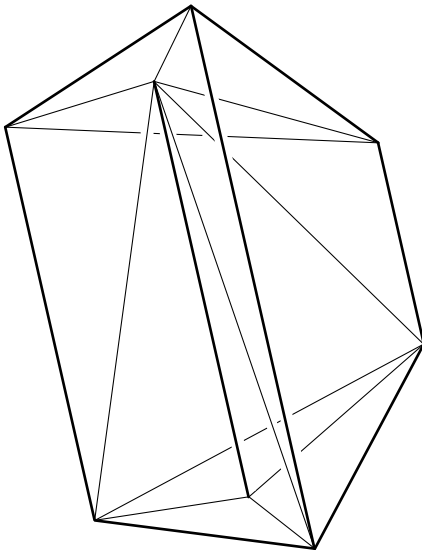
A feladat eredeti formájában — tehát ahogyan a versenyzők kézhez kapták — úgy szólt, hogy: Mennyi a metszéspontok számának a maximuma, Közvetlenül a verseny előtt azonban a zsűri tagjai rájöttek, hogy így erre a versenyzőknek rengeteg idejük rámenne, és ezért szóban közölték, hogy a feladatban a „maximum létezését nem kell bizonyítani”. Végeredményben tehát körülbelül azt a teljesítményt kívánták tőlük, amit a mi megfogalmazásunk is megkíván.

1964/6. Adott az $ABCD$ tetraéder. A D csúcsot kössük össze az ABC lap D_1 súlypontjával. A DD_1 egyenessel az A , B illetve C csúcson át húzott párhuzamosok a csúcsokkal szemben levő oldallapok síkját rendre az A_1 , B_1 , illetve C_1 pontban metszik.

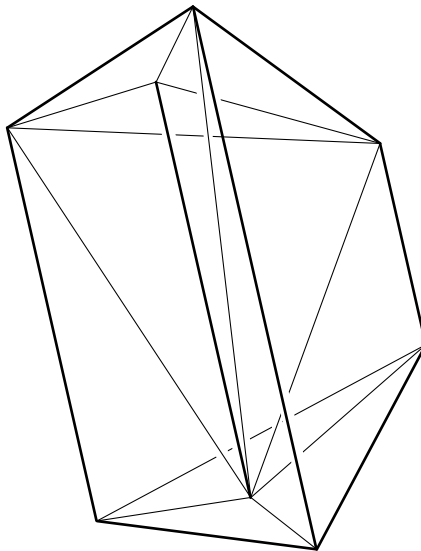
Bizonyítsuk be, hogy az $ABCD$ tetraéder térfogata harmadrésze az $A_1B_1C_1D_1$ tetraéder térfogatának.

Érvényes-e a kapott eredmény akkor is, ha a D_1 pontot tetszőlegesen vesszük fel az ABC háromszög belsejében?

Megoldás. Az a) és b) feladatrészt egyszerre oldjuk meg, megmutatjuk, hogy $A_1B_1C_1D_1$ térfogata mindig háromszorosa $ABCD$ térfogatának.



64/6.1a ábra

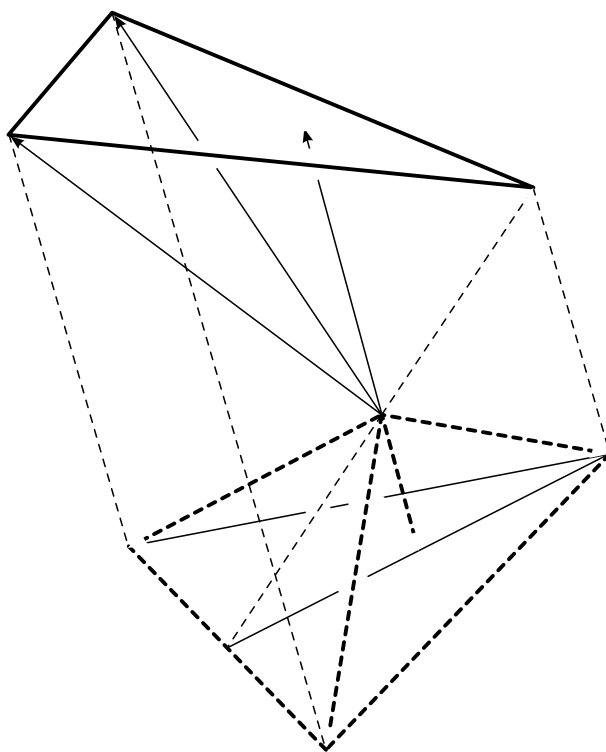


64/6.1b ábra

Először megmutatjuk, hogy ha az $ABCD$ és $XYZU$ tetraéderek olyanok, hogy az AX , BY , CZ , DU egyenesek párhuzamosak, D az XYZ háromszögnek, U viszont az ABC háromszögnek belső pontja, és az ABC , XYZ háromszögeknek nincs közös pontja, akkor az $ABCD$ és $XYZU$ tetraéderek térfogata egyenlő (1964/6.1a, 1b ábrák).

Állításunk bizonyítására vegyük észre, hogy $ABYXD$ és $ABYXU$ négyoldalú gúla alaplapja azonos és a D , U csúcsok távolsága az $ABYX$ laptól egyenlő, ezért $ABYXD$ és $ABYXU$ térfogata egyenlő. Ugyanezt mondhatjuk ugyanilyen okból a $BCZYD$ és $BCZYU$, továbbá a $CAXZD$ és $CAXZU$ gúlákra. Ha viszont az $ABCXYZ$ ferdén metszett hasábból az előbbi gúlapárok először említett tagjait vesszük el, akkor maradékul az $ABCD$ tetraédert kapjuk meg, ha pedig a gúlapárok második tagjait, akkor a maradék az $XYZU$ tetraéder. Ez éppen azt jelenti, hogy $ABCD$ és $XYZU$ térfogata egyenlő.

Most rátérünk a feladat állításának a bizonyítására. Válasszunk az ABC háromszög belsejében egy tetszőleges D_1 pontot, a DD_1 egyenes metssze az $A_1B_1C_1$ lapot D' -ben (1964/6.2. ábra). Bevezető tételünk szerint az $ABCD'$



64/6.2. ábra

és $A_1B_1C_1D_1$ tetraédernek térfogata egyenlő. Ha viszont bebizonyítjuk, hogy D_1D' háromszor akkora, mint DD_1 , akkor azt is igazoljuk, hogy $ABCD$ térfogata harmada $ABCD'$ térfogatának, tehát a vele egyenlő térfogatú $A_1B_1C_1D_1$ térfogatának is. Állításunk bizonyítására tehát elegendő megmutatnunk, hogy $DD' = 2DD_1$.

Ennek igazolására vektorokat használunk. Válasszuk origónak a D pontot, az egyes pontok helyvektorait a pontok jelölésére használt nagybetűk megfelelő kisbetűivel jelöljük. Mivel D_1 benne van az A , B és C által meghatározott síkban

$$(1) \quad \mathbf{d}_1 = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c},$$

ahol $\alpha + \beta + \gamma = 1$ és ez az előállítás egyértelmű [14]. Mivel CC_1 párhuzamos DD_1 -gyel, $\mathbf{c}_1 = \mathbf{c} + \lambda \mathbf{d}_1$. Helyettesítsük ebbe \mathbf{d}_1 (1) alatti értékét, rendezés után kapjuk, hogy

$$(2) \quad \mathbf{c}_1 = \lambda \alpha \mathbf{a} + \lambda \beta \mathbf{b} + (1 + \lambda \gamma) \mathbf{c}.$$

Mivel \mathbf{c}_1 benne van \mathbf{a} és \mathbf{b} síkjában, \mathbf{c} együtthatója szükségképpen 0 és ezért $\lambda = -\frac{1}{\gamma}$. Ezt (2)-be helyettesítjük, majd rendezzük az egyenlőséget:

$$\gamma \mathbf{c}_1 = -\alpha \mathbf{a} - \beta \mathbf{b}.$$

$$\text{Hasonlóan kapjuk, hogy} \quad \begin{aligned} \alpha \mathbf{a}_1 &= -\beta \mathbf{b} - \gamma \mathbf{c}, \\ \beta \mathbf{b}_1 &= -\alpha \mathbf{a} - \gamma \mathbf{c}. \end{aligned}$$

E három egyenlőség összegéből (1)-re való tekintettel

$$\alpha \mathbf{a}_1 + \beta \mathbf{b}_1 + \gamma \mathbf{c}_1 = -2\mathbf{d}_1$$

adódik. Mivel $\alpha + \beta + \gamma = 1$, a bal oldali vektor végpontja $A_1B_1C_1$ síkjában van, a jobb oldali viszont a DD_1 egyenesen, ezért azonos D' -vel, tehát

$$\mathbf{d}' = -2\mathbf{d}_1,$$

ez pedig éppen azt jelenti, hogy $DD' = 2DD_1$, ami bizonyítandó volt.

Megállapíthatjuk tehát, hogy az $ABCD$ tetraéder térfogata D_1 minden megengedett választása mellett harmada az $A_1B_1C_1D_1$ tetraéder térfogatának.

1965.

1965/1. Keressük meg a $0 \leq x \leq 2\pi$ szakaszba eső valamennyi olyan x számot, mely kielégíti a következő egyenlőtlenséget:

$$(1) \quad 2 \cos x \leq |\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x}| \leq \sqrt{2}.$$

Megoldás. Az egyenlőtlenséget kielégítő x -ekre eleve teljesülnie kell a $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ feltételnek, ami azt jelenti, hogy szükségképpen

$$(2) \quad \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{7\pi}{4}.$$

Vizsgáljuk először a jobb oldali egyenlőtlenséget:

$$|\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x}| \leq \sqrt{2}.$$

Mivel ennek mindkét oldala nem negatív, egyenértékű a négyzetreemeléssel nyert egyenlőtlenséggel:

$$2 - 2\sqrt{1 - \sin^2 2x} \leq 2,$$

azaz

$$-\sqrt{1 - \sin^2 2x} \leq 0,$$

ami minden x -re teljesül, hiszen a bal oldal nem pozitív.

Térjünk most rá a bal oldali egyenlőtlenségre:

$$(3) \quad 2 \cos x \leq |\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x}|.$$

Ez eleve teljesül, ha $\cos x$ nem pozitív, hiszen a jobb oldal nem negatív, azaz, ha

$$(4) \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}.$$

Elegendő ezért (3)-at a $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{4}$ intervallumokban vizsgálni. Ezekben (3) mindkét oldala nem negatív, tehát az egyenlőtlenség egyenértékű a négyzetével:

$$4 \cos^2 x \leq 2 - 2\sqrt{1 - \sin^2 2x} = 2 - 2|\cos 2x|,$$

ebből

$$2 \cos^2 x - 1 \leq -|\cos 2x|$$

azaz

$$\cos 2x \leq -|\cos 2x|,$$

ami akkor teljesül, ha $\cos 2x \leq 0$, vagyis $\frac{\pi}{2} \leq 2x \leq \frac{3\pi}{2}$ vagy $\frac{\pi}{2} + 2\pi \leq 2x \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi$, azaz, ha

$$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4} \quad \text{vagy} \quad \frac{5\pi}{4} \leq \frac{7\pi}{4},$$

ezeknek a vizsgált intervallumok részei. Összefoglalva: tehát az (1) egyenlőtlenségeket a

$$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{7\pi}{4}$$

intervallumhoz tartozó valós számok elégítik ki.

1965/2. A_z

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0,$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0$$

egyenletrendszer együtthatóiról a következőket tudjuk:

- a) a_{11} , a_{22} , a_{33} mindegyike pozitív,
 b) a többi együttható mind negatív,
 c) minden egyes egyenletben az együtthatók összege pozitív.

Bizonyítsuk be, hogy az egyenletrendszer egyetlen megoldása:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

Megoldás. Tegyük fel, hogy az egyenletrendszernek van olyan megoldása, amelyben nem minden $x_i = 0$. Mivel (x_1, x_2, x_3) -mal együtt $(-x_1, -x_2, -x_3)$ is megoldás, feltehetjük, hogy az x_i -k között van pozitív, legyen közülük a legnagyobb pl. x_1 . Válasszuk ki az első egyenletet (ha x_i a legnagyobb, az i -edik egyenletet választjuk) és vegyük figyelembe, hogy pl. $x_2 \leq x_1$ -ből $a_{12}x_2 \geq a_{12}x_1$ következik:

$$\begin{aligned} 0 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \geq a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + a_{13}x_1 = \\ &= (a_{11} + a_{12} + a_{13})x_1 > 0, \end{aligned}$$

ami nyilván ellentmondás, tehát nem lehet 0-tól különböző az x_i -k között.

Megjegyzések. 1. A feladat és annak megoldása minden további nélkül általánosítható n ismeretlenes egyenletből álló rendszerre is.

2. A feladat állítása következik abból a tételből is, mely szerint egy ilyen egyenletrendszernek csak akkor lehet nem csupa 0-ból álló megoldása, ha determinánsa nulla. Ha tehát megmutatjuk, hogy ez a determináns pozitív, akkor azt is bizonyítjuk, hogy $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

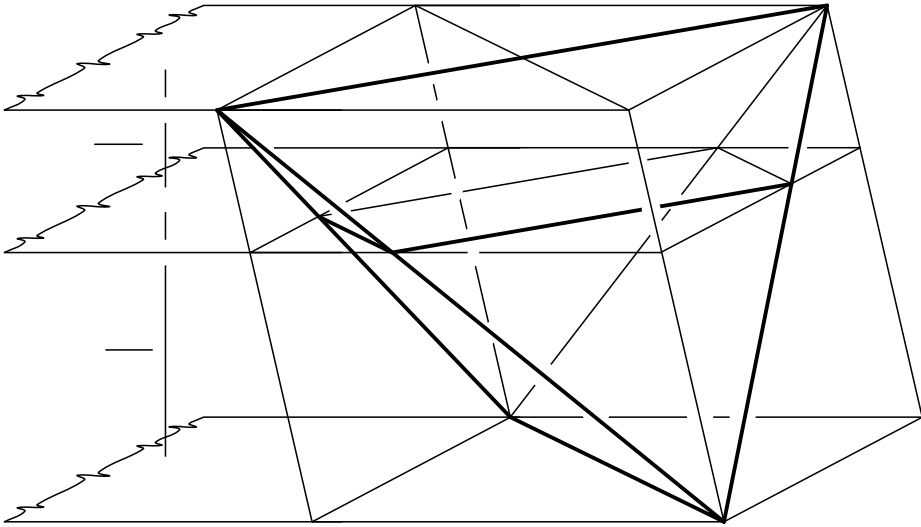
E célból adjuk hozzá az egyenletrendszer determinánsának az első oszlopához a második és a harmadik oszlopot, ebben az esetben a determináns értéke nem változik:

$$D = \begin{vmatrix} q_1 & a_{12} & a_{13} \\ q_2 & a_{22} & a_{23} \\ q_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

ahol q_1 , q_2 , q_3 rendre a sorokban levő elemek összege és ezért pozitívak. Fejtsük ki a determinánst az első oszlopa szerint: $D = q_1(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + q_2(a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33}) + q_3(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})$.

A kifejtésben a második és harmadik zárójeles tag az a) és b) kikötések miatt pozitív. Mivel $a_{22} + a_{23} > a_{21} + a_{22} + a_{23} > 0$, $a_{22} > -a_{23}$, hasonlóan: $a_{33} > -a_{32}$, és ebből $a_{22}a_{33} > a_{23}a_{32}$, ennélfogva a kifejtés első zárójeles tagja s vele együtt D is pozitív.

1965/3. Az adott $ABCD$ tetraéder AB élének hosszúsága a , CD élének hossza b . Az AB és CD kitérő élek egyenesének a távolsága d , hajlásszöge ω . A tetraédert egy, az AB és CD élekkel párhuzamos ε sík két részre vágja szét. Mekkora a két rész térfogatának az aránya, ha ismeretes, hogy az AB egyenes és az ε távolsága k -szorosa a CD egyenes és az ε közötti távolságnak.



65/3.1. ábra

Megoldás. Hogy az itt fellépő viszonyokról szemléletesebb képet kaphassunk, a tetraédert az 1965/3.1. ábrán bennfoglaló paralelepipedonjával [15] ábrázoltuk; az ε sík a tetraéderből az $XYZU$ négyszöget metszi ki; ez a négyszög paralelogramma, mert ha két síkot a metszésvonalával párhuzamos ε síkkal metsszük el, akkor a metszésvonalak is párhuzamosak lesznek az eredeti két sík metszésvonalával; így XY és ZU az AB -vel, YZ és UX a CD -vel.

A feladat szerint a paralelepipedon alap- és fedőlapjának a távolsága d , ezért a fedőlap és ε távolsága $\frac{kd}{k+1}$, ε és az alaplap távolsága $\frac{d}{k+1}$. Vezessük be az $XY = ZU = a'$, $YZ = UX = b'$ jelölést. Az AB élt D -ből $XY : AB = \frac{d}{k+1} : d = \frac{1}{k+1}$ arányban kicsinyítve XY -t kapjuk meg, ezért

$$(1) \quad XY = a' = \frac{a}{k+1}, \quad \frac{a}{a'} = k+1.$$

Hasonlóan CD -t B -ből $\frac{dk}{k+1} : d = \frac{k}{k+1}$ arányban kicsinyítve kapjuk, hogy

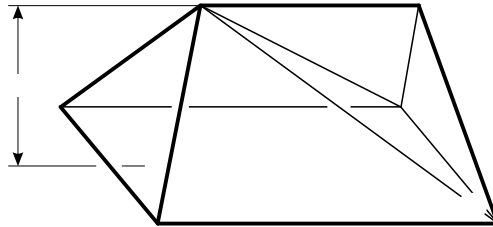
$$(2) \quad YZ = b' = \frac{bk}{k+1}, \quad \frac{b}{b'} = \frac{k+1}{k}.$$

Az ε sík a tetraédert az $ABXYZU$ és $CDXYZU$ háztetőidomokra vágja szét; alaplapjaik közös területe t , magasságaik $\frac{kd}{k+1}$, ill. $\frac{d}{k+1}$; XY -nal, ill. YZ -vel párhuzamos gerincéleik a , ill. b , térfogataik V_1 , ill. V_2 . A térfogatarány (ld.

1. megjegyzésünket) (1) és (2) felhasználásával:

$$V_1 : V_2 = \frac{kdt}{6(k+1)} \left(2 + \frac{a}{a'} \right) : \frac{dt}{6(k+1)} \left(2 + \frac{b}{b'} \right) = \frac{k(k+3)}{\frac{3k+1}{k}} = \frac{k^2(k+3)}{3k+1}.$$

Megjegyzések. 1. A megoldásban felhasználtuk az ún. háztetőidom térfogatképletét. Háztetőidomot kapunk, ha egy háromoldalú (végtelen) hasábot úgy metszünk el két síkkal, hogy az egyik oldallapból megmaradt rész paralelogramma legyen, ez az idom alaplapja (az 1965/3.2. ábrán az $XYZU$ paralelogramma); az alaplappal párhuzamos él legyen $AB = g$, ez az ún. gerincél. Ennek távolsá-



65/3.2. ábra

ga az alaplaptól az m magasság. Jelölje az alaplap élvonalait a és b ($a \parallel g$). Az $ABXYZU$ háztetőidom szétvágható az $AXYZU$ paralelogramma alapú gúlára és az $ABYZ$ tetraéderre; vegyük észre, hogy az alapparalelogramma a és b oldalának ω szöge egyenlő a tetraéder AB és YZ éleinek a szögével. A háztetőidom térfogata a gúla és a tetraéder térfogatának az összege:

$$V = \frac{mab \sin \omega}{3} + \frac{mgb \sin \omega}{6} = \frac{mab \sin \omega}{6} \left(2 + \frac{g}{a} \right)$$

Jelölje az alapparalelogramma területét t ; $t = ab \sin \omega$, ebből

$$V = \frac{tm}{6} \left(2 + \frac{g}{a} \right).$$

2. A térfogatarány érdekessége, hogy csupán k -tól függ, ennek mélyebb oka az, hogy affin transzformációval két tetraéder átvihető egymásba, ez azonban megtartja a párhuzamosságot, az egy egyenesen levő szakaszok arányát és a térfogatarányt is, tehát minden tetraéderre ugyanannak a térfogataránynak kell fellépnie.

1965/4. Állítsuk elő az összes olyan x_1, x_2, x_3, x_4 valós számnégyest, melynek bármely eleméhez hozzáadva a többi három szorzatát, összegül mindig 2-t kapunk.

Megoldás. Feladatunk az

$$x_1 + x_2 x_3 x_4 = 2,$$

$$x_2 + x_3 x_4 x_1 = 2,$$

$$x_3 + x_4 x_1 x_2 = 2,$$

$$x_4 + x_1 x_2 x_3 = 2,$$

egyenletrendszer megoldását kívánja meg. Figyeljük meg mindenekelőtt, hogy $x_i \neq 0$, mert ha pl. $x_1 = 0$ teljesülne, az utolsó három egyenletből $x_2 = x_3 = x_4 = 2$ következne, ezek viszont nem elégítik ki az első egyenletet. Tételezzük fel, hogy létezik egy (x_1, x_2, x_3, x_4) megoldás, és jelöljük az x_i -k szorzatát Q -val. Mind a négy x_i kielégíti az

$$x + \frac{Q}{x} = 2$$

egyenletet. Ebből $x^2 - 2x + Q = 0$ és így a lehetséges x_i értékek

$$1 + \sqrt{1 - Q} \quad \text{és} \quad 1 - \sqrt{1 - Q},$$

ami azt jelenti, hogy az x_i -k között legfeljebb két különböző lehet. Ezt figyelembe véve nézzük végig a lehetséges három esetet.

a) Valamennyi x_i egyenlő; legyen $x_i = k$ ($i = 1, 2, 3, 4$), ekkor $k + k^3 = 2$, ebből

$$(k - 1)(k^2 + k + 2) = 0$$

a második tényezőnek nincs valós gyöke, ezért csak $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = k = 1$ lehetséges és ez meg is felel.

b) Három egyenlő, egy tőlük különböző: $x_1 = x_2 = x_3 = k$, $x_4 = n$ és $k \neq n$. Az első, ill. negyedik egyenletből

$$k + k^2 n = 2$$

$$n + k^3 = 2.$$

A két egyenlet megfelelő oldalának a különbségéből $(k - n)(1 - k^2) = 0$ adódik; mivel $k \neq n$, $k^2 = 1$, $k = \pm 1$. Ha $k = 1$, akkor a negyedik egyenletből $n = k$ -t kapnánk, amit kizártunk, tehát csak $k = -1$ lehetséges. A negyedik egyenletből

$$n - 1 = 2, \quad n = 3,$$

tehát $x_1 = x_2 = x_3 = -1$, $x_4 = 3$, ez és ennek a megoldásnak a permutációi kielégítik az egyenletrendszert.

c) Két-két ismeretlen páronként egyenlő, tehát $x_1 = x_2 = k$, $x_3 = x_4 = n$, de $k \neq n$. Az első, ill. negyedik egyenletből

$$k + k n^2 = 2,$$

$$n + k^2 n = 2.$$

A két egyenlet különbségéből kapjuk, hogy $(k - n)(1 - nk) = 0$, $k \neq n$ miatt $nk = 1$. Ezt az előbbi egyenletbe helyettesítve $k + n = 2$ adódik, n és k tehát az $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 = 0$ egyenlet gyökei, ezért $1 = k = n$, amit azonban kizártunk, tehát a c) eset nem ad megoldást.

$$(1, 1, 1, 1); (3, -1, -1, -1); (-1, 3, -1, -1); (-1, -1, 3, -1); (-1, -1, -1, 3).$$

az OAB háromszög belsejét.

65/5.1. ábra

Mivel az X, Y, Q, P pontok egy körön vannak, hiszen P -ből és Q -ból XY derékszögben látszik, ezért $XYPQ$ húrnégyszög és a szemkötti szögeinek

kiegészítő-szög volta miatt

$$\angle OXY = \angle OQP = \alpha, \quad \angle OYX = \angle OPQ = \beta$$

Ennélfogva az OXY és OQP háromszögek hasonlóak és a hasonlóság aránya

$$\frac{OP}{OY} = \cos \gamma,$$

ha az adott hegyesszög mértékét γ -val jelöljük. OXY -t tehát egy O középpontú $\cos \gamma$ arányú kicsinyítés, majd az AOB -t f felezőjére való tükrözés egymásutánja viszi át OQP -be; ez azt jelenti, hogy az $M \leftrightarrow H$ egymáshozrendelés hasonlóság, méghozzá ún. nyújtva tükrözés (tükrözve nyújtás), amelynek középpontja O , tengelye f , aránya $\cos \gamma$, és azonnal láthatjuk, hogy ez akkor is igaz, ha M az OA -n vagy az OB -n van. Következésképpen az OAB háromszög képét (és benne az AB szakaszét) úgy kapjuk meg, hogy OAB -t $\cos \gamma$ arányban kicsinyítjük, majd f -re tükrözzük. Mivel ez a transzformáció kölcsönösen egyértelmű, a keresett mértani hely az AB szakasznak, ill. az OAB háromszögnek a transzformációval kapott képe.

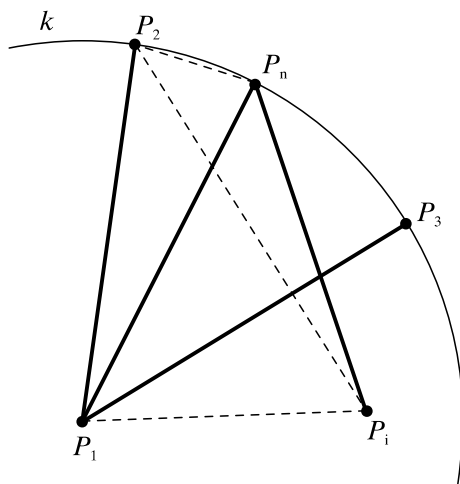
1965/6. Adott a síkban n darab pont ($n \geq 3$). A belőlük kiválasztható összes pontpár hosszának maximuma legyen d . Az említett szakaszok közül azokat, melyeknek a hosszúsága éppen d , a pontrendszer átmérőinek nevezzük. Bizonyítsuk be, hogy legfeljebb n darab ilyen átmérő van.

Megoldás. Jelölje a pontokat $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n$. Egy pont fokának mondjuk a belőle kiinduló átmérők számát. Mivel a foksámok összege az átmérők számának a kétszerese, ha minden pont foka legfeljebb 2, a foksámok összege legfeljebb $2n$ és ebben az esetben valóban legfeljebb n átmérő lehet.

Állításunkat teljes indukcióval bizonyítjuk. $n=3$ -ra az állítás igaz; igaz akkor is, ha a P_1, P_1, \dots, P_n pontok fokszáma legfeljebb 2, ezért tegyük fel, hogy van a pontok között olyan, mondjuk P_1 , amelynek a fokszáma legalább 3 (1965/6.1. ábra). Indukciós feltevésünk szerint $n-1$ pont esetén legfeljebb $n-1$ átmérő létezhet.

A P_1 -ből induló átmérők végpontjai egy P_1 középpontú d sugarú k kör egy ívén vannak rajta, legyenek a köríven elhelyezkedő szélső pontok P_2 és P_3 . A P_2P_3 ív nem nagyobb 60° -osnál, mivel akkor P_2P_3 nagyobb lenne d -nél. Mivel P_1 legalább harmadfokú, indul belőle átmérő a P_2P_3 ív egy belső pontjához is, legyen ez P_n . Megmutatjuk, hogy P_n elsőfokú.

Tegyük fel ui., hogy P_n -ből a P_nP_1 átmérőn kívül még egy P_nP_i átmérő is indul, P_i nyilván nem lehet a k körön. Nem lehet k -n kívül sem, mert akkor P_1P_i nagyobb lenne d -nél. Ha P_i a körön belül lenne, nem eshet a $P_1P_2P_3$ háromszög belsejébe, mert akkor $P_nP_i < d$ lenne; P_i tehát a $P_1P_2P_3$ háromszögön kívül van. Ebben az esetben azonban metszeni kell P_1P_2 -t vagy P_1P_3 -at; tegyük



65/6.1. ábra

fel, hogy P_1P_3 -at. $P_1P_2PnP_i$ ezek szerint konvex négyszög és az ezekre vonatkozó egyenlőtlenség szerint (ld. 2. megjegyzésünket) az átlók összege nagyobb bármely két szemközti oldal összegénél, tehát

$$P_1P_2 + PnP_i < P_1P_n + P_2P_i, \quad \text{azaz } d < P_2P_i$$

ami ellentmond d definíciójának, P_i ezért nem létezhet, következésképpen P_n elsőfokú. Hagyjuk el P_n -t; a maradék $n - 1$ ponthoz legfeljebb $n - 1$ átmérő tartozhat az indukciós feltevés értelmében, ehhez P_1P_n -t hozzávéve éppen a bizonyítandó állítást kapjuk.

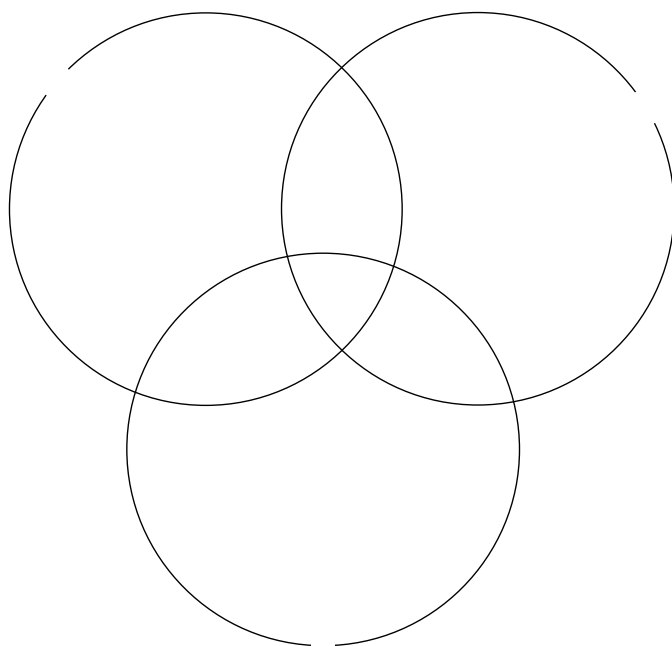
Megjegyzések. 1. A feladat alapvető kombinatorikus geometriai tétele *H. Hopf*-tól és *E. Panwitz*-tól származik és számos feladat kapcsolódik hozzá.

2. Felhasználtuk a következő tételt: az $ABCD$ konvex négyszögben $AB + CD < AC + BD$. Legyen ui. AC és BD metszéspontja M . A háromszögegyenlőtlenség alapján felírt $AB < AM + BM$, $CD < CM + DM$ egyenlőtlenségeik összegezése éppen állításunkat bizonyítja.

3. A feladat térbeli általánosítása: a tér n pontja ($n > 3$) legfeljebb $2n - 2$ átmérőt határozhat meg.

1966.

1966/1. Egy matematikai tanulmányi versenyen három feladatot tűztek ki: A -t, B -t és C -t. 25 olyan tanuló akadt, akiknek mindegyike megoldott legalább egy feladatot. Azok között a tanulók között, akik A -t nem tudták megoldani, kétszer annyian voltak olyanok, akik megoldották B -t, mint akik C -t oldották meg. Csak az A feladatot 1-gyel több tanuló oldotta meg, mint ahányan a többiek voltak, akik szintén megoldották A -t. A csupán egy feladatot megoldó tanulók fele nem tudta megoldani A -t. Hány tanuló oldotta meg csak a B feladatot?



66/1.1. ábra

Megoldás. Szemléltessük körökkel azoknak a tanulóknak a halmazát, akik az A , a B , a C feladatot megoldották, a két, ill. három feladatot megoldók halmazának a körlemezek közös részei felelnek meg (1966/1.1. ábra).

Jelölje X_A , X_B , X_C azoknak a tanulóknak a számát, akik *csak* az A , csak a B , ill. csak a C feladatot oldották meg, X_{AB} azokét, akik *csak* A -t és B -t, X_{ABC} , akik mindhárom feladatot, stb. A feladat szerint:

$$X_A + X_B + X_C + X_{AB} + X_{BC} + X_{AC} + X_{ABC} = 25,$$

$$X_B + X_{BC} = 2(X_C + X_{BC}),$$

$$X_A = 1 + X_{AB} + X_{AC} + X_{ABC},$$

$$X_A + X_B + X_C = 2(X_B + X_C).$$

Ebből az egyenletrendszerből kell X_B (pozitív egész) értékét meghatározni. Áttekinthetőbbé válnak egyenleteink, ha az ismeretleneket egy oldalra rendezzük:

$$(1) \quad X_A + X_B + X_C + X_{AB} + X_{BC} + X_{AC} + X_{ABC} = 25,$$

$$(2) \quad X_B - 2X_C - X_{BC} = 0,$$

$$(3) \quad X_A - X_{AB} - X_{AC} - X_{ABC} = 1,$$

$$(4) \quad X_A - X_B - X_C = 0.$$

Vonjuk ki az első három összegéből a negyedik kétszeresét:

$$(5) \quad 4X_B + X_C = 26.$$

(2)-ből következik, hogy $X_B - 2X_C = X_{BC} \geq 0$, tehát $X_B \geq 2X_C$, ezért (5)-ből

$$26 = 4X_B + X_C \geq 8X_C + X_C = 9X_C,$$

tehát

$$X_C \leq \frac{26}{9},$$

és így X_C lehetséges értékei 0, 1 és 2. $X_C = 0$, 1 esetén (5)-nek nincs X_B -ben egész megoldása, tehát az egyetlen lehetőség: $X_C = 2$ és ebből

$$X_B = 6,$$

a B feladatot hatan oldották meg.

Megjegyzés. A kapott megoldások segítségével egyszerűen meghatározhatók az egyenletrendszer további ismeretlenjei: $X_A = 8$, $X_{BC} = 2$; viszont a hiányzó három minden olyan pozitív egész lehet, amelyeknek összege 7:

$$X_{AB} + X_{AC} + X_{ABC} = 7.$$

1966/2. Jelölje valamely háromszögben az oldalakat rendre a , b , c ; a velük szemközi szögeket α , β , γ . Bizonyítsuk be, hogy ha

$$(1) \quad a + b = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} (\operatorname{atg} \alpha + \operatorname{btg} \beta),$$

akkor a háromszög egyenlő szárú.

1. megoldás. Feltételezzük természetesen, hogy az (1)-beli kifejezéseknek van értelme; fejezzük ki a tangensfüggvényt a szinuszfüggvény és koszinuszfüggvény hányadosaként, majd a kapott nevezők szorzatával szorozzuk meg egyenlőségünket, s végül rendezzük:

$$a + b = \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}} \left(\frac{a \sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{b \sin \beta}{\cos \beta} \right).$$

$$a \cos \beta \left(\cos \alpha \cos \frac{\gamma}{2} - \sin \alpha \sin \frac{\gamma}{2} \right) + b \cos \alpha \left(\cos \beta \cos \frac{\gamma}{2} - \sin \beta \sin \frac{\gamma}{2} \right) = 0,$$

$$a \cos \beta \cos \left(\alpha + \frac{\gamma}{2} \right) + b \cos \alpha \cos \left(\beta + \frac{\gamma}{2} \right) = 0.$$

Vegyük észre, hogy

$$\left(\alpha + \frac{\gamma}{2} \right) + \left(\beta + \frac{\gamma}{2} \right) = 180^\circ$$

miatt

$$\cos \left(\beta + \frac{\gamma}{2} \right) = -\cos \left(\alpha + \frac{\gamma}{2} \right),$$

ezért ekvivalens átalakításokkal (1)-ből a következőt kapjuk:

$$(2) \quad \cos \left(\alpha + \frac{\gamma}{2} \right) (a \cos \beta - b \cos \alpha) = 0.$$

Ha $\cos\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) = 0$, $\alpha + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ$ és így $\beta + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ$ is teljesül, azaz $\alpha = \beta$, a háromszög egyenlő szárú.

Ha a második tényező nulla, akkor

$$a \cos \beta = b \cos \alpha,$$

azaz

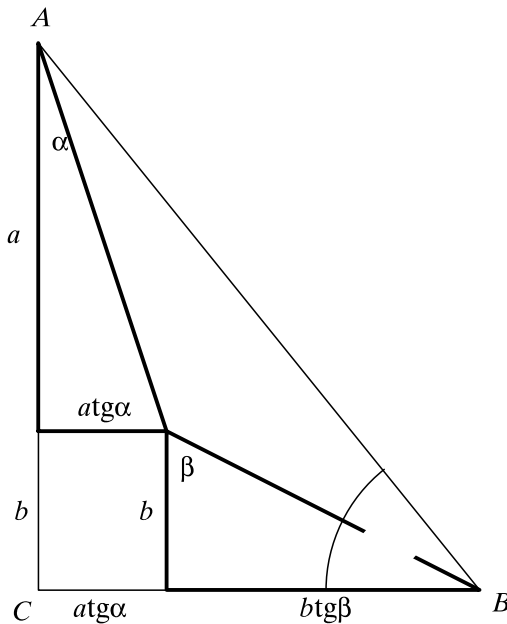
$$(3) \quad a^2 \cos^2 \beta = b^2 \cos^2 \alpha$$

Adjuk ehhez hozzá a szinuszételből származó $a \sin \beta = b \sin \alpha$ egyenlőség négyzetét:

$$\begin{aligned} a^2 \sin^2 \beta &= b^2 \sin^2 \alpha, \\ a^2 &= b^2, \end{aligned}$$

a háromszög egyenlő szárú.

2. megoldás. Az (1) egyenlőségnek sokféle geometriai jelentés tulajdonítható. Készítsük el azokat a derékszögű háromszögeket, amelyeknek egyik hegyesszöge α , ill. β , a mellettük levő befogók pedig a , ill. b ; a szemközti befogók ekkor $a \operatorname{tg} \alpha$, ill. $b \operatorname{tg} \beta$. Illesszük e két háromszöget egymás mellé az 1966/2.1. ábrán látható módon, majd foglaljuk be a két háromszöget egy ABC derékszögű



66/2.1. ábra

háromszögbe, amelynek befogói $a + b$ és $a \operatorname{tg} \alpha + b \operatorname{tg} \beta$. (Mivel a és b szerepe szimmetrikus, feltételezhetjük, hogy $b \geq a$).

Mivel (1) egyértelműen meghatározza $\frac{\gamma}{2}$ -t és az ABC háromszögben

$$\operatorname{tg} ABC \triangleleft = \frac{a+b}{a \operatorname{tg} \alpha + b \operatorname{tg} \beta},$$

$ABC \triangleleft = \frac{\gamma}{2}$. Ha az eredeti két kis derékszögű háromszög közös csúcsa M , aszerint, hogy M az AB egyenes C -vel egyező, vagy azzal ellentétes oldalán helyezkedik el,

$$MAB \triangleleft = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} - \alpha, \quad \text{ill.} \quad MAB \triangleleft = \alpha - \left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) = \alpha - 90^\circ + \frac{\gamma}{2},$$

$$MBA \triangleleft = \frac{\gamma}{2} - (90^\circ - \beta), \quad \text{ill.} \quad MBA \triangleleft = 90^\circ - \beta - \frac{\gamma}{2}.$$

Mindkét esetben:

$$|MAB \triangleleft - MBA \triangleleft| = |180^\circ - \alpha - \beta - \gamma| = 0, \quad \text{tehát} \quad MAB \triangleleft = MBA \triangleleft,$$

az ABM háromszög egyenlő szárú (esetleg elfajult): $AM^2 = BM^2$, tehát a kis derékszögű háromszögekből

$$\begin{aligned} a^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) &= b^2(1 + \operatorname{tg}^2 \beta), \\ a^2 \cos^2 \beta &= b^2 \cos^2 \alpha, \end{aligned}$$

ez azonban azonos az 1. megoldás (3) egyenlőségével, amiből $a = b$ következik.

Megjegyzés. A 2. megoldásban felhasználtuk, hogy α és β hegyesszögek. Ez a feltételezés jogos, mert választhattuk úgy a jelölést, hogy $b \geq a$ teljesüljön, ekkor $\beta \geq \alpha$. β nem lehet tompaszög, mert akkor $180^\circ - \beta$ hegyesszög, azaz

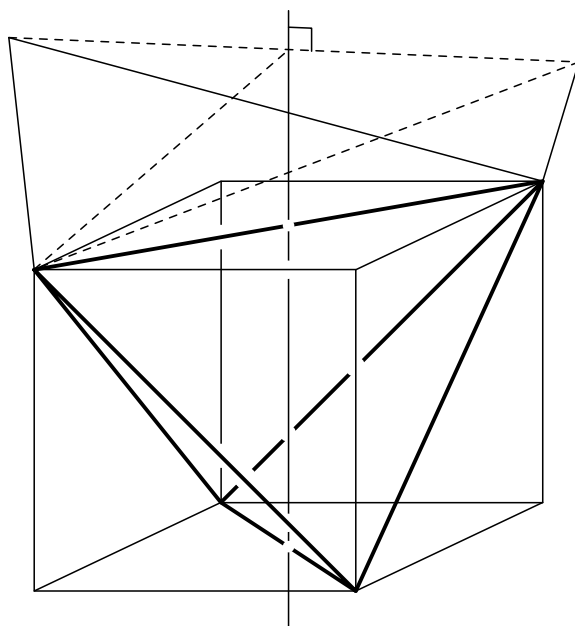
$$90^\circ > 180^\circ - \beta = \alpha + \gamma > \alpha$$

miatt $-\operatorname{tg} \beta > \operatorname{tg} \alpha$, azaz $\operatorname{tg} \beta$ negatív volta miatt $-\operatorname{tg} \beta = |\operatorname{tg} \beta| > \operatorname{tg} \alpha$ és így ebből $b \geq a$ miatt $|\operatorname{tg} \beta| > \operatorname{tg} \alpha$ következik. Ez azonban azt jelenti, hogy (1) jobb oldala negatív, ami lehetetlen, mert $a + b$ pozitív; következésképpen β (és így α is) hegyesszögek.

1966/3. Bizonyítsuk be, hogy egy szabályos tetraéder köré írt gömb középpontja és a csúcsok közötti távolságok összege kisebb, mint a tér bármely más pontjából a tetraéder csúcspontjaiba vezető távolságok összege.

1. megoldás. Jobb szemléltetés céljából az $ABCD$ szabályos tetraédert bennfoglaló paralelepipedonjával [13] azaz bennfoglaló kockájával együtt vizsgáljuk (1966/3.1. ábra). Az AB és CD élek felezőpontját összekötő t egyenes merőleges a kocka két szemközti lapsíkjára, s így az AB , CD élekre is.

Legyen most P a tér tetszőleges pontja. Legyen P tükörképe t -re P' és PP' felezőpontja — azaz P -ből a t -re állított merőleges talppontja — legyen Q . Vizsgáljuk most meg P -nek az A és B csúcsoktól mért távolságösszegét, $PA + PB$ -t. A tükrözés miatt $PB = P'A$ és így $PA + PB = PA + P'A$. A PAP' háromszögben QA súlyvonal és a súlyvonalegyenlőtlenség (ld. 2. megjegyzésünk) szerint



66/3.1. ábra

a háromszög súlyvonala kisebb a közrefogó oldalak számtani közepénél, ezért Q távolságösszege A -tól és B -től kisebb, mint P távolságösszege, feltéve, hogy P nincs rajta t -n.

Természetesen ugyanez elmondható a C -től és D -től mért távolságokra is, hiszen csak annyit használtunk fel, hogy A és B tükrös t -re és ez a C, D pontokra is igaz.

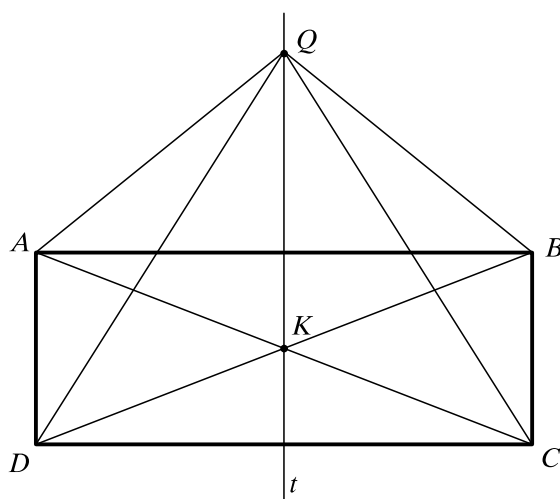
Ezek szerint ha P nincs rajta t -n, megadható t -n olyan Q pont, amelynek a csúcsoktól mért távolságösszege kisebb mint P -nek a csúcsokból mért távolságösszege.

Q A -tól és B -től mért távolsága nem változik meg, ha az AB szakaszt t körül CD -vel párhuzamos helyzetbe forgatjuk. t ekkor az $ABCD$ téglalap középvonal-egyenesé. A téglalap K középpontjának az A, B, C, D csúcsoktól mért távolságösszege kisebb, mint t bármely más pontjáé, mert ha Q t -nek K -tól különböző pontja (1966/3.2. ábra), a háromszögegyenlőtlenség miatt $QA + QC > AC$ és $QB + QD > BD$, tehát

$$QA + QB + QC + QD > KA + KB + KC + KD.$$

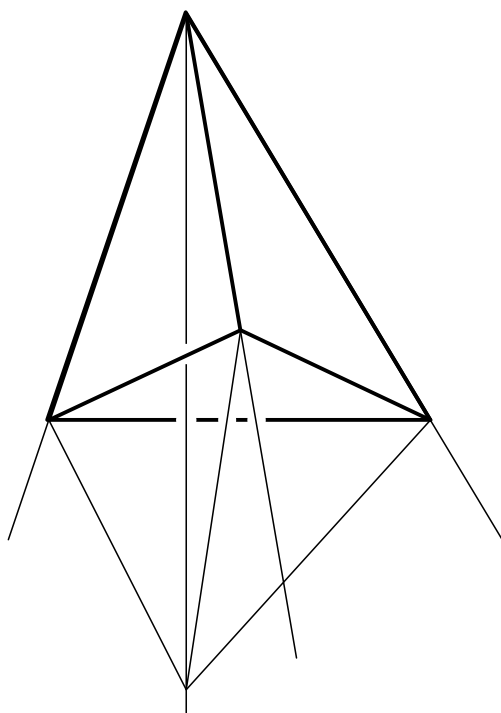
Mivel K mind a négy csúctól egyenlő távol van, ezért a köréírt gömb középpontja; megmutattuk tehát, hogy K csúcsoktól mért távolságösszege kisebb, mint a tér bármely más pontjáé.

2. megoldás. Megoldásunk a következő segédítelen alapul: a tér tetszőleges P pontjának a szabályos tetraéder lapsíkjaitól mért előjeles távolságösszege állandó, még hozzá a tetraéder testmagasságával egyenlő.



66/3.2. ábra

Egy pontnak a tetraéder egy lapsíkjától mért távolsága pozitív, ha a síknak ugyanazon az oldalán van, mint a lappal szemközti csúcs. Így pl. a tetraéder belső pontjainak az előjeles távolságai mind pozitívak.



66/3.3. ábra

A segédítélet bizonyítását térfogatszámítás segítségével végezzük el. Legyen pl. a P pont távolsága az $ABCD$ szabályos tetraéder ABC lapsíkjától negatív, a többitől pozitív (1966/3.3. ábra). A $PABD$, $PBCD$, $PACD$ tetraéderek együttesen egyrétűen lefedik az $ABCD$ tetraédert, de még többet is, pontosan a $PABC$ tetraéderrel többet. Ha a lapterületeket t -vel, az $ABCD$ magasságait m -mel, P -nek az egyes lapsíkoktól mért távolságait d_A , d_B , d_C , d_D -vel jelöljük (ebben az esetben közülük d_D negatív)

$$V_{ABCD} = V_{PABD} + V_{PBCD} + V_{PACD} - V_{PABC},$$

azaz, ha az egyenletet 3-mal szorozzuk, kapjuk, hogy

$$3tm = 3td_C + 3td_A + 3td_B + 3td_D,$$

és ebből valóban

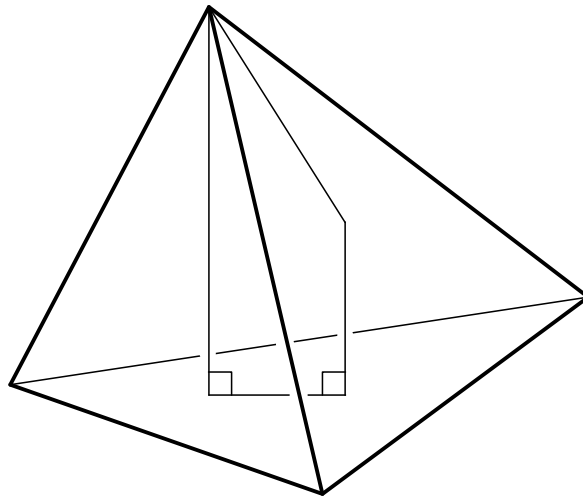
$$d_A + d_B + d_C + d_D = m \quad (\text{állandó}).$$

Hasonlóan járunk el, ha P más típusú térrészekben helyezkedik el, a negatív előjelű távolságok száma 1, 2 vagy 3 lehet.

Térjünk most rá a feladat állításainak a bizonyítására. Legyen P a tér tetszőleges pontja és a lapsíkoktól mért előjeles távolsága d_A, d_B, d_C, d_D , P merőleges vetülete az egyes lapsíkokon P_A, P_B, P_C, P_D . A háromszögegyenlőtlenségből következik, hogy pl.

$$PA + PP_A \geq m, \quad \text{azaz} \quad PA + d_A \geq m$$

hiszen $PA + PP_A \geq AP_A \geq m$, és ez akkor is igaz, ha $PP_A = d_A$ negatív (1966/3.4. ábra), egyenlőség csakis akkor állhat fenn, ha P rajta van az A -ból



66/3.4. ábra

induló magasságon. Írjuk fel előbbi eredményünket az összes csúcsra:

$$PA + d_A \geq m, \quad PB + d_B \geq m, \quad PC + d_C \geq m, \quad PD + d_D \geq m.$$

Ezeket összegezve kapjuk, hogy

$$PA + PB + PC + PD \geq 4m - (d_A + d_B + d_C + d_D) = 3m$$

és egyenlőség áll fenn, ha P a tetraéder minden magasságvonalán, tehát a körülírt gömb középpontjában van.

Megjegyzések. 1. Az első megoldásnál nem használtuk fel a tetraéder szabályosságát, hanem csupán azt, hogy van két egyenlő szemközti éle és ezek felezőpontjainak összekötő egyenese merőleges ezekre az élekre. Ez teljesül pl. minden egyenlőoldalú tetraéderre, ennek a lapjai egybevágó háromszögek.

2. Az 1. megoldásban felhasznált súlyvonegyenlőtlenség a következő módon bizonyítható: az ABC háromszög A csúcsának a szemközti oldal felező-pontjaira való tükrösképe A' ; $AA' = 2s_a$, az ABA' háromszögre alkalmazva a háromszögegyenlőtlenséget kapjuk, hogy $b + c > 2s_a$, $s_a < \frac{b+c}{2}$.

1966/4. Bizonyítsuk be, hogy bármely n pozitív egészre és bármely $x \neq \frac{\lambda\pi}{2^k}$ ($k=0, 1, 2, \dots, n$; λ tetszőleges szerinti egész szám) valós számra érvényes a következő azonosság:

$$(1) \quad \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \dots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2^n x.$$

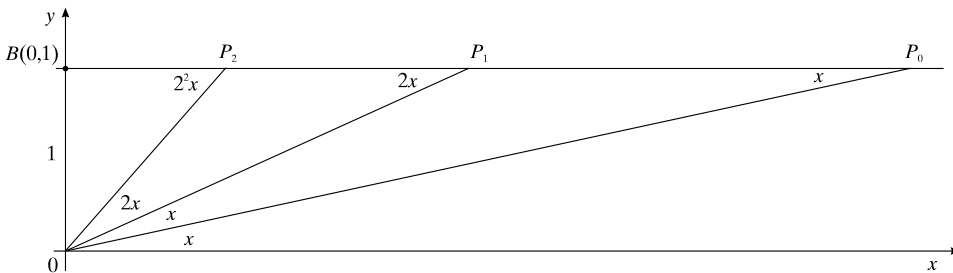
Megoldás. Abból indulunk ki, hogy a feladatban adott x -ekre

$$\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2x = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} = \frac{1}{\sin 2x}.$$

A feladat azonosságának igazolása a fenti összefüggés ismételt alkalmazásából áll:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \dots + \frac{1}{\sin 2^n x} &= (\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2x) + (\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} 4x) + \dots + \\ &+ (\operatorname{ctg} 2^{n-1} x - \operatorname{ctg} 2^n x) = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2^n x, \end{aligned}$$

ami bizonyítandó volt.



66/4.1. ábra

Megjegyzés. A feladat eredete valószínűleg geometriai tartalmára vezethető vissza, ha a benne szereplő szögek hegyesszögek.

Az $y=1$ egyenletű egyenest az origón átmenő $x, 2x, \dots, 2^n x$ irányszögű egyenesek rendre a P_0, P_1, \dots, P_n pontokon metszik (1966/4.1. ábra), ezeknek a pontoknak a $B(0, 1)$ ponttól mért távolsága rendre $\operatorname{ctg} x, \operatorname{ctg} 2x, \dots, \operatorname{ctg} 2^n x$, tehát

$$P_{i+1}P_i = \operatorname{ctg} 2^i x - \operatorname{ctg} 2^{i+1} x,$$

ezért az $OP_{i+1}P_i$ háromszög kétszeres területe $\operatorname{ctg} 2^i x - \operatorname{ctg} 2^{i+1} x$, az $OP_{n+1}P_1$ kétszeres területe pedig $\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2^n x$.

Másrészt: mivel $OP_i = \frac{1}{\sin 2^i x}$ és $OP_{i+1} = \frac{1}{\sin 2^{i+1} x}$, az $OP_{i+1}P_i$ kétszeres területe (a „szinuszos” területképlettel):

$$\frac{\sin 2^i x}{\sin 2^i x \cdot \sin 2^{i+1} x} = \frac{1}{\sin 2^{i+1} x},$$

az (1) összefüggés éppen azt fejezi ki, hogy $OP_{n+1}P_1$ területe az $OP_{i+1}P_i$ típusú háromszögek területének az összege.

1966/5. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} |a_1 - a_2|x_2 + |a_1 - a_3|x_3 + |a_1 - a_4|x_4 &= 1, \\ |a_2 - a_1|x_1 + |a_2 - a_3|x_3 + |a_2 - a_4|x_4 &= 1, \\ |a_3 - a_1|x_1 + |a_3 - a_2|x_2 + |a_3 - a_4|x_4 &= 1, \\ |a_4 - a_1|x_1 + |a_4 - a_2|x_2 + |a_4 - a_3|x_3 &= 1, \end{aligned}$$

ahol a_1, a_2, a_3, a_4 négy különböző valós számot jelent.

Megoldás. Kiindulásul szeretnénk egyenletrendszerünket az abszolútértékes kifejezésektől megszabadítani. Vegyük észre, hogy az a_i -k egymás közötti felcserélése az egyenletrendszeren semmit sem változtat; tegyük fel, hogy az a_i -k nagyságrendje: $a_e < a_k < a_h < a_n$, itt az $e k h n$ az 1 2 3 4 számok valamelyik permutációját jelenti. Vezessük be a $c_1 = a_e, c_2 = a_k, c_3 = a_h, c_4 = a_n$ jelölést és ennek megfelelően az $x_e = y_1, x_k = y_2, x_h = y_3, x_n = y_4$ jelölést is, ezzel $c_1 < c_2 < c_3 < c_4$, és egyenletrendszerünk így alakul:

$$\begin{aligned} (1) \quad & (c_2 - c_1)y_2 + (c_3 - c_1)y_3 + (c_4 - c_1)y_4 = 1, \\ (2) \quad & (c_2 - c_1)y_1 + (c_3 - c_2)y_3 + (c_4 - c_2)y_4 = 1, \\ (3) \quad & (c_3 - c_1)y_1 + (c_3 - c_2)y_2 + (c_4 - c_3)y_4 = 1, \\ (4) \quad & (c_4 - c_1)y_1 + (c_4 - c_2)y_2 + (c_4 - c_3)y_3 = 1. \end{aligned}$$

Vegyük mindegyik egyenletnek és az előtte állónak a különbségét, végül az utolsó és az első összegét:

$$\begin{aligned} (c_2 - c_1)(y_1 - y_2 - y_3 - y_4) &= 0, \\ (c_3 - c_2)(y_1 + y_2 - y_3 - y_4) &= 0, \\ (c_4 - c_3)(y_1 + y_2 + y_3 - y_4) &= 0, \\ (c_4 - c_1)(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) &= 2, \end{aligned}$$

A c_i -k különbözők, ezért különbségükkel elosztható az egyenlet:

$$\begin{aligned} (5) \quad & y_1 - y_2 - y_3 - y_4 = 0, \\ (6) \quad & y_1 + y_2 - y_3 - y_4 = 0, \\ (7) \quad & y_1 + y_2 + y_3 - y_4 = 0, \\ (8) \quad & y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = \frac{2}{c_4 - c_1}. \end{aligned}$$

(6) és (5) valamint (7) és (6) különbségéből:

$$y_2 = y_3 = 0;$$

(8) és (7) különbségéből, majd (5) és (8) összegéből:

$$y_4 = y_1 = \frac{1}{c_4 - c_1}.$$

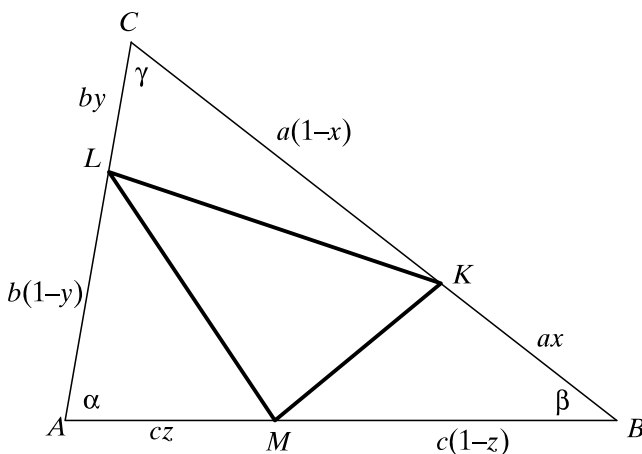
Ez azt jelenti, hogy ha az a_i -k nagyságrendi sorrendje $a_e < a_k < a_h < a_n$, akkor az egyenletrendszer megoldása:

$$x_k = x_h = 0, \quad x_e = x_n = \frac{1}{a_n - a_e}.$$

Helyettesítéssel könnyen meggyőződhetünk róla, hogy ezek kielégítik az adott egyenletrendszert.

1966/6. Az ABC háromszög AB , BC , CA oldalán vegyük fel rendre a tetszés szerinti, de a csúcsoktól különböző M , K , L pontokat. Bizonyítsuk be, hogy az MAL , KBM és LCK háromszögek közül legalább az egyiknek a területe nem nagyobb az ABC területének a negyedénél.

1. megoldás. Azt a gyakran használt jelölést fogjuk alkalmazni, hogy ha egy d hosszúságú szakaszt két részre osztunk, akkor az egyiket mindig lehet dx -szel, a másikat $d(1-x)$ -szel jelölni, ahol $0 < x < 1$.



66/6.1. ábra

Jelölje a háromszög oldalhosszait c , a , b , a rajtuk levő M , K , L belső pontok ezeket a szakaszokat rendre cz , $c(1-z)$; ax , $a(1-x)$; by , $b(1-y)$ hosszúságú részekre vágják szét, ahol x , y , z 1-nél kisebb pozitív számok (1966/6.1. ábra). Legyen az ABC területe t , az A csúcsnál lemetsett MAL háromszög területe

t_A , a másik kettőé t_B , ill. t_C . Azt kell bizonyítanunk, hogy a

$$\frac{t_A}{t}, \frac{t_B}{t}, \frac{t_C}{t}$$

hányadosok között van $\frac{1}{4}$ -nél nem nagyobb. Mivel

$$\frac{t_A}{t} = \frac{b(1-y)cz \cdot \sin \alpha}{bc \sin \alpha} = (1-y)z$$

és hasonlóan:

$$\frac{t_B}{t} = (1-z)x, \quad \frac{t_C}{t} = (1-x)y,$$

azt kell megmutatnunk, hogy az

$$(1) \quad (1-y)z, \quad (1-z)x, \quad (1-x)y$$

szorzatok között van $\frac{1}{4}$ -nél nem nagyobb.

Alkalmazzuk a szorzatokra a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenséget: mivel pl.

$$x(1-x) \leq \left(\frac{x+1-x}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}.$$

$$(1-y)z \cdot (1-z)x \cdot (1-x)y = x(1-x) \cdot y(1-y) \cdot z(1-z) \leq \left(\frac{1}{4} \right)^3,$$

ezért a vizsgált szorzatok mindegyike nem lehet nagyobb $\frac{1}{4}$ -nél, legalább egy közülük legfeljebb $\frac{1}{4}$ -del egyenlő. Ezzel állításunkat bizonyítottuk.

2. megoldás. Jelölje az AB , BC , CA oldalak felezőpontjait rendre C' , A' , B' . Az $A'B'C'$ háromszög oldalai ABC középvonalai, oldalai ABC -t négy háromszögre vágják szét, mindegyikük területe BAC területének a negyedével egyenlő.

Ha a K , L , M pontok közül kettő valamelyik lementszett háromszögben van, akkor a feladat állítása nyilvánvaló, feltehetjük ezért, hogy a háromszöget úgy betűztük meg, hogy a K , L , M pontok rendre a BA' , CB' , AC' szakaszokon helyezkednek el (1966/6.2. ábra). Megmutatjuk, hogy KLM területe legalább negyede ABC területének, azaz nem kisebb $A'B'C'$ területénél.

Ha a KLM háromszög K csúcsát A' -be toljuk, területe nem nagyobbodott, mert az LM oldalakhoz tartozó magasság nem nőtt, tehát

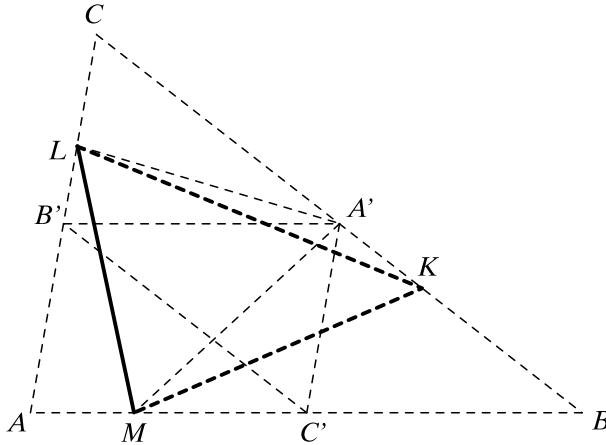
$$(2) \quad KLM \text{ területe} \geq A'LM \text{ területe.}$$

Az $A'LM$ területét nem növeljük, ha L -et B' -be toljuk, mert ezzel az MA' -höz tartozó magasság nem nőtt, tehát

$$(3) \quad A'LM \text{ területe} \geq A'B'M \text{ területe.}$$

Viszont $A'B'M$ területe $A'B'C'$ -vel, azaz ABC területének a negyedével egyenlő, (2)-ből és (3)-ból ezek szerint az következik, hogy

$$KLM \text{ területe} \geq \frac{1}{4} \cdot ABC \text{ területe.}$$



66/6.2. ábra

Ez viszont azt jelenti, hogy a KLM által ABC -ből lemetezett három háromszög területe legfeljebb $\frac{3}{4}$ -e ABC területének, ezért legalább egyikük területe legfeljebb negyede ABC területének, ami bizonyítandó volt.

Megjegyzések. 1. Mivel az (1) alatti szorzathármas x, y, z ciklikus cseréjével (azaz x, y, z helyett rendre y, z, x -et, ill. z, x, y -t írva) önmagába megy át, feltehetjük, hogy x, y, z között x -nél nincs nagyobb, s ezért $y \leq x$, ennél fogva

$$(1-x)y \leq (1-x)x \leq \frac{1}{4},$$

amivel állításunkat már bizonyítottuk.

2. Az ABC és KLM háromszögek közötti, illetve a felbontásban szereplő négy háromszög között számos érdekes kapcsolat van, megemlítünk közülük néhányat:

a) az MAL , KBM , LCK háromszögek közül legalább az egyiknek nem nagyobb a területe KLM területénél;

b) az MAL , KBM , LCK háromszögek közül legalább az egyiknek nem nagyobb a kerülete KLM kerületénél.

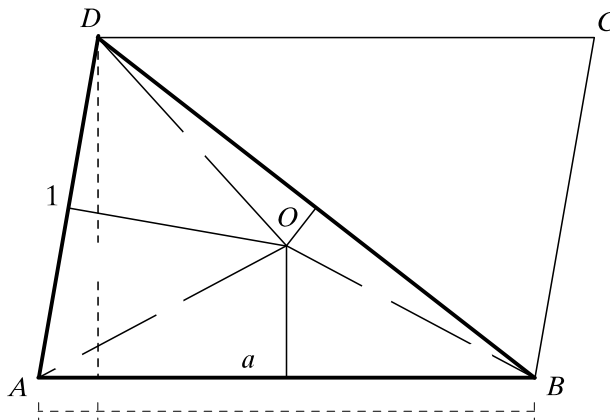
1967.

1967/1. Legyen az $ABCD$ paralelogramma AB oldalának hossza a , AD oldalé egységnyi, DAB szögének mérőszáma α , végül az ABD háromszög hegyesszögű. Bizonyítsuk be, hogy az egységnyi sugarú K_A , K_B , K_C és K_D körlemezek, amelyeknek középpontja rendre az A , B , C , D csúcs, akkor és csakis akkor fedik le együtt a paralelogrammát, ha

$$(1) \quad a \leq \cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha.$$

Megoldás. Legyen az ABD háromszög (és a vele egybevágó CDB háromszög) körülírt körének sugara R . Ha K_A , K_B , K_D lefedik ABD -t, akkor K_B , K_C , K_D lefedik CDB -t. Megmutatjuk, hogy ennek szükséges és elégséges feltétele $R \leq 1$ teljesülése.

ABD körülírt körének O középpontja a háromszög belsejében van, mivel ABD hegyesszögű. O lefedettségéhez $R \leq 1$ szükséges, mert $R > 1$ esetén a csúcsok körüli egységkörök nem fedhetnék le. $R \leq 1$ azonban elégséges feltétele is az ABD lefedettségének; válasszuk ki ui. az ABD háromszögtartomány egy tetszőleges P pontját (1967/1.1. ábra). P benne van annak a hat derékszö-



67/1.1. ábra

gű háromszögtartománynak egyikében, amelyekre a háromszöget az OA , OB , OC sugarak és O -ból az oldalakra emelt merőlegesek felbontják; ha pl. P egy olyan derékszögű háromszögtartományban van, amelynek egyik csúcsa D , akkor $DP \leq DO = R$, tehát K_D biztosan lefedi.

Most már csak azt kell megmutatnunk, hogy az $R \leq 1$ feltétel egyenértékű (1)-gyel.

Legyen az $ABD\angle = \beta$. Mivel $R = \frac{AD}{2 \sin \beta} = \frac{1}{2 \sin \beta}$, $R \leq 1$ egyenértékű a $\sin \beta \geq \frac{1}{2}$, $\beta \geq 30^\circ$ feltétellel. Jelölje D -ből az AB -re állított merőleges talppontját T , a DTB derékszögű háromszögben $DT = \sin \alpha$, $TB = a - \cos \alpha$ és ezért

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{a - \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

A $\beta \geq 30^\circ$ egyenértékű a szóbajövő szögtartományban a $\operatorname{ctg} \beta \leq \sqrt{3}$ feltétellel, tehát az

$$\frac{a - \cos \alpha}{\sin \alpha} \leq \sqrt{3},$$

azaz

$$a \leq \cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha$$

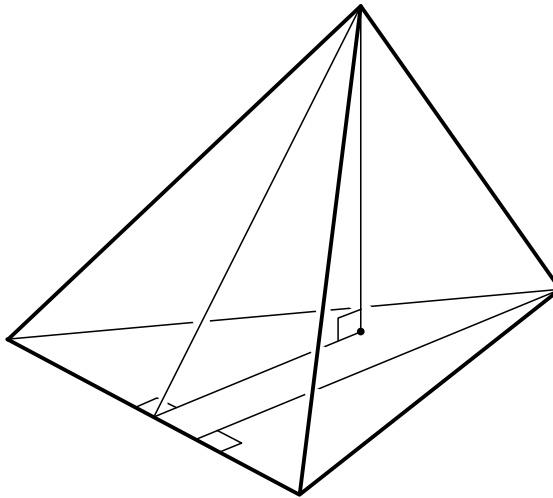
teljesüléssel; ezt kellett bizonyítanunk.

1967/2. Valamely tetraéderen csak az egyik él mérőszáma nagyobb 1-nél.

Bizonyítsuk be, hogy ekkor a tetraéder térfogatának a mérőszáma legfeljebb $\frac{1}{8}$.

Megoldás. Megoldásunk lényege a következő: Legyen az $ABCD$ tetraéder leghosszabb éle CD , az ezzel szemközti él hossza: $AB = x \leq 1$. x függvényében becslést adunk a tetraéder térfogatára.

Először az ABC háromszög C -hez tartozó CT magasságát becsljük meg. Legyen a T -hez közelebbi (nem távolabbi) csúcs AB -n az A , ekkor $BT \geq \frac{x}{2}$ és a BTC derékszögű háromszögből (1967/2.1. ábra):



67/2.1. ábra

$$(1) \quad CT = \sqrt{BC^2 - BT^2} \leq \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}.$$

Hasonlóan kapjuk az ABD háromszög AB -hez tartozó m_1 magasságára:

$$(2) \quad m_1 \leq \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}.$$

A tetraéder $CQ = m$ magassága nem lehet nagyobb a CT lapmagasságnál, ezért

$$(3) \quad m \leq \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}.$$

A tetraéder V térfogata: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} AB \cdot m_1 \cdot m$, (1), (2) és (3) miatt

$$(4) \quad V \leq \frac{x}{6} \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) = \frac{1}{24} x(4 - x^2).$$

Azt kell bizonyítanunk, hogy $V \leq \frac{1}{8}$, tehát (4) alapján, hogy $x(4 - x^2) \leq 3$. Ez valóban igaz, mert

$$3 - x(4 - x^2) = (1 - x)(3 - x - x^2) \geq 0$$

mivel a $[0, 1]$ intervallumban $1 - x \geq 0$, $3 - x - x^2 \geq 0$.

Megjegyzések. 1. Az $x(4 - x^2)$ függvény $[0, 1]$ -ben felveszi az $x = 1$ helyen a maximumát, és ennek a maximumnak eleget tevő tetraéderben az ABC és ABD lapok egységoldalú szabályos háromszögek, amelyeknek síkjai merőlegesek egymásra.

2. A (4) alatti függvény maximuma differenciálszámítással csak közvetve határozható meg, mert a derivált nullahelye a $[0, 1]$ intervallumon kívül van; a deriváltfüggvény: $\frac{1}{24}(4 - 3x^2)$ $[0, 1]$ -ben pozitív, tehát a függvény monoton nő és így maximuma az intervallum végpontjában, az $x = 1$ helyen van.

1967/3. Legyen k , m és n három pozitív egész szám, $m + k + 1$ az $(n + 1)$ -nél nagyobb prímszám, továbbá $c_s = s(s + 1)$, ahol $s = 1, 2, \dots$. Bizonyítsuk be, hogy a következő szorzat:

$$(1) \quad (c_{m+1} - c_k)(c_{m+2} - c_k) \cdot \dots \cdot (c_{m+n} - c_k)$$

osztható a

$$(2) \quad c_1 c_2 \dots c_n$$

szorzattal.

Megoldás. Vizsgálataink céljára részletesebben kifejtjük az itt szereplő egyes kifejezéseket. Jelölje az (1) alatti szorzatot P , a (2) alattit Q . P egy általános tényezője:

$$c_a - c_b = a(a+1) - b(b+1) = a^2 - b^2 + a - b = (a-b)(a+b+1).$$

Ebből:

$$\begin{aligned} P &= (m-k+1)(m+k+2)(m-k+2)(m+k+3) \dots (m-k+n)(m+k+n+1) = \\ &= ((m-k+1)(m-k+2) \dots (m-k+n))((m+k+2)(m+k+3) \dots (m+k+n+1)). \end{aligned}$$

Vezessük be itt is az n tényezős szorzatainkra a következő jelölést:

$$A = (m-k+1)(m-k+2) \dots (m-k+n),$$

$$B = (m+k+2)(m+k+3) \dots (m+k+n+1).$$

Ezzel $P = AB$. Alakítsuk most át Q -t:

$$Q = 1(1+1)2(2+1) \dots n(n+1) = (1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n)(2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n+1)) = n!(n+1)!$$

Azt kell tehát bizonyítanunk, hogy

$$\frac{AB}{n!(n+1)!} = \frac{A}{n!} \cdot \frac{B}{(n+1)!} \text{ egész,}$$

ehhez elegendő megmutatnunk, hogy $\frac{A}{n!}$ és $\frac{B}{(n+1)!}$ is egész.

$\frac{A}{n!}$ viszont egész, mert A n darab egymást követő egész szorzata és ez mindig osztható $n!$ -sal (ld. megjegyzésünket).

$\frac{B}{(n+1)!}$ egész voltának a kimutatásához vegyük észre, hogy ez akkor és csakis

akkor egész, ha $\frac{(m+k+1)B}{(n+1)!}$ is egész, mert a feladat szerint $m+k+1$ az $n+1$ -nél nagyobb prímszám és így a nevezőben nem fordulhat elő prímtényezőként. $(m+k+1)B$ viszont B definíciója szerint $n+1$ egymást követő egész szorzata, s így ez is osztható $(n+1)!$ -sal. Ezzel a feladat állítását bizonyítottuk.

Megjegyzés. Felhasználtuk, hogy n egymást követő egész mindig osztható $n!$ -sal. Ez azt jelenti, hogy ha az első szorzótényező $k+1$, akkor

$$E = \frac{(k+1)(k+2) \dots (k+n)}{n!}$$

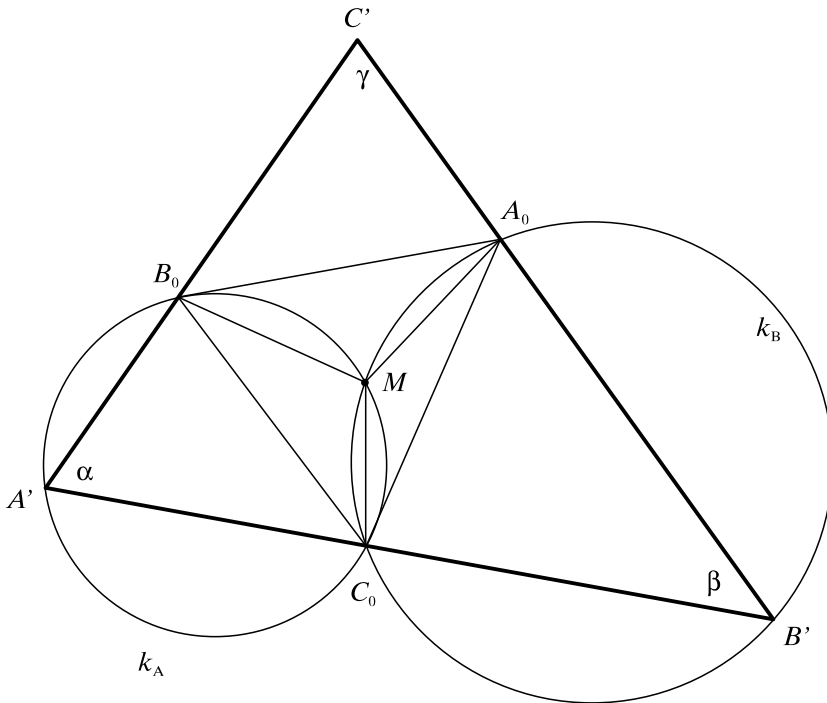
egész. Viszont

$$E = \frac{k!(k+1) \dots (k+n)}{k!n!} = \frac{(n+k)!}{k!n!} = \binom{n+k}{k},$$

ami a binomiális együtthatók tulajdonsága miatt egész.

1967/4. Adottak az $A_0B_0C_0$ és $A'B'C'$ hegyesszögű háromszögek. Szerkesszünk az $A_0B_0C_0$ háromszög köré olyan ABC háromszöget, amely hasonló az $A'B'C'$ háromszöghöz (az A, B, C pontok rendre az A', B', C' pontoknak felelnek meg), és C_0 az AB oldalnak, A_0 a BC oldalnak és végül B_0 a CA oldalnak belső pontja. Szerkesszük meg ezután az ilyen ABC háromszögek közül azt is, amelyiknek legnagyobb a területe.

Megoldás. Írjunk be először az $A'B'C'$ -be egy tetszőleges, az $A_0B_0C_0$ -hoz hasonló háromszöget, amelynek csúcsai rendre a $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ oldalakon vannak. Ez lehetséges, mert pl. tetszőlegesen felvesszünk egy a $B'C'$ -vel párhuzamos $\overline{C_0B_0}$ szakaszt, erre az $A_0B_0C_0$ -hoz hasonló háromszöget szerkesztünk az A' -vel ellentétes oldalára, majd A' -ből ezt annyira kicsinyítjük vagy nagyítjuk, hogy az A_0 -nak megfelelő csúcs $B'C'$ -re essék. Egyszerűség kedvéért a beírt háromszöget is $A_0B_0C_0$ -lal jelöljük (1967/4.1. ábra).



67/4.1. ábra

Az $A'B_0C_0$ háromszög köré írt k_A kör és a $B'A_0C_0$ köré írt k_B kör C_0 -tól különböző metszéspontja legyen M . Az $A'B'C'$ és az $A_0B_0C_0$ hegyesszögű voltából következik, hogy M az $A_0B_0C_0$ háromszögnek és így az $A'B'C'$ háromszögnek is belső pontja, és a k_A , k_B köröknek az A' , ill. B' pontokat nem

tartalmazó B_0C_0 , ill. A_0C_0 ívén helyezkedik el. Ezért, ha $A'B'C'$ szögei α, β, γ ,

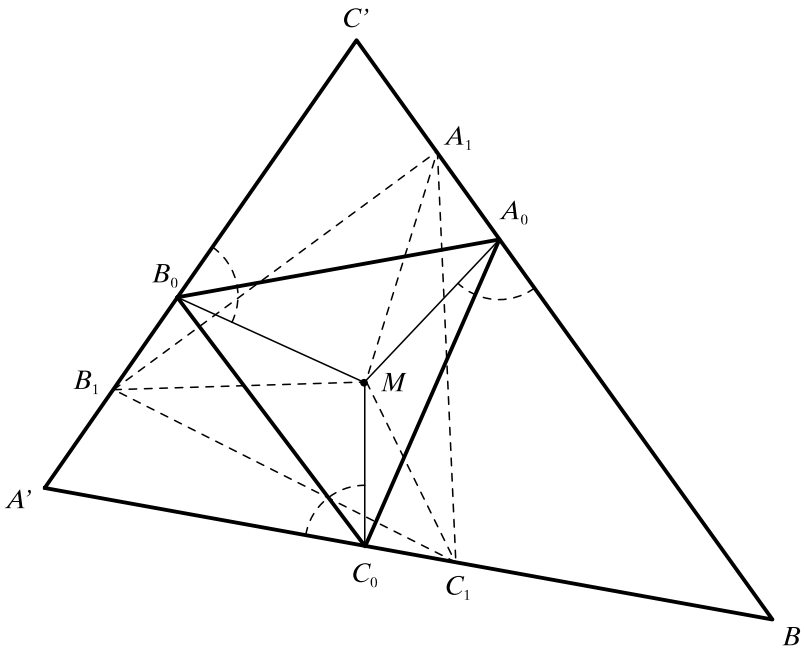
$$B_0MC_0 \sphericalangle = 180^\circ - \alpha, \quad A_0MC_0 \sphericalangle = 180^\circ - \beta$$

és ezért

$$A_0MB_0 \sphericalangle = 360^\circ - (180^\circ - \alpha) - (180^\circ - \beta) = \alpha + \beta = 180 - \gamma,$$

tehát M rajta van a $C'B_0A_0$ háromszög köré írt kör C' -t nem tartalmazó A_0B_0 ívén.

Mivel $MB_0A'C_0$, $MC_0B'A_0$, $MA_0C'B_0$ húrnégyszögek, $A'C_0M \sphericalangle = B'A_0M \sphericalangle = C'B_0M \sphericalangle$ (1967/4.2. ábra). Legyen most φ_1 , ill. φ_2 olyan M kö-



67/4.2. ábra

zéppontú pozitív irányú forgatva nyújtás, amely az $A'B'$ egyenest a $B'C'$ egyenesbe, ill. $B'C'$ -t a $C'A'$ egyenesbe vitték át. A szögviszonyokból következik, hogy $\varphi_1(C_0) = A_0$ és $\varphi_2(A_0) = B_0$. Ha C_1 az $A'B'$ tetszőleges pontja és $\varphi_1(C_1) = A_1$, $\varphi_2(A_1) = B_1$, akkor az $A_0B_0C_0$ és $A_1B_1C_1$ hasonló háromszögek, mert a forgatványújtás miatt a $C_0MA_0 \sim C_1MA_1$, $A_0MB_0 \sim A_1MB_1$ hasonló háromszögekből tevődnek össze és így módon az $A'B'$ egyenes tetszőleges C_1 pontjából kiindulva végtelen sok, az $A'B'C'$ -be írt, $A_0B_0C_0$ -hoz hasonló háromszöget állíthatunk elő.

Felvetődik a kérdés: az adott $A'B'C'$ háromszöghöz és az $A_0B_0C_0$ háromszögalakhoz tartozik-e más M pont (e beírás sorrendjét megtartva). Megmutatjuk, hogy M egyértelmű. Ha ui. léteznék még egy ilyen tulajdonságú M^* ,

amelynek segítségével $A'B'C'$ -be az $A_0B_0C_0$ -hoz hasonló $\overline{A_0}\overline{B_0}\overline{C_0}$ lenne beírható, akkor elérhető lenne, hogy $\overline{A_0}\overline{B_0}\overline{C_0}$ oldalai $A_0B_0C_0$ megfelelő oldalaival legyenek párhuzamosak, s így $A'B'C'$ -be két különböző, hasonló helyzetű hasonló háromszög lenne beírható, ami nyilván lehetetlen.

Az M pont segítségével tehát elő tudjuk állítani az $A'B'C'$ -be az előírt módon beírt összes, $A_0B_0C_0$ -hoz hasonló háromszöget. Ezek közül nyilván az lesz a legkisebb területű, amelynek csúcsai a M -ből az $A'B'C'$ oldalaira állított merőlegesek talppontjai; ezek a talppontok az oldalak belső pontjai, mert $A'B'C'$ hegyesszögű és M a belsejében van.

A szerkesztést azzal fejezzük be, hogy a szerkesztéssel nyert alakzatot felnagyítjuk (vagy kicsinyítjük) annyira, hogy a szerkesztett $A_0B_0C_0$ az adott $A_0B_0C_0$ -lal legyen egybevágó. Ha $A_0B_0C_0$ a beírt legkisebb háromszög volt, akkor körülírt háromszöge az $A'B'C'$ -hez hasonló legnagyobb háromszög lesz.

Megjegyzés. A feladat természetesen nagyon sokféle módon megoldható. Minden megoldás értékelésénél az ilyen jellegű feladatoknál az a legnagyobb nehézség, hogy meg kell találni a szabatoságnak azt a határát, amelyen belül a szemléletből nyert tények külön indoklás nélkül elfogadhatók; mi ebben a megoldásban olyan szabatosági fokot alkalmaztunk, ami a versenyeken általában elfogadott. Pl. az a tény, hogy M az $A_0B_0C_0$ háromszög belsejében van, igen szemléletes, de szabatos, igényes bizonyítása meglehetősen hosszadalmas lenne.

1967/5. Tekintsük a következő $\{c_n\}$ sorozatot:

$$\begin{aligned}c_1 &= a_1 + a_2 + \dots + a_8 \\c_2 &= a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_8^2 \\&\vdots \\c_n &= a_1^n + a_2^n + \dots + a_8^n, \\&\vdots\end{aligned}$$

ahol a_1, a_2, \dots, a_8 olyan valós számokat jelentenek, amelyek nem mind egyenlők nullával.

Tudjuk, hogy a $\{c_n\}$ sorozat végtelen sok tagja nullával egyenlő. Állapítsuk meg az összes olyan n számot, melyre $c_n = 0$.

Megoldás. Ha n páros, a c_n -et előállító összeadandók nem negatívak és a feltevés szerint van közöttük nullától különböző, tehát pozitív, ezért $c_n \neq 0$.

Legyen most n páratlan. Az a_i -k között kell lennie pozitívnak és negatívnak is, különben hatványösszegük nem lehetne nulla. Legyen a legnagyobb abszolút értékű (vagy azok egyike) a_1 , az a_1 -gyel ellentett előjelűek között a legnagyobb

abszolút értékű a_2 ; a_1 és a_2 ezek szerint nem nulla. Írjuk fel c_n -et a következő alakban:

$$(1) \quad c_n = a_1^n \left(1 + \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^n + \left(\frac{a_3}{a_1} \right)^n + \dots + \left(\frac{a_8}{a_1} \right)^n \right) = a_1^n S.$$

Itt $\frac{a_2}{a_1}$ negatív és nem nagyobb egyetlen $\frac{a_i}{a_1}$ -nél sem, ugyanez áll a páratlan n -edik hatványukra is, tehát

$$(2) \quad S \geq 1 + 7 \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^n.$$

(1) miatt c_n csak akkor lehet nulla, ha S nulla, mert $a_1 \neq 0$. Ha $|a_1| \neq |a_2|$, azaz $|a_2| < |a_1|$, az $\left(\frac{a_2}{a_1} \right)^n$ szorzat nullához tart, ezért egy bizonyos n_0 érték után $\left| \frac{a_2}{a_1} \right|^n$ kisebb lesz $\frac{1}{7}$ -nél; ekkor azonban (2) jobb oldala már pozitív marad és ugyanez igaz S -re és c_n -re, c_n tehát legfeljebb véges sok esetben lenne 0. Ezért $|a_1| \neq |a_2|$ lehetetlen, következésképpen $a_2 = -a_1$, $a_1 + a_2 = 0$. Ez azt jelenti, hogy $a_1^n + a_2^n = 0$ minden páratlan n -re teljesül.

Ha a_3, a_4, \dots, a_8 mindegyike nulla, vizsgálatunkat befejeztük, ha nem, az előző módszerrel tovább folytatva kapjuk, hogy szükségképpen a maradék hat tag olyan párokba állítható, amelyek összege 0.

Eredményünk azt jelenti, hogy $c_n = 0$ minden páratlan n -re, és csakis ezekre teljesül.

1967/6. Egy n napig ($n > 1$) tartó sportversenyen összesen m darab érmet osztottak ki. Az első napon 1 érmet és a megmaradó érmek $\frac{1}{7}$ része került kiosztásra, a másodikon 2 érmet és a még fennmaradók $\frac{1}{7}$ része és így tovább. Végül az n -edik, azaz utolsó napon kiosztották a még visszamaradt, pontosan n érmet. Hány napig tartott a verseny és hány érmet osztottak ki összesen?

1. megoldás. Jelölje a k -adik napon kiadott érmek számát e_k , a nap kezdetekor még ki nem adott érmek számát pedig m_k . A feladat szerint

$$(1) \quad e_k = k + \frac{m_k - k}{7} = \frac{m_k}{7} + \frac{6k}{7}.$$

Keressünk kapcsolatot e_k és e_{k-1} között, figyelembe véve, hogy $m_{k-1} - m_k = e_{k-1}$:

$$(2) \quad \begin{aligned} e_{k-1} - e_k &= \frac{m_{k-1} - m_k}{7} - \frac{6}{7} = \frac{e_{k-1}}{7} - \frac{6}{7}, \\ e_{k-1} &= \frac{7e_k}{6} - 1. \end{aligned}$$

A feladat szerint $e_n = n$, ezért $e_{n-1} = \frac{7n-6}{6}$, n tehát szükségképpen osztható 6-tal, és így $n \geq 6$. Vezessük be az $n-6=p$ jelölést ($p \geq 0$). Ezzel

$$e_{n-1} = \frac{7e_n}{6} - 1 = \frac{7n}{6} - 1 = \frac{7p}{6} + 6,$$

és (2)-ből:

$$e_{n-2} = \left(\frac{7}{6}\right)^2 p + 6, e_{n-3} = \left(\frac{7}{6}\right)^3 p + 6, \dots, e_1 = \left(\frac{7}{6}\right)^{n-1} p + 6.$$

e_1 csak úgy lehet egész, ha $p = n-6$ osztható 6^{n-1} -nel; ez azonban csak $n=6$ esetben lehetséges, mert $n-6 < 6^{n-1}$. Ebből a megoldás:

$$n=6, e_1=e_2=\dots=e_6=6 \text{ és } m=36.$$

2. megoldás. A maradék érmek összeszámlálásával is eredményre juthatunk: Mivel $m_k - m_{k+1} = e_k$, (1) felhasználásával:

$$m_{k+1} = m_k - e_k = m_k - k - \frac{m_k - k}{7} = \frac{6(m_k - k)}{7}.$$

Rövidség kedvéért legyen $\frac{7}{6} = q$; fejezzük ki előbbi összefüggésünkéből m_k -t:

$$m_k = k + qm_{k+1}.$$

Ezt ismételve kapjuk, hogy

$$m_n = n$$

$$m_{n-1} = (n-1) + qn,$$

$$m_{n-2} = (n-2) + q(n-1) + q^2n,$$

...

$$m = m_1 = 1 + 2q + 3q^2 + \dots + nq^{n-1}.$$

Felhasználjuk a jobb oldali összeg zárt alakban való kifejezését:

$$(3) \quad m = 1 + 2q + 3q^2 + \dots + nq^{n-1} = \frac{nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1}{(q-1)^2} = \frac{7^n(n-6)}{6^{n-1}} + 6^2.$$

m csak akkor lehet egész, ha $n-6$ osztható 6^{n-1} -gyel, s mivel $n-6 < 6^{n-1}$, ez csak úgy lehetséges, ha $n=6$ és így az egyes napokon kiadott érmekre $e_1=e_2=\dots=e_6=6$, $m=36$ adódik.

Megjegyzések. 1. A (3) alatti összefüggést így bizonyíthatjuk: Legyen

$$S = 1 + 2q + 3q^2 + \dots + nq^{n-1}$$

$$Sq = q + 2q^2 + 3q^3 + (n-1)q^{n-1} + nq^n$$

$$Sq - S = S(q-1) = -(1+q+q^2+\dots+q^{n-1}) + nq^n =$$

$$= nq^n - \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1}{q - 1},$$

ebből

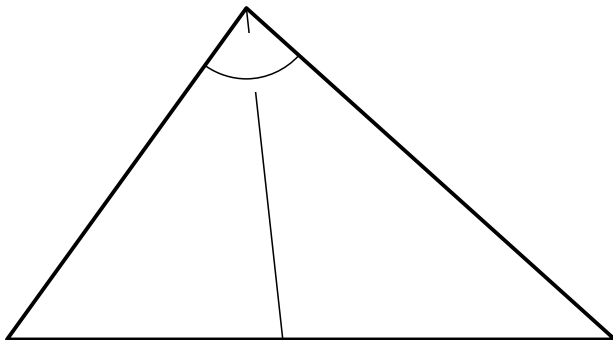
$$S = \frac{nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1}{(q-1)^2}.$$

2. Történeti kuriózum, hogy ez a feladat adott alkalmat a magyar sportsajtónak arra, hogy a diákolimpiával foglalkozzék. Az egyik sportlap megróttá a verseny szervezőit, amiért ilyen „potya” feladat kitűzésével lejáratják az olimpiai eszmét. A magyar versenyzők meghívták szokásos évi beszámolójukra a sportlap szerkesztőségét, hogy mutassák be ennek a potya feladatnak a megoldását, hiszen tanulni sohasem szégyen. A válasz, illetve megoldás eddig még nem érkezett meg...

1968.

1968/1. Bizonyítsuk be, hogy pontosan egy olyan háromszög létezik, amelyben az oldalhosszak egymást követő természetes számok, azonkívül az egyik szög kétszer akkora, mint ennek a háromszögnek egy másik szöge.

1. megoldás. A szokásos jelöléseket használva legyen $\beta = 2\alpha$. A B csúshoz tartozó szögfelező az AC oldalt B' -ben metszi (1968/1.1. ábra) és azt $CB' = \frac{ab}{a+c}$, $B'A = \frac{cb}{a+c}$ hosszúságú részekre osztja, mivel a szögfelező a szemközi



68/1.1. ábra

oldalt a szomszédos oldalak arányában vágja szét két részre. Az ABC és $BB'C$ háromszögek hasonlóak, mert szögeik rendre megegyeznek, ezért

$$(1) \quad \frac{BC}{AC} = \frac{CB'}{BC}, \quad \text{azaz} \quad BC^2 = AC \cdot CB',$$

$$(2) \quad a^2 = \frac{ab^2}{a+c}, \quad b^2 = a(a+c).$$

Szögfeltevésünk szerint $b > a$; ezt figyelembe véve $b = a + 1$ vagy $b = a + 2$.

Az első esetben

$$(a + 1)^2 = a(a + c), \quad c = 2 + \frac{1}{a}$$

következik, de minthogy c egész, ez csak $a = 1$ esetben teljesülhet, s így $b = 2$, $c = 3$; ilyen oldalakkal azonban nem létezik háromszög.

A második esetben $b = a + 2$, de mivel a, b, c valamilyen sorrendben egymást követő egészek, c -nek a és b közé kell esnie: $c = a + 1$ és így (2)-ből

$$(a + 2)^2 = a(2a + 1), \quad a^2 - 3a - 4 = 0,$$

$$(a + 1)(a - 4) = 0,$$

ezt egyetlen pozitív érték, az $a = 4$ elégíti ki és ebből $b = 6$, $c = 5$ következik, tehát valóban egyetlen, a feladat feltételeit kielégítő háromszög létezik. S hogy a 4, 5, 6 oldalhosszakkal rendelkező háromszögben a 6-os oldallal szemközi szög valóban kétszerese a 4-es oldallal szemközi szögnek, legyen $AB = 5$, $BC = 4$, $CA = 6$. A B -hez tartozó szögfelező B' -ben metszi AC -t és ezért $CB' = \frac{24}{9}$. Viszont az ABC és $BB'C$ háromszögek hasonlóak, mert megegyeznek C -nél levő szögükben s a szöget közrefogó oldalak arányában. A hasonlóságból következik, hogy $CBB' \angle = CAB \angle = \alpha$, és így a B -nél levő szög valóban 2α .

2. megoldás. Az előző megoldás kulcsát szolgáltató (2) formulához trigonometria alkalmazásával is gyorsan eljuthatunk. A $\beta = 2\alpha$ feltevésből kiindulva a szinusztételt, majd a koszinusztételt alkalmazzuk:

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = 2 \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc},$$

$$b^2 c = a b^2 + a c^2 - a^3, \quad b^2(c - a) = a(a + c)(c - a),$$

s mivel $c \neq a$,

$$b^2 = a(a + c),$$

innen megoldásunk az 1. megoldás szerint fejezhetjük be.

1968/2. Határozzuk meg az összes olyan x természetes számot, amelyre

$$(1) \quad p(x) = x^2 - 10x - 22,$$

ahol $p(x)$ a tízes számrendszerben felírt x szám számjegyeinek a szorzatát jelenti.

1. megoldás. Néhány konkrét x érték megvizsgálása után rájöhethetünk, hogy x nem lehet kettőnél többjegyű; ha ui. x n számjegyű ($n > 2$), akkor — mivel a jegyek szorzata legfeljebb 9^n :

$$\begin{aligned} 9^n &\geq p(x) = x(x - 10) - 22 \geq 10^{n-1}(10^{n-1} - 10) - 22 = \\ &= 10^n(10^{n-2} - 1) - 22 > 10^n, \end{aligned}$$

ami ellentmondás, ezért x csak egy- vagy kétjegyű lehet. Egyjegyű azonban nem lehet, mert a $p(x) = x^2 - 10x - 22 = x$ egyenletnek nincs egész megoldása, tehát

csak

$$x = 10a + b$$

lehetséges, ahol $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$. A jegyek szorzata:

$$(10a + b)^2 - 10(10a + b) - 22 = ab,$$

ebből

$$(2) \quad 100a(a - 1) + (19a - 10)b + (b^2 - 22) = 0.$$

Ha $a \geq 2$, a bal oldal értéke nagyobb vagy egyenlő, mint

$$200 + 28b + b^2 - 22 = b^2 + 28b + 178,$$

tehát határozottan pozitív, a értéke ezért csak 1 lehet; de ekkor (2)-ből

$$b^2 + 9b - 22 = 0,$$

ennek pozitív gyöke 2; a keresett szám tehát 12 és ez valóban kielégíti a feladat feltételét.

2. megoldás. A $p(x) = 0$ egyenletnek nincs egész megoldása, ezért $p(x)$ -nek pozitívnak kell lennie, tehát

$$x^2 - 10x - 22 > 0, \quad (x > 0)$$

ebből

$$(3) \quad x > 11,86.$$

Ha viszont x n jegyű és első jegye A , akkor $x = 10^{n-1}A + B$ alakban írható, ahol B $n - 1$ jegyű szám. Ebből x jegyeinek szorzata maximálisan $A \cdot 9^{n-1}$ lehet, tehát

$$p(x) \leq A \cdot 9^{n-1} < 10^{n-1}A \leq 10^{n-1}A + B = x$$

azaz

$$x^2 - 11x - 22 < 0,$$

ebből

$$(4) \quad x < 12,73.$$

(3) és (4) alapján tehát $11,86 < x < 12,73$, s mivel x egész, egyetlen lehetséges értéke $x = 12$, ami kielégíti a feladat feltételét.

1968/3. Bizonyítsuk be, hogy az

$$ax_1^2 + bx_1 + c = x_2,$$

$$(1) \quad ax_2^2 + bx_2 + c = x_3,$$

.....

$$ax_n^2 + bx_n + c = x_1$$

egyenletrendszernek, ahol a , b , c adott valós számok és $a \neq 0$,

I. $(b - 1)^2 - 4ac < 0$ esetén nincs valós megoldása;

II. $(b - 1)^2 - 4ac = 0$ esetén egyetlen valós megoldása van;

III. $(b-1)^2 - 4ac > 0$ esetén egynél több valós megoldása van.

Megoldás. Abból az észrevételből indulunk ki, hogy $(b-1)^2 - 4ac$ éppen az

$$(2) \quad f(x) = ax^2 + (b-1)x + c = 0$$

másodfokú egyenlet diszkriminánsa. (1)-nek az i -edik egyenlete ezzel

$$ax_i^2 + bx_i + c = x_{i+1} \quad (n+1 := 1)$$

$$(3) \quad f(x_i) = ax_i^2 + bx_i - x_i + c = x_{i+1} - x_i$$

alakba írható át. Adjuk össze a (3) típusú egyenletek megfelelő oldalait $i = 1, 2, \dots, n$ esetekben:

$$(4) \quad f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) = 0.$$

Ha tehát (1)-nek létezik valamilyen x_1, x_2, \dots, x_n megoldása, akkor (4) is teljesül.

I. Ha $(b-1)^2 - 4ac < 0$, az $f(x)$ polinomnak nincs gyöke, tehát vagy minden x -re pozitív, vagy pedig minden x -re negatív, azaz (4) bal oldalán nem állhat 0, (1)-nek tehát nem létezhet megoldása.

II. Ha $(b-1)^2 - 4ac = 0$, $f(x)$ vagy minden x -re nemnegatív, vagy minden x -re nempozitív, ezért (4) csak akkor teljesülhet, ha

$$f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_n) = 0.$$

Az $f(x) = 0$ egyenletnek egyetlen megoldása $x = \frac{1-b}{2a}$, ezért az (1) egyenletrendszernek egyetlen megoldása létezik:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1-b}{2a}.$$

III. Ha $(b-1)^2 - 4ac > 0$, az $f(x)$ -nek két különböző valós gyöke van: y_1 és y_2 , az

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = y_1, \quad \text{és} \quad x_1 = x_2 = \dots = x_n = y_2$$

kielégíti az (1) egyenletrendszert, tehát (1)-nek van legalább két különböző megoldása.

Megjegyzés. Meggondolásunkból a III. esetben nem következik, hogy az (1) egyenletrendszernek *csak* két megoldása van, hanem csupán az, hogy *van* két megoldása. Valójában ebben az esetben több megoldás is lehet; pl. az

$$x_1^2 - 4,5x_1 + 6 = x_2$$

$$x_2^2 - 4,5x_2 + 6 = x_1$$

egyenletrendszernek megoldása a következő négy $(x_1; x_2)$ számpár:

$$(1,5; 1,5) \quad (4; 4), \quad (1; 2,5) \quad (2,5; 1)$$

1968/4. Bizonyítsuk be, hogy minden tetraédernek van olyan csúcspontja, amelybe futó éllel mint oldalakkal háromszöget lehet szerkeszteni.

Megoldás. Az a , b , c szakaszokból akkor és csak akkor lehet háromszöget szerkeszteni, ha a következő egyenlőtlenségek (az ún. háromszög-egyenlőtlenségek) teljesülnek:

$$\begin{aligned} a < b + c, \text{ azaz } -a + b + c > 0, \\ b < c + a, \text{ azaz } a - b + c > 0, \\ c < a + b, \text{ azaz } a + b - c > 0. \end{aligned}$$

Ha a három szakasz közül a a legnagyobb (vagy az egyik legnagyobb), elegendő az első egyenlőtlenség teljesülését biztosítani, mivel a másik kettő ebben az esetben eleve teljesül.

A tetraéder csúcsait betűzhetjük úgy, hogy a leghosszabb éle (vagy a leghosszabbak egyike) AB legyen. Alkalmazzuk az ABC és az ABD háromszögekre a háromszög-egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned} -AB + BC + AC &> 0, \\ -AB + BD + AD &> 0. \end{aligned}$$

E két egyenlőtlenség összeadásából átrendezés után kapjuk, hogy

$$(-AB + AC + AD) + (-AB + BC + BD) > 0.$$

Ez azonban csak úgy állhat fenn, ha a két zárójeles kifejezés közül legalább az egyik pozitív.

Ha $-AB + AC + AD > 0$, akkor bevezető megjegyzésünk szerint az AB , AC , AD szakaszokból szerkeszthető háromszög, hiszen közülük AB a legnagyobb;

ha $-AB + BC + BD > 0$, akkor az AB , BC , BD szakaszokból szerkeszthető háromszög; ez azt jelenti, hogy vagy az A vagy pedig a B csúcsból induló éllekből háromszög szerkeszthető.

Megjegyzés. Ha a tetraéderről kikötjük, hogy a két leghosszabb éle szemközt esél legyen, akkor van olyan csúcsa, amelyből induló éllekből hegyesszögű háromszög szerkeszthető.

1968/5. Jelentsen f olyan valós függvényt, amely minden valós x -re értelmezett, továbbá a következő tulajdonságú:

$$(1) \quad f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - (f(x))^2},$$

ahol a adott pozitív szám.

I. Bizonyítsuk be, hogy az f függvény periodikus, azaz létezik olyan pozitív b szám, amelyre x minden értéke esetén fennáll:

$$f(x+b) = f(x).$$

II. Adjunk konkrét példát (az azonosan állandótól különböző) ilyen f függvényre, ahol $a = 1$.

Előre bocsájtjuk, hogy (1)-ből következik, hogy

$$(2) \quad \frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1 \text{-nek}$$

minden x -re teljesülnie kell, hiszen $f(x)$ $\frac{1}{2}$ -nek és egy nemnegatív számnak az összege, a négyzetgyökkel alatt pedig csakis akkor állhat nemnegatív szám, ha

$$f(x)(1 - f(x)) \geq 0,$$

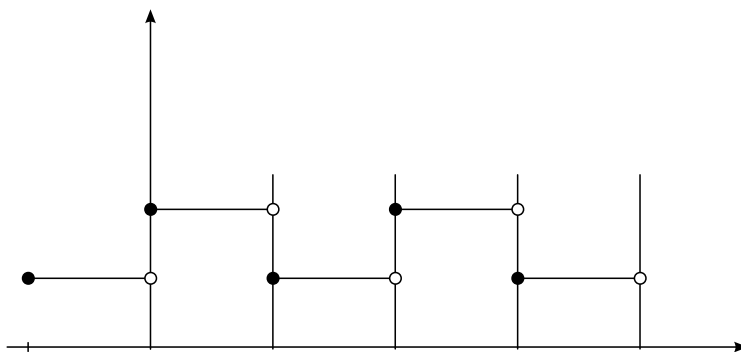
azaz $(f(x) \geq \frac{1}{2})$ miatt $f(x) \leq 1$.

1. megoldás. I. Mivel (1) $f(x+a)$ és $f(x)$ között létesít összefüggést, kézenfekvő, ha (1)-et $x \rightarrow x+a$ helyettesítésével vizsgáljuk:

$$\begin{aligned} f(x+2a) &= \frac{1}{2} + \sqrt{f(x+a) - (f(x+a))^2} = \\ &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - (f(x))^2} - \left(\frac{1}{2} - \sqrt{f(x) - (f(x))^2}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - (f(x))^2} - \frac{1}{4} - f(x) + (f(x))^2 - \sqrt{f(x) - (f(x))^2}} = \\ &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - f(x) + (f(x))^2} = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(f(x) - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} + f(x) - \frac{1}{2} = f(x), \end{aligned}$$

ami éppen azt jelenti, hogy $b=2a$ az f függvénynek periódusa.

II. A feladat feltételeit kielégítő függvényre nagyon egyszerű példa a következő (1968/5.1. ábra):



68/5.1. ábra

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{ha } 2n \leq x < 2n+1, \\ 1, & \text{ha } 2n+1 \leq x < 2n+2, \end{cases} \quad n \text{ tetsz. egész.}$$

s ez nyilván (1)-et is kielégíti.

2. megoldás. (1)-et tekinthetjük olyan másodfokú egyenletnek, amelyben $f(x)$ az ismeretlen. Rendezzük át, majd emeljük mindkét oldalát négyzetre:

$$f(x+a) - \frac{1}{2} = \sqrt{f(x) - (f(x))^2}$$

$$f(x)^2 - f(x) + (f(x+a) - \frac{1}{2})^2 = 0$$

A másodfokú egyenlet megoldás-képletével kapjuk ennek a gyökeit:

$$\frac{1}{2} + \sqrt{f(x+a) - (f(x+a))^2}, \quad \frac{1}{2} - \sqrt{f(x+a) - (f(x+a))^2}.$$

A második gyök azonban kisebb $\frac{1}{2}$ -nél, ezért egyetlen megoldás:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x+a) - (f(x+a))^2}.$$

Végezzük el ebben az $x \rightarrow x - a$ helyettesítést:

$$f(x-a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - (f(x))^2}.$$

Ez azonban (1) alapján azt jelenti, hogy

$$f(x-a) = f(x+a),$$

és ebből $x \rightarrow x + a$ helyettesítéssel következik, hogy

$$f(x) = f(x+2a),$$

tehát $b=2a$ periódusa f -nek.

Megjegyzés. A feladatban megkívánt példa természetesen nagyon sokféle módon megoldható. Egy folytonos, 2 periódusú függvény ($a=1$):

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \left| \sin \frac{\pi x}{2} \right| \right).$$

1968/6. Jelentse $[x]$ azt a legnagyobb egész számot (x „egész részét”), amely legfeljebb akkora, mint az x valós szám. Számítsuk ki az

$$(1) \quad \left[\frac{n+1}{2} \right] + \left[\frac{n+2}{2^2} \right] + \dots + \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right] + \dots$$

összeg értékét minden pozitív egész n számra, és bizonyítsuk be a kapott eredményt.

1. megoldás. A (1) összeg csak látszólag végtelen, mert ha $2^k > n$, $n < 2^k = 2^k(2-1) = 2^{k+1} - 2^k$, és így

$$\frac{n+2^k}{2^{k+1}} < 1, \quad \text{ezért} \quad \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right] = 0.$$

Először egy segédtevélt bizonyítsunk be: ha x tetszőleges valós szám,

$$(2) \quad \left[x + \frac{1}{2} \right] = [2x] - [x].$$

x mindig előállítható $m + \alpha$ vagy $m + \frac{1}{2} + \alpha$ alakban, ahol m egész szám, $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$. Az első esetben

$$[x] = m, \quad \left[x + \frac{1}{2} \right] = m, \quad [2x] = [2m + 2\alpha] = 2m,$$

amiből (2) már következik. A második esetben

$$[x] = m, \quad \left[x + \frac{1}{2} \right] = m + 1, \quad [2x] = [2m + 1 + 2\alpha] = 2m + 1,$$

amiből szintén következik (2).

Bontsuk fel most (1)-et (2) felhasználásával (feltesszük, hogy $2^k > n$):

$$\begin{aligned} & \left[\frac{n+1}{2} \right] + \left[\frac{n+2}{2^2} \right] + \dots + \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right] + \dots = \\ &= \left[\frac{n}{2} + \frac{1}{2} \right] + \left[\frac{n}{2^2} + \frac{1}{2} \right] + \dots + \left[\frac{n}{2^{k+1}} + \frac{1}{2} \right] + \dots = \\ &= [n] - \left[\frac{n}{2} \right] + \left[\frac{n}{2} \right] - \left[\frac{n}{2^2} \right] + \dots + \left[\frac{n}{2^k} \right] - \left[\frac{n}{2^{k+1}} \right] = \\ &= [n] - \left[\frac{n}{2^{k+1}} \right] = [n] = n, \end{aligned}$$

mivel $\left[\frac{n}{2^{k+1}} \right] = 0$.

Az (1) összeg értéke tehát: n .

2. megoldás. A 2-hatványok szerepeltetése veti fel azt a gondolatot, hogy állítsuk elő n -et a 2-es számrendszerben:

$$n = a_s \cdot 2^s + a_{s-1} \cdot 2^{s-1} + \dots + a_k \cdot 2^k + \dots + a_1 \cdot 2 + a_0,$$

ahol az a_i -k kettes számrendszerbeli számjegyek, tehát $a_i = 0$ vagy 1 , $a_s = 1$. Ha $k > s$, akkor $k \geq s+1$, $2^k \geq 2^{s+1} > n$, és így

$$\frac{n+2^k}{2^{k+1}} < \frac{2^k+2^k}{2^{k+1}} = 1, \quad \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right] = 0.$$

Feltehetjük ezért, hogy $k \leq s$, ennél fogva

$$\begin{aligned} n + 2^k &= a_s \cdot 2^s + a_{s-1} \cdot 2^{s-1} + \dots + (a_k + 1)2^k + \dots + a_1 \cdot 2 + a_0, \\ (3) \quad \frac{n+2^k}{2^{k+1}} &= (a_s \cdot 2^{s-k-1} + a_{s-1} \cdot 2^{s-k-2} + \dots + a_{k+1}) + ((a_k + 1)2^{-1}) + \\ &+ (a_{k-1} \cdot 2^{-2} + \dots + a_1 \cdot 2^{-k} + a_0 \cdot 2^{-k-1}). \end{aligned}$$

(3)-ban az első zárójelben levő kifejezés értéke egész; a második értéke 1, ha $a_k = 1$ és $\frac{1}{2}$, ha $a_k = 0$. A harmadik zárójelben lévő kifejezés:

$$a_{k-1}2^{-2} + a_{k-2}2^{-3} + \dots + a_1 \cdot 2^{-k} + a_0 \cdot 2^{-k-1} \leq 2^{-2} + 2^{-3} + \dots + 2^{-k-1} < \\ < 2^{-2} + 2^{-3} + \dots < \frac{2^{-2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Ezért

$$\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right] = a_s \cdot 2^{s-k-1} + a_{s-1} \cdot 2^{s-k-2} + a_{k+1} + a_k.$$

Írjuk most fel ezt a kifejezést rendre $k=0$ -tól $k=s$ -ig:

$$\left[\frac{n+1}{2} \right] = a_s \cdot 2^{s-1} + a_{s-1} \cdot 2^{s-2} + \dots + a_2 \cdot 2 + a_1 + a_0$$

$$\left[\frac{n+2}{4} \right] = a_s \cdot 2^{s-2} + a_{s-1} \cdot 2^{s-3} + \dots + a_2 + a_1$$

$$\left[\frac{n+2^{s-1}}{2^s} \right] = a_s + a_{s-1}$$

$$\left[\frac{n+2^s}{2^{s+1}} \right] = a_s.$$

Összegezzük most ezeket az egyenlőségeket, kapjuk, hogy az (1) összeg:

$$a_s \cdot 2^s + a_{s-1}2^{s-1} + \dots + 2a_1 + a_0 = n.$$

3. megoldás. Az (1) alatti összeg tagjainak számelméleti jelentést tulajdoníthatunk:

A $H = \{1, 2, \dots, n\}$ halmazban azoknak a számoknak a száma, amelyek 2^k -val oszthatók, de 2^{k+1} -gyel már nem, éppen

$$(4) \quad \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right].$$

A szóban forgó számok ui. éppen azok, amelyek prímtényező felbontásában 2 a k -adik hatványon szerepel. Osszuk be a halmaz elemeit a H_0, H_1, \dots, H_k halmazba úgy, hogy H_i -be azok a számok kerüljenek, amelyek prímtényező felbontásában 2 kitevője éppen i , nyilvánvaló, hogy a H_i halmazoknak nincs közös eleme, és H minden eleme egyetlen H_i részhalmazban van benne.

A H halmaz 2^k -val osztható elemeinek a száma $\left[\frac{n}{2^k} \right]$, viszont a 2^{k+1} -gyel osztható elemek száma $\left[\frac{n}{2^{k+1}} \right]$. Ebből következik, hogy H olyan elemeinek a

száma, amelyek 2^k -val oszthatók, de 2^{k+1} -gyel nem:

$$\left[\frac{n}{2^k} \right] - \left[\frac{n}{2^{k+1}} \right].$$

Alkalmazzuk most a (2) alatti segédtevélt $x = \frac{n}{2^{k+1}}$ esetben:

$$\left[\frac{n}{2^k} \right] - \left[\frac{n}{2^{k+1}} \right] = \left[\frac{n}{2^{k+1}} + \frac{1}{2} \right] = \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right],$$

amivel állításunkat bizonyítottuk. Mivel a közös elemek nélküli H_i halmazok egyesítése éppen az n elemű H halmazzal egyenlő és H_i elemszáma $\left[\frac{n+2^i}{2^{i+1}} \right]$,

$$\left[\frac{n+1}{2} \right] + \left[\frac{n+2}{2^2} \right] + \dots + \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right] = n,$$

ezt kellett bizonyítanunk.

Megjegyzés. Az 1. megoldás arra az esetre is alkalmazható, ha n tetszőleges valós szám, az (1) összeg ebben az esetben $[n]$ -nel egyenlő.

1969.

1969/1. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan a természetes szám van, amely a következő tulajdonságú: bármilyen természetes számot jelöljön is n , a

$$z = n^4 + a$$

szám sohasem prímszám.

Megoldás. Legyen $a = 4b^4$, ahol b tetszőleges 1-nél nagyobb egész. A negyedfokú kéttagúak ismert szorzattábonási módszerét alkalmazva megmutatjuk, hogy z két, 1-nél nagyobb tényező szorzataira bontható:

$$\begin{aligned} z &= n^4 + 4b^4 + 4n^2b^2 - 4n^2b^2 = (n^2 + 2b^2)^2 - (2nb)^2 = \\ &= (n^2 + 2b^2 + 2nb)(n^2 + 2b^2 - 2nb) = \\ &= ((n+b)^2 + b^2)((n-b)^2 + b^2). \end{aligned}$$

Mivel $b > 1$ miatt mindkét tényező nagyobb 1-nél, a z szám összetett.

1969/2. a_1, a_2, \dots, a_n jelentsenek valós állandókat, továbbá x jelentsen valós változót, végül legyen

$$(1) \quad f(x) = \cos(a_1 + x) + \frac{\cos(a_2 + x)}{2} + \frac{\cos(a_3 + x)}{2^2} + \dots + \frac{\cos(a_n + x)}{2^{n-1}}.$$

Bizonyítsuk be, hogy ha $f(x_1) = f(x_2) = 0$, akkor $x_2 - x_1 = m\pi$, ahol m egész szám.

1. megoldás. $f(x)$ sokféle módon átalakítható olyan alakká, amelyből a feladatban jelölt tulajdonsága közvetlenül kiolvasható. Az összegezési tétel szerint:

$$\cos(a_i + x) = \cos a_i \cos x - \sin a_i \sin x,$$

ezt az (1) bal oldalán levő tagokra alkalmazva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\cos a_1 + \frac{\cos a_2}{2} + \dots + \frac{\cos a_n}{2^{n-1}} \right) \cos x - \\ &\quad - \left(\sin a_1 + \frac{\sin a_2}{2} + \dots + \frac{\sin a_n}{2^{n-1}} \right) \sin x = A \cos x - B \sin x. \end{aligned}$$

A és B nem lehet egyszerre 0, mert akkor $f(x) = 0$ lenne minden x -re, holott, mivel $\cos(a_i - a_1) \geq -1$,

$$\begin{aligned} (2) \quad f(-a_1) &= 1 + \frac{\cos(a_2 - a_1)}{2} + \dots + \frac{\cos(a_n - a_1)}{2^{n-1}} \geq \\ &\geq 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) = \frac{1}{2^{n-1}} > 0. \end{aligned}$$

Végezzük el (2)-re $f(x)$ szokásos átalakítását:

$$f(x) = A \cos x - B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos x - \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin x \right).$$

Legyen φ olyan valós szám, amelyre $\cos \varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ és így $\sin \varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, ezzel

$$f(x) = \sqrt{A^2 + B^2} (\cos x \cos \varphi - \sin x \sin \varphi) = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x + \varphi).$$

Mivel a koszinuszfüggvény két nullahelye közötti távolság $m\pi$ (m egész), ha

$$f(x_1) = f(x_2) = 0,$$

akkor

$$\cos(x_1 + \varphi) = \cos(x_2 + \varphi) = 0$$

és így

$$(x_2 + \varphi) - (x_1 + \varphi) = x_2 - x_1 = m\pi,$$

m egész, ami bizonyítandó volt.

2. megoldás. Legyen z_k az $\frac{1}{2^{k-1}}$ abszolút értékű és a_k argumentumú (irányszögű) komplex szám:

$$z_k = \frac{1}{2^{k-1}} (\cos a_k + i \sin a_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

és legyen

$$z = \cos x + i \sin x,$$

jelölje továbbá a c komplex szám valós részét $\Re c$.

Ezekkel a jelölésekkel $z_k z = \frac{1}{2^{k-1}} (\cos(a_k + x) + 2 \sin(a_k + x))$, és így

$$(3) \quad f(x) = \Re(z_1 z + z_2 z + \dots + z_n z) = \Re(z(z_1 + z_2 + \dots + z_n)).$$

$z_1 + z_2 + \dots + z_n \neq 0$, mert ellenkező esetben

$$z_1 = -(z_2 + z_3 + \dots + z_n)$$

$$|z_1| = |z_2 + z_3 + \dots + z_n| \leq |z_2| + |z_3| + \dots + |z_n|$$

teljesülne, azaz

$$1 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}},$$

ami lehetetlen, tehát $z_1 + z_2 + \dots + z_n = c \neq 0$. Legyen $c = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$; ezzel a jelöléssel (3)-ból

$$f(x) = \Re(cz) = r \cos(x + \varphi), \quad (r \neq 0),$$

ha tehát $f(x_1) = f(x_2) = 0$,

$$\cos(x_1 + \varphi) = \cos(x_2 + \varphi) = 0$$

amiből

$$x_2 + \varphi - (x_1 + \varphi) = x_2 - x_1 = m\pi \quad (m \text{ egész})$$

következik; ezt kellett bizonyítanunk.

1969/3. Jelentse k az 1, 2, 3, 4, 5 számok bármelyikét. Állapítsuk meg k minden egyes értékére külön-külön annak szükséges és elegendő feltételét, hogy létezzék olyan tetraéder, amelynek k számú éle egyenként a egységnyi, a többi $(6 - k)$ számú mindegyike pedig egységnyi hosszúságú, ahol $a > 0$.

Megoldás. Vegyük végig k lehetséges értékeit.

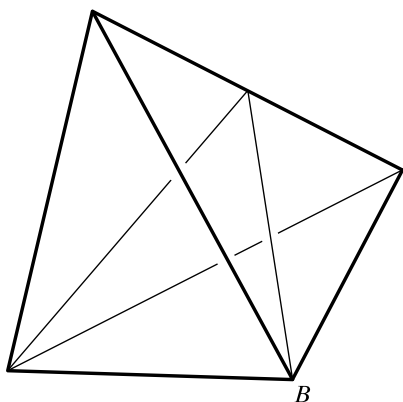
A) $k = 1$.

Válasszuk az $ABCD$ tetraéder jelöléseit úgy, hogy $AB = a$, a többi él pedig 1 hosszúságú legyen. Jelölje CD felezőpontját F (1969/3.1. ábra). A CDA és CDB szabályos háromszögekből $AF = BF = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ezért az ABF egyenlő szárú háromszög létezésének a feltétele:

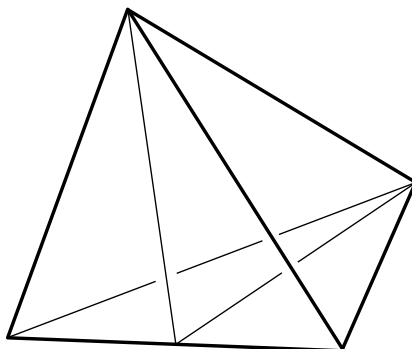
$$(1) \quad a < 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

(1) teljesülése elegendő is a kívánt tetraéder létezéséhez, mert $AF = BF = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $AB = a$ oldalakkal az ABF háromszög szerkeszthető; síkjára F -ben $DF = FC = \frac{1}{2}$ hosszúságú merőlegeseket állítva olyan tetraédert kapunk, amelynek élei az előírt hosszúságúak.

B) $k = 2$.



69/3.1. ábra



69/3.2. ábra

A két a hosszúságú él kétféle elhelyezkedési lehetőségét vizsgáljuk. Ha mindkettő egy háromszöglapon van, legyen $AC = BC = a$, a többi él hossza 1 (1969/3.2. ábra); AB felezőpontját jelölje P .

Az ABC háromszög létezéséhez szükséges, hogy $2a > 1$, $a > \frac{1}{2}$ teljesüljön.

Mivel $PD = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $PC = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}}$, figyelembe véve, hogy a PCD háromszögben $PC + PD > CD$,

$$(2) \quad \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}} + \frac{\sqrt{3}}{2} > 1$$

feltételnek teljesülnie kell. (2)-ből

$$a^2 - \frac{1}{4} > \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{7}{4} - \sqrt{3}$$

$$(3) \quad a^2 > 2 - \sqrt{3}, \quad a > \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

szükséges feltétel (ez összhangban van az $a > \frac{1}{2}$ feltétellel).

Ugyanígy a $PD + DC > PC$ feltételből

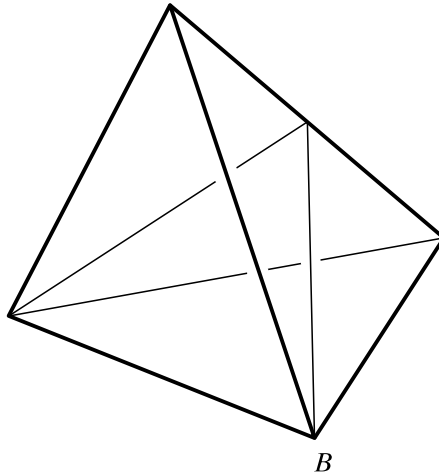
$$\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 > \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}},$$

$$(4) \quad a^2 < 2 + \sqrt{3}, \quad a < \sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

(3) és (4) egyesítése:

$$(5) \quad \sqrt{2 - \sqrt{3}} < a < \sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

Mivel $CD + PC > PD$ eleve teljesül, (4) fennállása esetén gondolatmenetünk megfordíthatóságából következik a PCD háromszög létezése, ennek síkjára P -ben $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ hosszúságú PA , ill. PB merőlegeseket állítva a kívánt tulajdonságú tetraédert kapjuk.



69/3.3. ábra

Ha a két a hosszúságú él kitérő, tehát pl. $AB = CD = a$ és a többi él egységnyi, CD felezőpontját Q -val jelölve az ABQ háromszögből $AQ + BQ > AB$, (1969/3.3. ábra), azaz

$$(6) \quad 2\sqrt{1 - \frac{a^2}{4}} > a, \quad \text{tehát} \quad a < \sqrt{2},$$

és ez az ABQ háromszög létezésének szükséges és elégséges feltétele; ABQ létezése esetén Q -ban a síkjára $DQ = QC = \frac{a}{2}$ hosszúságú merőlegeseket állítva a kívánt tetraédert kapjuk, tehát (6) ebben az esetben a tetraéder létezésének szükséges és elégséges feltétele.

E két eset összefoglalásaként kimondhatjuk, hogy két a hosszúságú és négy egységnyi hosszúságú éllel rendelkező tetraéder létezésének az a szükséges és elégséges feltétele, hogy (5) és (6) közül legalább az egyik teljesüljön, tehát

$$(7) \quad a < \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

fennálljon.

C) $k = 3$.

Megmutatjuk, hogy ilyen tetraéder minden $a > 0$ esetén létezik. Ha ti. az ABC oldalainak hossza a , és a másik három élé 1, az ABC középpontjának a

csúcsoktól mért távolsága $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ és ennek kisebbnek kell lennie az oldaléleknél, tehát

$$(8) \quad \frac{a\sqrt{3}}{3} < 1, \quad a < \sqrt{3}.$$

Ennek teljesülése esetén nyilván emelhető az a oldalú szabályos háromszög fölé olyan tetraéder, amelynek oldalélei egységnyiek.

Ha az alapélek hossza 1 és az oldaléleké a , az előzőek szerint a tetraéder létezésének szükséges és elégséges feltétele:

$$(9) \quad \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{3} < a, \quad a > \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

A (8) és (9) feltételek közül legalább az egyik mindig teljesül, tehát minden pozitív a -hoz létezik olyan tetraéder, amelynek 3 éle a , három éle pedig 1 hosszúságú.

D) $k=4$.

Ez az eset lényegében azonos a $k=2$ esettel, ha az a és 1 hosszúságú élek szerepet cserélnek (7) helyett az

$$1 < a\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

összefüggés érvényes, azaz (mindkét oldalt $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ -mal szorozva kapjuk):

$$a > \sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

E) $k=5$.

Ez lényegében a $k=1$ esettel azonos, ha az a és az 1 hosszúságú élek szerepet cserélnek, (1) helyett az

$$1 < a\sqrt{3}, \quad a > \frac{1}{\sqrt{3}}$$

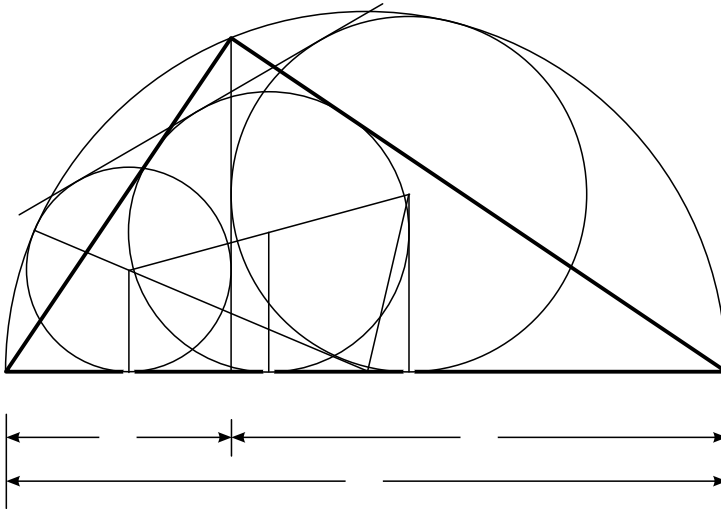
összefüggés érvényes.

Összefoglalva tehát megállapíthatjuk, hogy a szóban forgó tetraéder létezésének szükséges és elégséges feltétele a vizsgált esetekben a következő:

$$\begin{array}{ll} k=1: & 0 < a < \sqrt{3} \\ k=2: & 0 < a < \sqrt{2+\sqrt{3}} \\ k=3: & 0 < a \\ k=4: & \sqrt{2-\sqrt{3}} < a \\ k=5: & \frac{1}{\sqrt{3}} < a. \end{array}$$

1969/4. Az AB szakasz mint átmérő fölé rajzoltuk a k félkört. Legyen C a k -nak A -tól és B -től különböző, tetszőleges pontja; D pedig a C -ből AB -re bocsátott merőleges talppontja. Tekintsük a következő három kört (k_1 -et, k_2 -t és k_3 -at), amelyeknek AB közös érintője: k_1 az ABC háromszögbe írt kör, míg k_2 és k_3 mindegyike érinti a CD szakaszt és a k félkört is. Bizonyítsuk be, hogy k_1 -nek, k_2 -nek és k_3 -nak van még egy közös érintője.

1. megoldás. Jelölje a k_1, k_2, k_3 körök középpontjait rendre O_1, O_2, O_3 , sugarait r_1, r_2, r_3 , az AB -n levő érintési pontjaikat E_1, E_2, E_3 , ahol E_1 az E_2E_3 szakasz belső pontja (1969/4.1. ábra). Feladatunk állítása egyenértékű az-



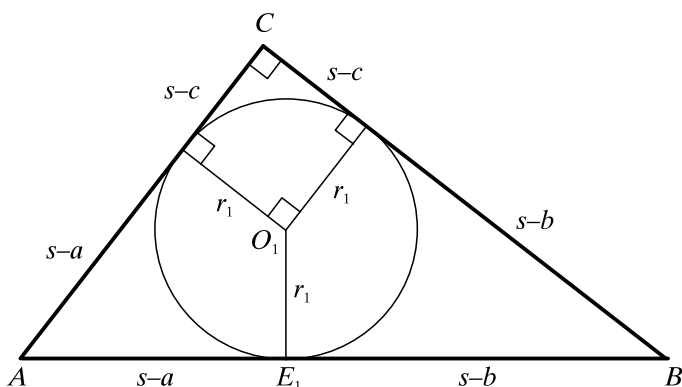
69/4.1. ábra

zal, hogy az O_1, O_2, O_3 egy egyenesen vannak, hiszen AB -nek erre a közös centrálisra vonatkozó tükörképe lenne a másik érintő.

Vezessük be az $AB = c, BC = a, CA = b, AD = p, BD = q, a + b + c = 2s$ jelölést. A k_1 beírt kör érintési pontjai az AB, BC, CA oldalakat – mint ismeretes – $s - a, s - b; s - b, s - c; s - c, s - a$ hosszúságú szakaszokra bontják (1969/4.2. ábra); s mivel ABC derékszögű, $s - c = r_1$. Legyen k középpontja O ; feltesszük, hogy a jelöléseket úgy választottuk, hogy $a \geq b$ teljesüljön. Az O_2E_2O derékszögű háromszögből

$$\left(\frac{c}{2} - r_2\right)^2 = r_2^2 + \left(r_2 + q - \frac{c}{2}\right)^2,$$

$$cq = (r_2 + q)^2.$$



69/4.2. ábra

A befogótételből $cq = a^2$, ezért $a = r_2 + q$,

$$(1) \quad r_2 = a - q.$$

Hasonlóan kapjuk az O_3E_3O háromszögből kiindulva, hogy

$$(2) \quad r_3 = b - p.$$

(1) és (2) felhasználásával nyerjük az

$$AE_2 = p - r_2 = p + q - a = c - a,$$

$$AE_3 = p + r_3 = b$$

összefüggéseket; továbbá:

$$E_2E_1 = AE_1 - AE_2 = (s - a) - (c - a) = s - c$$

$$E_1E_3 = AE_3 - AE_1 = b - (s - a) = a + b - s = 2s - c - s = s - c,$$

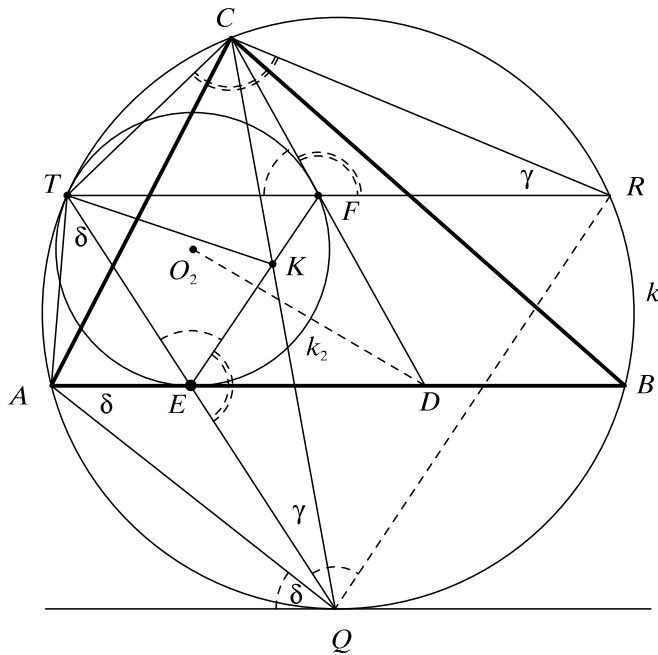
ez azt jelenti hogy E_1 az E_2E_3 szakasz felezőpontja. Hasonlóan (1)-ből és (2)-ből:

$$r_2 + r_3 = a + b - (p + q) = a + b - c = 2(s - c) = 2r_1,$$

tehát r_1 az r_2 és r_3 számtani közepe. E két utóbbi eredmény azt jelenti, hogy az $O_2E_2E_3O_3$ derékszögű trapéznek az E_1 -ből induló középvonala r_1 hosszúságú, tehát végpontja, O_1 , éppen az O_2O_3 szakasz felezőpontja. Ezzel állításunkat bizonyítottuk.

2. megoldás. Megmutatjuk, hogy a feladat állítása akkor is igaz, ha ABC tetszőleges háromszög és D az AB szakasz tetszőleges belső pontja, k az ABC körülírt köre.

Bizonyításunkban felhasználjuk az 1962/6. feladat 1. megoldásában igazolt észrevételt, mely szerint ha Q az ABC háromszög köré írt kör C -t nem tartalmazó AB ívének felezőpontja, akkor a beírt kör K középpontja a CQ szögfelezőnek az a pontja, amelyre $QA = QB = QK$. A ABC háromszög AB oldalának D tetszőleges pontja, a k_2 kör AB -t E -ben CD -t F -ben, a háromszög k körülírt körét pedig T -ben érinti (1969/4.3. ábra).



69/4.3. ábra

T hasonlósági pontja k_2 -nek és k -nak; a hasonlóságban E -nek Q felel meg, hiszen ezekben a pontokban k_2 , ill. k érintői párhuzamosak. Legyen F -nek a k -n levő megfelelője R , EF -nek a T -ből való felnagyítottja ezért QR és így EF párhuzamos QR -rel. Jelölje az EF és CQ egyenesek metszéspontját K . Megmutatjuk, hogy K az ABC -be írt kör középpontja, tehát $K = O_1$; bevezető megjegyzésünk szerint ehhez azt kell igazolnunk, hogy $QA = QK$.

A kerületi-, ill. egyállású szögek tételéből következik, hogy az ábránkban egy ívvel jelölt szögek egyenlők:

$$TFC \sphericalangle = TEF \sphericalangle = TQR \sphericalangle,$$

ezért egyenlők ezek kiegészítő szögei is, ezeket két ívvel jelöltük:

$$CFR \sphericalangle = FEQ \sphericalangle = TCR \sphericalangle,$$

(ez utóbbi a $CTQR$ húrnégyszögben $TQR \sphericalangle$ kiegészítő szöge).

Vegyük még figyelembe, hogy $TQK \sphericalangle = TRC \sphericalangle = \gamma$, mert azonos ívhez tartozó kerületi szögek, és a szögegyenlőségekből a

$$(3) \quad QEK \sim RFC \sim RCT$$

hasonlóságok következnek. A párhuzamos szelők tételéből $\frac{QT}{RT} = \frac{QE}{RF}$, a QEK

és RFC háromszögek hasonlóságából viszont $\frac{QE}{RF} = \frac{QK}{RC}$ adódik, e kettő összevetéséből pedig

$$(4) \quad \frac{QT}{RT} = \frac{QK}{RC}.$$

Ennek következménye az RCT és QKT háromszögek hasonlósága, mert meg-
egyeznek a γ szögben és (4) szerint a γ -t közrefogó oldalak arányában.

(3) miatt azonban $QEK \sim QKT$, innen

$$(5) \quad \frac{QE}{QK} = \frac{QK}{QT}, \quad \text{azaz} \quad QK^2 = QE \cdot QT.$$

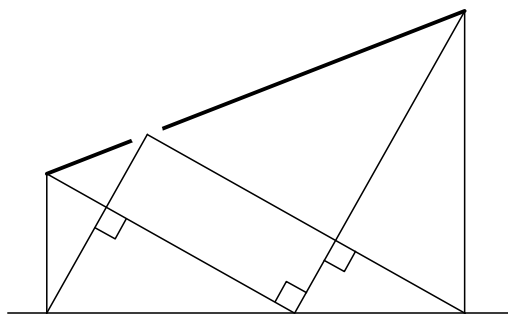
Hasonlók a QEA és QAT háromszögek is, mert $AQE \sphericalangle$ -ük közös és $QAE \sphericalangle =$
 $= ATQ \sphericalangle = \delta$, mivel egyenlők az AQ -nak a Q -beli érintővel bezárt szögével. A
hasonlóságból

$$\frac{QE}{QA} = \frac{QA}{QT}, \quad \text{azaz} \quad QA^2 = QE \cdot QT,$$

ezt (5)-tel összevetve kapjuk, hogy $QA = QK$, ami azt jelenti, hogy K az ABC -
be írt k_1 kör középpontja; K -t tehát az EF egyenes metszi ki CQ -ból.

Ha most gondolatmenetün-
ket a k_3 körre megismételjük,
azt kapjuk, hogy K -t CQ -ból az
 $E'F'$ egyenes metszi ki, ahol E' ,
ill. F' a k_3 érintési pontja AB -n,
ill. CD -n.

Figyeljük meg, ha k_2 közép-
pontja O_2 , k_3 -é O_3 , O_2D merő-
leges EF -re és O_3D merőleges
 $E'F'$ -re (1969/4.4. ábra), és fele-
zik az EDF , ill. $E'DF'$ szöget,
ezért O_2D is merőleges O_3D -
re. Az O_2ED és $DE'O_3$ három-
szögek hasonlók, ezért E -ből, ill.



69/4.4. ábra

E' -ből induló magasságuk is ugyanolyan arányban osztja az átfogót és az O_2O_3
szakaszt, viszont egy szakaszt csak egyetlen pont oszthat egy bizonyos arányban,
ezért kell, hogy $K = O_1$ rajta legyen az O_2O_3 szakaszon, amivel állításunkat bi-
zonyítottuk.

Megjegyzés. 1. Második megoldásunknak érdekessége, hogy nem használ
az arányosságon kívül más méretes összefüggést. Általánosságban már nem igaz,
hogy O_1 az O_2O_3 szakasz felezőpontja, mint azt az 1. megoldás derékszögű há-
romszögénél láttuk. A megoldás gondolatmenetét Bártfai Pál–Tusnádý Gábor:
Pályázat az inverziókról c. cikkéből vettük (Középiskolai Matematikai Lapok,
43. 193–201), ebben egyébként a feladatnak inverzióval való megoldását is meg-
találhatjuk.

2. Az általánosított feladat egy más irányú specializálásával találkozunk az
1978/4. feladatban.

1969/5. Adott a síkban n pont ($n > 4$), közülük semelyik három nem esik egy egyenesbe. Bizonyítsuk be, hogy legalább $\binom{n-3}{2}$ olyan konvex négyszög van, amelyeknek a csúcsai az adott pontok közül valók.

1. megoldás. Az n pont konvex burka [18] legalább hármat tartalmaz az adott pontok közül; legyen ilyen ponthármas A, B, C . Válasszuk hozzá ehhez a ponthármashoz a ponthalmaz további két pontját, X -et és Y -t. Az XY egyenes nem megy át az ABC háromszög egyik csúcsán sem és legfeljebb két oldalát metszheti.

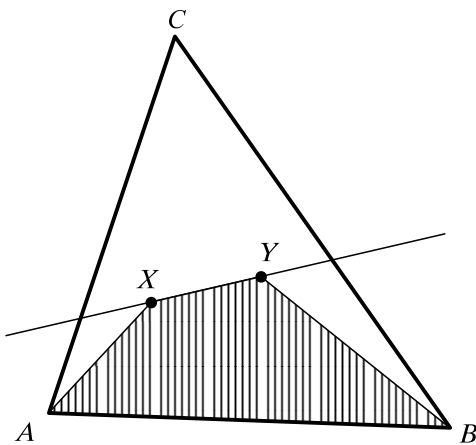
Tegyük fel, hogy nem metszi az AB oldalt, ebben az esetben az A, B, X, Y konvex négyszög csúcsa; ha ui. nem ez lenne a helyzet, akkor az A, B, X, Y pontnégyes konvex burka háromszög lenne, de ebben az esetben az XY egyenes szükségképpen metszené az AB szakaszt.

A ponthalmaz A, B, C -n kívüli pontjaiból kettőt kiválasztva tehát mindig hozzáválasztható az A, B, C pontokból kettő, hogy azokkal együtt konvex négyszöget alkossanak, és különböző XY pontpárhoz különböző négyszögek tartoznak, így biztosan létezik annyi kívánt tulajdonságú konvex négyszög, ahányféleképpen $n - 3$ pontból 2-t ki tudunk választani, tehát:

$$\binom{n-3}{2}.$$

2. megoldás. Kiindulásunk most ennek a tárgykörnek alapvető segédtetele: öt pontból (ha egyik három sincs egy egyenesen) mindig kiválasztható négy úgy, hogy azok egy konvex négyszög csúcsai legyenek. Ha ui. az 5 pont konvex burka

ötszög vagy négyszög, akkor ennek a négy csúcsa megfelel a feltételeknek; ha háromszög, mondjuk ABC , akkor a belsejében levő két pont: X és Y és az XY egyenes által nem metszett háromszögoldal – mondjuk AB – két végpontja konvex négyszöget alkot (1969/5.1. ábra).



69/5.1. ábra

Az n pontból $\binom{n}{5}$ féleképpen választhatunk ki pontötöst és segédteletünk szerint minden pontötösből legalább egy konvex négyszöget, így $\binom{n}{5}$ konvex négyszöget állíthatunk

elő. Egy-egy négyszöget azonban több ponttöbbsből is megkaphatunk, méghozzá $n - 4$ -szer, mert egy pontnégyeshez az ötödiket a többi $n - 4$ közül tetszőlegesen választhatjuk ki; a fenti módon előállított négyszögek között tehát legalább

$$\frac{1}{n-4} \binom{n}{5} = \frac{1}{5} \binom{n}{4}$$

különböző van. Ez az eredmény jobb, mint a feladatban előírt $\binom{n-3}{2}$, megmutatjuk ugyanis, hogy

$$\frac{1}{5} \binom{n}{4} \geq \binom{n-3}{2}.$$

Ez egyenértékű az $n(n-1)(n-2) \geq 60(n-4)$ egyenlőtlenséggel, ami az $n = 5, 6, 7, 8$ értékekre közvetlenül igazolható; ha viszont $n \geq 9$, $n(n-1) > 60$ és $n-2 > n-4$, amiből $n(n-1)(n-2) > 60(n-4)$ már következik.

Megjegyzés. Feladatunk a kombinatorikus geometria sokat vizsgált problémaköréhez tartozik. Segédteletünk egyik általánosítása így hangzik:

Adott k -ra létezik olyan $Z(k)$ szám, hogy ha $n \geq Z(k)$, akkor n számú általános helyzetű pont közül mindig kiválasztható k számú úgy, hogy azok egy konvex k -szög csúcsai legyenek.

$Z(k)$ pontos értékének a meghatározása azonban nagyon nehéz feladatnak bizonyult, csak becslések ismeretesek, pl.

$$Z(k) \leq \binom{2k-4}{k-2} + 1.$$

Erdős Pál és Szekeres György több mint fél évszázados sejtése, hogy $Z(k) = 2^{k-2} + 1$. Ez $k = 4$ esetben éppen segédteletünk eredményét mutatja ki és ismert, hogy $Z(5) = 9$, tehát $k = 5$ esetre is igaz a sejtés. (Bizonyítása megtalálható pl. KML. 42. kötet 1972, 72. old.).

A feladatkör egyébként több pontban kapcsolódik a Ramsey-féle problémához [13].

1969/6. Bizonyítsuk be, hogy ha $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_1 y_1 - z_1^2 > 0$ és $x_2 y_2 - z_2^2 > 0$, akkor fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$(1) \quad \frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} \leq \frac{1}{x_1 y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2 y_2 - z_2^2}.$$

1. megoldás. Jelölje az (1)-ben szereplő nevezőket rendre A , A_1 , A_2 . Ezek között lényeges a következő összefüggés:

$$(2) \quad A = A_1 + A_2 + x_1 y_2 + x_2 y_1 - 2z_1 z_2.$$

Ebből

$$A = A_1 + A_2 + \frac{x_1}{x_2}(A_2 + z_2^2) + \frac{x_2}{x_1}(A_1 + z_1^2) - 2z_1 z_2,$$

$$A = A_1 + A_2 + \frac{x_1}{x_2} A_2 + \frac{x_2}{x_1} A_1 + \left(z_1 \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} - z_2 \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} \right)^2.$$

Mivel a kapott érték pozitív, ebből már következik egyrészt, hogy

$$(3) \quad A > 0,$$

másrészt $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ miatt, hogy

$$(4) \quad A \geq A_1 + A_2 + \frac{x_1}{x_2} A_2 + \frac{x_2}{x_1} A_1 \geq A_1 + A_2 + 2\sqrt{A_1 A_2} = (\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2})^2$$

és egyenlőség csakis akkor állhat, ha

$$(5) \quad z_1 \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} = z_2 \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} \quad \text{és} \quad \frac{x_1}{x_2} A_2 = \frac{x_2}{x_1} A_1.$$

Térjünk most rá a vizsgálandó (1) egyenlőtlenségre; ez jelöléseinkkel így írható:

$$\frac{8}{A} \leq \frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2}, \quad \text{azaz} \quad A \geq \frac{8A_1 A_2}{A_1 + A_2}$$

(4) miatt ennek bizonyításához elegendő lenne megmutatni, hogy

$$(\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2})^2 \geq \frac{8A_1 A_2}{A_1 + A_2}, \quad \text{azaz} \quad \left(\frac{\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2}}{2} \right)^2 \cdot \frac{A_1 + A_2}{2} \geq A_1 A_2,$$

ez viszont azért igaz, mert a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján

$$\left(\frac{\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2}}{2} \right)^2 \geq \sqrt{A_1 A_2} \quad \text{és} \quad \frac{A_1 + A_2}{2} \geq \sqrt{A_1 A_2}.$$

Egyenlőség csakis akkor állhat, ha $A_1 = A_2$. Ez azt jelenti (5)-tel együtt, hogy az egyenlőség feltétele $x_1^2 = x_2^2$, $x_1 = x_2$ teljesülése, ami (5) első részéből maga után vonja $z_1 = z_2$ fennállását; $A_1 = A_2$ -ből ezek után már közvetlenül is következik, hogy $y_1 = y_2$; viszont nyilvánvaló, hogy $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$ esetén (1)-ben valóban egyenlőség áll.

2. megoldás. Az 1. megoldás jelöléseit használva kiindulásunk annak az észrevételre, hogy $-4A_1$, $-4A_2$ és $-4A$ rendre az

$$F_1(t) = x_1 t^2 + 2z_1 t + y_1,$$

$$F_2(t) = x_2 t^2 + 2z_2 t + y_2,$$

$$F(t) = F_1(t) + F_2(t) = (x_1 + x_2)t^2 + 2(z_1 + z_2)t + (y_1 + y_2)$$

másodfokú polinomok diszkriminánsai, továbbá: ha $a > 0$, az $ax^2 + bx + c$ függvény minimumát a $-\frac{b}{2a}$ helyen veszi fel és a minimum értéke $-\frac{D}{4a}$, ahol D a másodfokú függvény diszkriminánsa.

Ezen az alapon:

$$(5) \quad \min F_1(t) = \frac{A_1}{x_1}, \quad \min F_2(t) = \frac{A_2}{x_2}, \quad \min F(t) = \frac{A}{x_1 + x_2}.$$

Mivel értelemszerűen

$$(6) \quad \min F(t) \geq \min F_1(t) + \min F_2(t),$$

tehát (5) alapján

$$\frac{A}{x_1 + x_2} \geq \frac{A_1}{x_1} + \frac{A_2}{x_2}.$$

Ebből egyenértékű átalakítással kapjuk (felhasználva (3)-at), hogy

$$\frac{8}{A} \leq \frac{8}{(x_1 + x_2) \left(\frac{A_1}{x_1} + \frac{A_2}{x_2} \right)}.$$

Mivel jelöléseink szerint a bizonyítandó: $\frac{8}{A} \leq \frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2}$, elegendő bizonyítanunk, hogy

$$\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \geq \frac{8}{(x_1 + x_2) \left(\frac{A_1}{x_1} + \frac{A_2}{x_2} \right)},$$

vagy ami az itt szereplő mennyiségek pozitív volta miatt ezzel egyenértékű:

$$\left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right) \left(\left(1 + \frac{x_2}{x_1} \right) A_1 + \left(1 + \frac{x_1}{x_2} \right) A_2 \right) \geq 8,$$

vagy a bal oldalt átalakítva:

$$2 + \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \right) + \left(\frac{A_1}{A_2} + \frac{A_2}{A_1} \right) + \left(\frac{x_2 A_1}{x_1 A_2} + \frac{x_1 A_2}{x_2 A_1} \right) \geq 8,$$

ami valóban fennáll, hiszen egy pozitív számnak és reciprokának az összege legalább 2; ezzel (1) teljesülését bebizonyítottuk.

Utolsó lépésünknel az egyenlőség feltétele: $x_1 = x_2$ és $A_1 = A_2$ fennállása; (6)-ban pedig az, hogy F_1 és F_2 minimumhelye azonos legyen, tehát hogy $\frac{z_1}{x_1} = \frac{z_2}{x_2}$ teljesüljön. Így $x_1 = x_2$ -ből $z_1 = z_2$ is következik és mindkettőt felhasználva az $A_1 = A_2$ az $y_1 = y_2$ egyenlőséget jelenti. Összefoglalva tehát: (1)-ben egyenlőség akkor és csak akkor állhat, ha $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$.

1970.

1970/1. Legyen M az ABC háromszög AB oldalának valamely belső pontja. Jelölje r_1 , r_2 és r rendre az AMC , BMC , ill. ABC háromszögbe írható kör sugarát, továbbá ϱ_1 az AMC háromszög AM oldalához, ϱ_2 a BMC háromszög BM oldalához, végül ϱ az ABC háromszög AB oldalához tartozó hozzáírt kör sugarát.

Bizonyítsuk be, hogy ekkor fennáll az $\frac{r_1}{\varrho_1} \cdot \frac{r_2}{\varrho_2} = \frac{r}{\varrho}$ egyenlőség.

Megoldás. A háromszög beírt köre az AB oldalt a C_0 , a hozzáírt köre ugyanezt az oldalt a C_1 pontban érinti (1970/1.1. ábra). A háromszög érintőszakaszaira vonatkozó ismert összefüggés szerint [19]

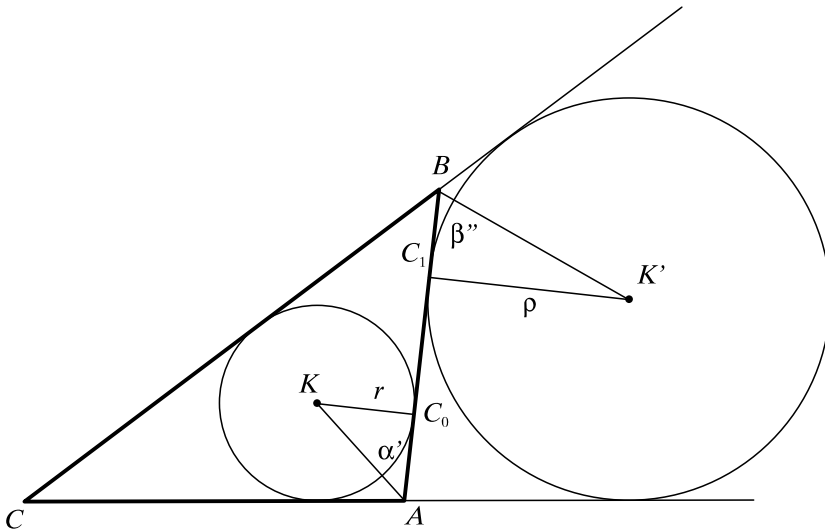
$$(1) \quad AC_0 = BC_1 = s - a.$$

Legyen továbbá az ABC -be írt kör középpontja K , az AB -hez hozzáírt köré K' , $\angle KAC_0 = \alpha'$, $\angle K'BC_1 = \beta''$, akkor

$$r = (s - a) \operatorname{tg} \alpha', \quad \varrho = (s - a) \operatorname{tg} \beta''$$

és így

$$(2) \quad \frac{r}{\varrho} = \frac{\operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \beta''}.$$



70/1.1. ábra

Legyen most már az AMC hozzáírt körének középpontja K'_1 , a BMC beírt köréé K_2 és $\angle K'_1MA = \angle K_2MB = \varphi$, a (2) alatti eredményt az AMC , majd a

A bizonyítandó (1) egyenértékű az

$$(2) \quad A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n > 0$$

egyenlőtlenséggel. Helyettesítsük ebbe az előbb kifejezett értékeket:

$$\begin{aligned} A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n &= A_n B_n - A_n b^n x_n - A_n B_n + B_n a^n x_n = \\ &= a^n x_n (b^n x_n + b^{n-1} x_{n-1} + \dots + b x_1 + x_0) - \\ &\quad - b^n x_n (a^n x_n + a^{n-1} x_{n-1} + \dots + a x_1 + x_0) = \\ &= x_n x_{n-1} a^{n-1} b^{n-1} (a - b) + x_n x_{n-2} a^{n-2} b^{n-2} (a^2 - b^2) + \dots \\ &\quad + x_n x_1 a b (a^{n-1} - b^{n-1}) + x_n x_0 (a^n - b^n). \end{aligned}$$

Mivel utolsó kifejezésünkben a zárójelben levő tagok különbsége állandó előjelű, (2) akkor és csak akkor teljesülhet, ha $a > b$.

2. megoldás. Vezessük be az $f(t) = x_n t^n + x_{n-1} t^{n-1} + \dots + x_1 t + x_0$, továbbá a $g(t) = \frac{f(t) - x_n t^n}{f(t)} = 1 - \frac{x_n t^n}{f(t)}$ jelöléseket. Mivel x_0, x_1, \dots, x_{n-2} nemnegatív, x_{n-1} és x_n pozitív, pozitív t értékekre $f(t)$ növekvő,

$$\frac{f(t)}{t^n} = x_n + x_{n-1} \frac{1}{t} + x_{n-2} \frac{1}{t^2} + \dots + x_0 \frac{1}{t^n}$$

csökkenő, $\frac{x_n t^n}{f(t)}$ növekvő, $g(t)$ csökkenő függvény, a növekedést és csökkenést szigorú értelemben véve.

Vegyük észre, hogy $g(a) = \frac{A_{n-1}}{A_n}$, $g(b) = \frac{B_{n-1}}{B_n}$, ezért $a > b$ akkor és csak akkor áll, ha $g(a) < g(b)$, vagyis

$$\frac{A_{n-1}}{A_n} < \frac{B_{n-1}}{B_n}.$$

1970/3. A valós számokból álló $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ sorozat eleget tesz az

$$(1) \quad 1 = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$$

egyenlőtlenségláncnak. Felhasználásával a $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ sorozatot a következőképpen definiáljuk:

$$(2) \quad b_n = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k} \right) \frac{1}{\sqrt{a_k}}.$$

Bizonyítsuk be, hogy

I. a $0 \leq b_n < 2$ egyenlőtlenségpár minden n értékre fennáll;

II. bármely olyan c valós számhoz, amely eleget tesz a $0 \leq c < 2$ feltételnek, létezik olyan (1)-et kielégítő $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ sorozat, hogy a belőle képzett b_n számok közül végtelen sok nagyobb c -nél.

1. megoldás. I. Mivel $\frac{a_k-1}{a_k} \leq 1$, ezért $1 - \frac{a_k-1}{a_k} \geq 0$ és így a b_n -et előállító összeg tagjai nem negatívak, tehát b_n sem negatív. Nézzük a (2) összeg egy tagját:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{a_k-1}{a_k}\right) \frac{1}{\sqrt{a_k}} &= \left(1 + \sqrt{\frac{a_k-1}{a_k}}\right) \left(1 - \sqrt{\frac{a_k-1}{a_k}}\right) \frac{1}{\sqrt{a_k}} \leq \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{a_k}} \left(1 - \sqrt{\frac{a_k-1}{a_k}}\right) \leq \frac{2}{\sqrt{a_{k-1}}} \left(1 - \sqrt{\frac{a_k-1}{a_k}}\right) = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}} - \frac{1}{\sqrt{a_k}}\right). \end{aligned}$$

Alkalmazzuk a most kapott becslést a (2) összeg tagjaira:

$$b_n \leq 2 \left(\frac{1}{\sqrt{a_0}} - \frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_1}} - \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \dots - \frac{1}{\sqrt{a_n}} \right) = 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{a_n}} \right) < 2,$$

ezzel az I. részt bizonyítottuk.

II. Válasszuk az a_0, a_1, \dots sorozatnak olyan mértani sorozatot, amelynél $a_0 = 1$ és hányadosa $\frac{1}{q^2}$, ahol $0 < q < 1$. A sorozat $\frac{1}{q^2} > 1$ miatt növekvő, tehát eleget tesz (1)-nek. A (2) összeg egy tagja ekkor

$$\left(1 - \frac{q^{2k}}{q^{2k-2}}\right) q^k = (1 - q^2) q^k,$$

ezért

$$b_n = (1 - q^2) \sum_{k=1}^n q^k = (1 - q^2) \frac{q(1 - q^n)}{1 - q} = q(1 + q)(1 - q^n) > 2q^2(1 - q^n).$$

Mivel q a $]0, 1[$ intervallumból van, q^n a nullához tart és ezért $1 - q^n$ az 1-hez, ezért egy bizonyos n_0 -tól kezdve már minden n -re teljesül az $1 - q^n > q$ egyenlőség, tehát

$$(3) \quad b_n > 2q^3.$$

Válasszuk most a q értékét $q = \sqrt[3]{\frac{c}{2}}$ -nek, mivel $0 \leq c < 2$, $0 \leq q < 1$ és (3) alapján egy bizonyos n_0 -tól kezdve minden n -re

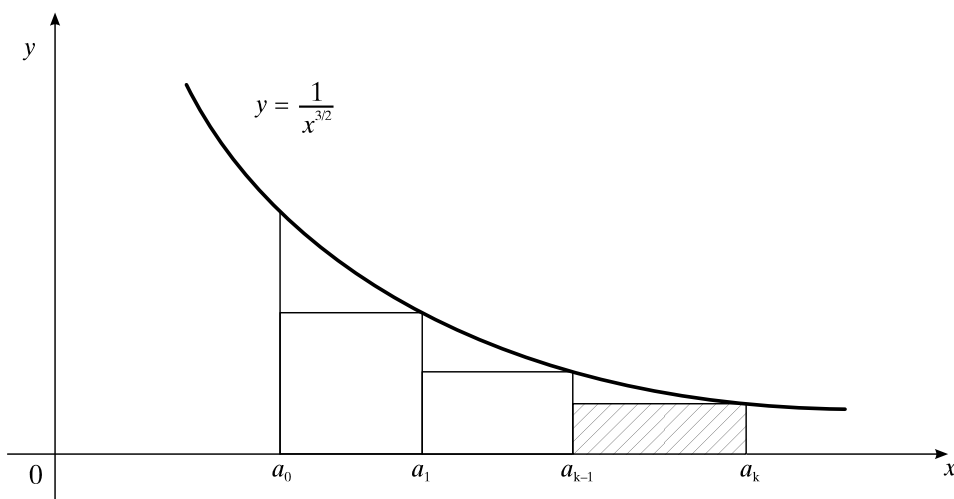
$$b_n > 2q^3 = c,$$

amivel feladatunk állítását bizonyítottuk.

Megjegyzés. Könnyen rámutathatunk e feladat eredetére és ez egy megoldási útra is elvezet. A (2) összeg egy tagja így írható fel:

$$(4) \quad \frac{a_k - a_{k-1}}{a_k^{\frac{3}{2}}}.$$

Ha a derékszögű koordináta-rendszerben az x -tengelyen kijelöljük az $a_0, a_1, \dots, a_k, \dots$ pontok helyét, a (4) alatti érték olyan téglalapnak a területe, amelynek két



70/3.1. ábra

csúcsa az x -tengely a_{k-1} , a_k pontja, egy csúcsa pedig rajta van az $y = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ görbén (1970/3.1. ábra), a b_n összeg tehát a görbe alatti terület alsó közelítő összegét képező téglalap-területösszeg. b_n ezért kisebb, mint az a_0 -tól a_n -ig terjedő görbe alatti terület, azaz

$$(5) \quad b_n < \int_{a_0}^{a_n} x^{-\frac{3}{2}} dx = \left[-\frac{2}{\sqrt{x}} \right]_{a_0}^{a_n} = 2 - \frac{2}{\sqrt{a_n}} < 2,$$

ezzel a feladat I. részét igazoltuk. Ezen az alapon a II. állítás tartalma igen szemléletes, szabatos bizonyítása az integrál közelítését igényli, ami lehetséges, de nem ad a már közölnél egyszerűbb példát.

1970/4. Határozzuk meg az összes olyan n pozitív egész számot, amely a következő tulajdonságú:

Az $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ halmaz úgy bontható fel két, közös elemet nem tartalmazó és nem üres halmazra, hogy az egyik részhalmaz elemeinek a szorzata a másik részhalmaz elemeinek a szorzatával egyenlő.

1. megoldás. Bebizonyítjuk, hogy a feladat feltételét egyetlen n szám sem elégíti ki. A természetes számok sorozatában minden p -edik szám osztható p -vel, és két, p -vel osztható szám között legalább $p-1$ számnak kell lennie. Az adott hat szám között tehát nem lehet két 7-tel osztható, ezért, ha az előírt módon két halmazra lennének oszthatók, prímtényezőik között csak a 2, 3 és 5 szerepelhetne, hiszen mindkét sorozatban ugyanazoknak a prímtényezőeknek kell fellépniük.

Az 5-ös tényező csak n -ben és $n+5$ -ben fordulhat elő, ezért $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$ prímtényezői csak 2 és 3 lehetnek. A négy szám között kettő páratlan,

tehát csak hárommal oszthatók, de ezek másodsomszédosak, két másodsomszédos szám különbsége viszont 2 és így nem lehetnek hárommal oszthatók. Ez az ellentmondás azt bizonyítja, hogy nincs a feladatot kielégítő n .

2. megoldás. Tegyük fel, hogy sikerült a hat számot a kívánt módon két halmazba osztani. Nem lehet a számok között 7-tel osztható, mert akkor mindkét részhalmazban kellene ilyennek lennie, holott közülük csak egyik lehet 7 többszöröse. Ez azt is jelenti, hogy $n - 1$ -nek kell 7-tel oszthatónak lennie és így a halmazba tartozó számok 7-es maradékai rendre 1, 2, 3, 4, 5, 6; a hat szám szorzatának 7-es maradéka $6! = 120$ 7-es maradékával azonos, tehát 6-tal. Mivel a feltételezett két csoportban egyenlő a számok szorzata, egyenlő 7-es maradéka-
inak a szorzata is, legyen ez m , de akkor a hat szám szorzatának a 7-es maradéka m^2 7-es maradékával egyenlő. m lehetséges maradékai 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ezek négyzetének 7-es maradékai 0, 1, 4, 2, 2, 4, 1; ezek között nincs a 6-os, tehát a kívánt felosztás lehetetlen.

3. megoldás. Azt mutatjuk meg, hogy ha $n \neq 1$, a hat szám között kell lennie olyannak, amelynek van 7-nél nem kisebb prímosztója. Mivel pedig legfeljebb egy ilyen szám lehet a hat között, a kívánt felosztás nem létezhet.

A hat szám között van egy $6k + 1$ és egy $6k - 1$ alakú, ti. van közöttük 6-tal osztható; ha ez nem n vagy $n + 5$, akkor nyilván igaz az állítás, ha n , akkor $n + 1$ és $n + 5$, ha pedig $n + 5$, akkor n és $n + 4$ az ilyen számok. A $6k + 1$ és $6k - 1$ alakú számainknak csak páratlan prímosztója lehet, de 3 nem tartozhat közéjük. A két szám közül legfeljebb az egyik osztható 5-tel, hiszen különbségük 2 vagy 4, de akkor a másiknak — mivel nem lehet 1 — kell tartalmaznia egy 7-nél nem kisebb prímosztót. Ezzel állításunkat bizonyítottuk.

Megjegyzések. 1. A feladat természetesen megoldható úgy is, hogy elkészítjük a hat szám összes lehetséges két csoportba osztását, és megmutatjuk, hogy nincs közöttük kettő, amelyek szorzata egyenlő lenne.

2. Ennek az egyszerű feladatnak is mély számelméleti háttere van. A 2. megoldásban azt használtuk fel, hogy $6! \equiv 6 \equiv -1 \pmod{7}$. Ennek általános formája a nevezetes Wilson-féle kongruencia tétel, mely szerint

$$(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$$

akkor és csakis akkor teljesül, ha p prímszám.

3. A 3. megoldásban azt használtuk ki, hogy az adott 6 számhoz mindig található olyan prímszám, amely e számok közül csak egynek osztója. Az ilyen típusú tételek között alapvető az ún. Sylvester–Schur tétel: ha $n \geq 2k$, akkor az

$\binom{n}{k}$ -nak van k -nál nagyobb prímosztója.

Mivel $\binom{n}{k} = \frac{(n-k+1)(n-k+2)\dots(n-1)n}{k!}$, ez azt jelenti, hogy a fenti

tört osztható egy k -nál nagyobb p prímmel, de ezzel a nevező nem osztható, tehát a számlálóbeli k tényezős szorzatnak kell p -vel oszthatónak lennie. Minthogy a számlálóban k egymásutáni szám van, közülük csak az egyik lehet osztható p -vel. Ez speciálisan azt jelenti, hogy ha $n > 6$, azaz $n+5 \geq 2 \cdot 6$, akkor

$$n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$$

osztható egy 6-nál nagyobb prímszámmal; ezt használtuk fel a 3. megoldásban.

A Sylvester–Schur tételből levezethető, hogy k darab egymást követő természetes számhoz mindig található olyan pozitív prímszám, amely a számok közül csak egynek osztója. Ebből természetesen már az is következik, hogy k darab egymást követő természetes szám nem osztható be két olyan halmazba, amelyben a számok szorzata egyenlő.

A Sylvester–Schur tételnek egyébként főleg az a speciális esete ismert, amelynél $n = 2k$; ebben az esetben a tétel azt mondja ki, hogy ha $n \geq 1$, akkor van olyan prímszám, amely n és $2n$ közé esik ($n < p < 2n$). Ezt a tétel Csebisev tételnek nevezik.

1970/5. Az $ABCD$ tetraéderben a BDC szög derékszög. A D csúcsból az ABC síkra bocsátott merőleges talppontja egybeesik az ABC háromszög magasságpontjával.

Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$(1) \quad (AB + BC + CA)^2 \leq 6(AD^2 + BD^2 + CD^2).$$

Mely tetraéderek esetén érvényes itt az egyenlőség?

Előzetes megjegyzés a megoldásokhoz. Minden megoldási út arra vezet, hogy megmutassuk, hogy a D csúcsból induló élek páronként merőlegesek egymásra, tehát ún. derékszögű tetraéderről van szó. Ha ezt már igazoltuk, (1) bizonyítása a következő: legyen $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $DA = a_1$, $DB = b_1$, $DC = c_1$. Az ABD , BCD , CAD oldallapokra (1970/5.1. ábra) alkalmazva Pitagorász tételét kapjuk, hogy

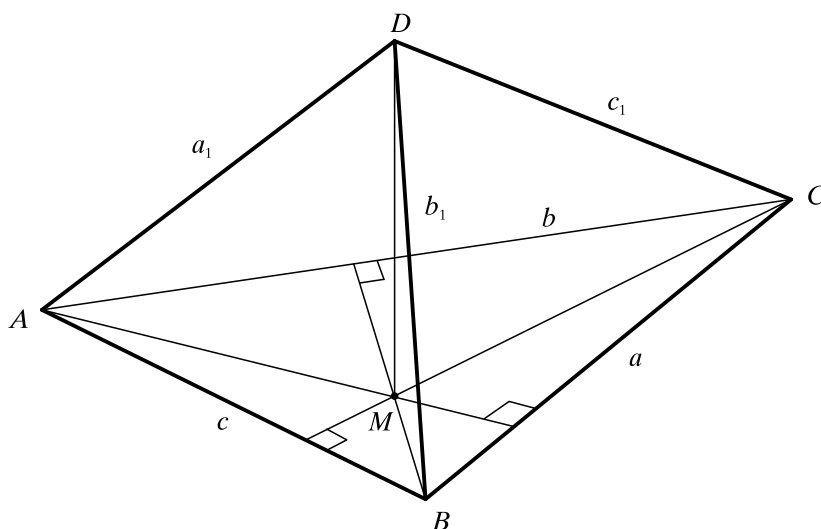
$$(2) \quad a^2 = b_1^2 + c_1^2, \quad b^2 = c_1^2 + a_1^2, \quad c^2 = a_1^2 + b_1^2.$$

Ezek összegzéséből adódik (mindkét oldalt 3-mal szorozva)

$$\begin{aligned} 6(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) &= 3(a^2 + b^2 + c^2) = \\ &= (a+b+c)^2 + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq (a+b+c)^2, \end{aligned}$$

amivel (1)-et bizonyítottuk. Egyenlőség csak $a = b = c$ esetén teljesül, (2) alapján ez maga után vonja $a_1 = b_1 = c_1$ teljesülését.

1. megoldás. Legyen ABC magasságpontja M . DM merőleges az ABC síkra és ezért CA -ra is: $CA \perp DM$. Azonban $CA \perp BM$, mert BM magasságvonal, CA tehát merőleges a DBM sík két nem párhuzamos egyenesére, ezért



70/5.1. ábra

minden egyenesére merőleges: $CA \perp DB$. Ennélfogva DB merőleges a CAD sík két nem párhuzamos egyenesére: CA -ra és DC -re, következésképpen merőleges CAD minden egyenesére; azaz: $DB \perp DA$. B és C szerepét felcserélve kapjuk, hogy $DC \perp DA$, tehát a D csúcsból induló élek valóban páronként merőlegesek egymásra.

2. megoldás. Az M pontból az A, B, C, D csúcsokba mutató vektorok legyenek rendre $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$. A szakaszok merőlegességét a megfelelő vektorok skaláris szorzatának nulla voltával fejezzük ki.

DM merőleges az ABC magasságaira:

$$(4) \quad \mathbf{d}\mathbf{a} = \mathbf{d}\mathbf{b} = \mathbf{d}\mathbf{c} = 0.$$

MB merőleges AC -re, ill. MC merőleges AB -re:

$$(5) \quad \mathbf{b}(\mathbf{c} - \mathbf{a}) = 0, \text{ azaz } \mathbf{bc} = \mathbf{ab},$$

$$(6) \quad \mathbf{c}(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 0, \text{ azaz } \mathbf{ac} = \mathbf{bc}.$$

DB merőleges DC -re:

$$(\mathbf{b} - \mathbf{d})(\mathbf{c} - \mathbf{d}) = 0, \text{ azaz } \mathbf{bc} + \mathbf{d}^2 - \mathbf{dc} - \mathbf{db} = 0,$$

(4) miatt

$$(7) \quad \mathbf{bc} + \mathbf{d}^2 = 0.$$

Bizonyítanunk kell, hogy DB merőleges DA -ra és DC merőleges DA -ra, ez (7) mintájára azt jelenti, hogy

$$\mathbf{ab} + \mathbf{d}^2 = 0, \text{ ill. } \mathbf{ac} + \mathbf{d}^2 = 0,$$

ezek viszont (7)-ből azonnal következnek, mert (5) és (6) alapján

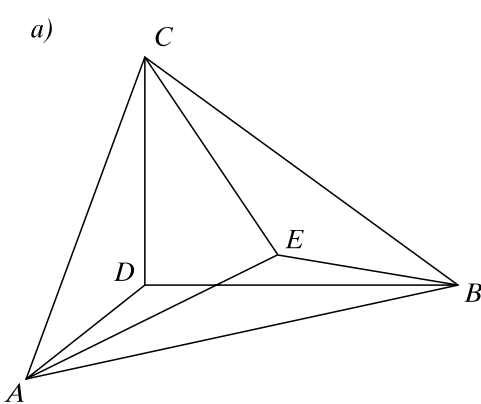
$$\mathbf{bc} = \mathbf{ab} = \mathbf{ac}.$$

Megjegyzések. A tetraéderünk az ún. magasságpontos (ortocentrikus) tetraéderek közé tartozik; ezek magasságvonalai egy ponton mennek át (ld. erről [20] jegyzetünket). Még az a speciális tulajdonsága is megvan, hogy egy csúcsnál az élek páronként merőlegesek egymásra, innen az elnevezése: derékszögű tetraéder. Ez bizonyos értelemben a derékszögű háromszög egyik térbeli általánosításának tekinthető; érvényes rá pl. egy Pitagorász tételére emlékeztető összefüggés: a derékszögű oldallapok területének négyzetösszege a hegyesszögű alaplap területének a négyzetével egyenlő.

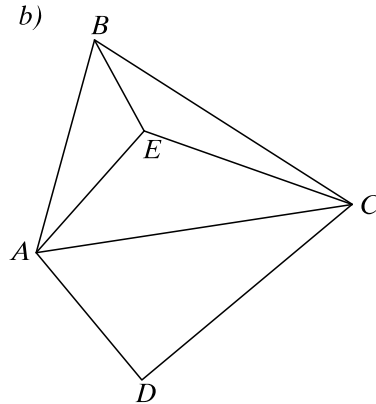
1970/6. Adott a síkon 100 pont; közülük egyik három sem esik egy egyenesre. Tekintsük az összes lehetséges háromszöget, amelyeknek a csúcspontjai az adott pontok közül valók. Bizonyítsuk be, hogy ezeknek a háromszögeknek legfeljebb a 70 %-a hegyesszögű.

1. megoldás. A feladat állítását először 5 pontra bizonyítjuk; mindenkor feltesszük, hogy az adott pontok közül nincs 3 egyenesen. Tekintsük az 5 pont konvex burkát. Ez vagy három- vagy négy- vagy ötszög.

a) Ha konvex burok az ABC háromszög (1970/6.1a. ábra), a belsejében kell lennie még az 5-ből két pontnak, legyen ez D és E . A D -t a háromszög csúcsaival összekötő szakaszok három szöget képeznek, ezek összege 360° , ezért közülük legalább kettő nem hegyesszög, tehát legalább két nem hegyesszögű háromszög csúcsa. Értelmszerűen ugyanez igaz az E pontra is, az 5 pont által meghatározott háromszögek között van legalább 4 nem hegyesszögű.



70/6.1a ábra



70/6.1b ábra

b) Ha a konvex burok az $ABCD$ négyszög (1970/6.1b ábra), az ötödik pont, E , mondjuk, az ABC háromszög belsejében van. A négyszögnek legalább egy csúcsa nem hegyesszögű, az ezt közrefogó oldalak egy nem hegyesszögű háromszöget határoznak meg; az EA , EB , EC szakaszok legalább két nem hegyesszögű zárnak közre, ebből adódik két nem hegyesszögű háromszög, összesen tehát legalább 3.

c) Ha a konvex burok az $ABCDE$ ötszög, az ötszögnek van legalább két nem hegyesszöge, mivel szögösszege 540° (1970/6.1c ábra). Ha ez a két szög a szomszédos A és B csúcsoknál van, az AEB és CBA háromszögek nem hegyesszögűek. Az $EDCB$ négyszögnek van legalább egy nem hegyesszöge, az ehhez tartozó háromszög sem hegyesszögű, tehát ebben az esetben is van legalább 3 nem hegyesszögű háromszög.

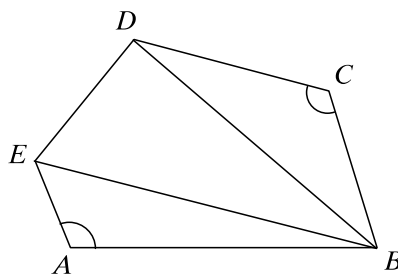
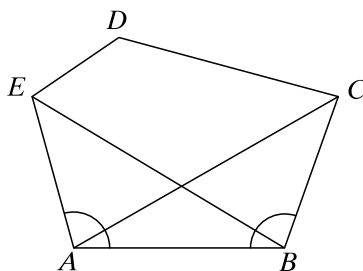
Ha az ötszög két nem-hegyesszöge nem szomszédos, pl. az A és a C csúcsban van, akkor az A -ból, ill. C -ből induló két-két oldal által közrefogott háromszögek nem hegyesszögűek, ezenkívül az $ACDE$ négyszög egyik szöge sem hegyesszög, ez is meghatároz egy nem hegyesszögű háromszöget, amelynek két oldala a négyszög két oldalával azonos. Ebben az esetben is van legalább 3 nem hegyesszögű háromszög.

Ezeknek az eseteknek az összefoglalásaként megállapíthatjuk, hogy az 5 pont által meghatározott $\binom{5}{3} = 10$ háromszög közül legalább 3 nem hegyesszögű, azaz az általuk meghatározott hegyesszögű háromszögek száma minden esetben legfeljebb 7, vagyis az összes háromszög 70 %-a.

Legyen most a pontok száma $n > 5$. Ezekből $\binom{n}{5}$ féleképpen választhatunk ki ponttötöst és minden kiválasztott ponttötösben van legalább 3 nem hegyesszögű háromszög, így legalább $3 \binom{n}{5}$ nem hegyesszögű háromszöget számlálhatunk össze. Minden ilyen háromszög azonban több ponttötösben is szerepel, méghozzá annyiban, ahányféleképpen a három csúcsponthoz a maradék $n - 3$ pontból 2 pontot ki tudunk választani, azaz $\binom{n-3}{2}$ módon. A nem hegyesszögű háromszögek száma így legalább

$$\frac{3 \binom{n}{5}}{\binom{n-3}{2}}.$$

c)



70/6.1c ábra

Következésképpen a hegyesszögűek száma legfeljebb $\binom{n}{3} - \frac{3\binom{n}{5}}{\binom{n-3}{2}}$. Ennek az aránya az összes kiválasztható háromszögek számához:

$$\frac{\binom{n}{3} - \frac{3\binom{n}{5}}{\binom{n-3}{2}}}{\binom{n}{3}} = 1 - \frac{3\binom{n}{5}}{\binom{n}{3}\binom{n-3}{2}} = 1 - \frac{3}{10} = 0,7 = 70 \, \%.$$

Ezzel állításunkat minden $n \geq 5$ értékre bizonyítottuk.

2. megoldás. Megoldásunk gondolatmenete: megmutatjuk, hogy a feladatban szereplő hegyesszögű háromszögeknek és az összes háromszögnek az aránya n növekedésével monoton csökken; ha tehát 5 pontra ez nem nagyobb 70 %-nál, akkor ugyanez igaz minden $n > 5$ számú pontra is.

A sík tetszőleges $n \geq 3$ pontja által meghatározott hegyesszögű háromszögek számának a maximuma legyen $M(n)$; legyen továbbá A_1, A_2, \dots, A_{n+1} a sík tetszőleges $n+1$ pontja (nincs közöttük három egy egyenesen). Hagyjuk el közülük A_i -t, a maradék n pont által meghatározott hegyesszögű háromszögek száma legyen k_i . A $k_1 + k_2 + \dots + k_{n+1}$ összeg megadja az A_1, A_2, \dots, A_{n+1} pontok által meghatározott hegyesszögű háromszögek számát, de úgy, hogy pl. az $A_j A_k A_l$ háromszög ebben az összegben annyszor szerepel, ahányféleképpen az A_j, A_k, A_l pontokhoz a többi $n-2$ pontból még $n-3$ hozzáválasztható, tehát $n-2$ -szer. Jelölje most h az A_1, A_2, \dots, A_{n+1} pontok által meghatározott hegyesszögű háromszögek számát, nyilván $h \leq M(n+1)$, hiszen h egy konkrét pontthalmazra, $M(n+1)$ pedig a sík összes $n+1$ elemű pontthalmazára vonatkozik. Ezek szerint

$$\frac{k_1 + k_2 + \dots + k_{n+1}}{n-2} = h.$$

Mivel definíciója szerint $k_i \leq M(n)$, ezért

$$k_1 + k_2 + \dots + k_{n+1} = (n-2)h \leq (n+1)M(n),$$

azaz

$$h \leq \frac{n+1}{n-2} M(n).$$

Ez az összefüggés a sík minden A_1, A_2, \dots, A_{n+1} pontrendszerére igaz, tehát arra is, amelyen a hegyesszögű háromszögek száma $M(n+1)$, ezért

$$M(n+1) \leq \frac{n+1}{n-2} M(n).$$

Osszuk el az egyenlőtlenség mindkét oldalát $\binom{n+1}{3}$ -mal és vegyük figyelembe,

$$\text{hogy } \frac{n-2}{n+1} \cdot \binom{n+1}{3} = \binom{n}{3};$$

$$(1) \quad \frac{M(n+1)}{\binom{n+1}{3}} \leq \frac{M(n)}{\binom{n}{3}},$$

Ez viszont éppen azt jelenti, hogy egy pontthalmazból kiválasztható hegyesszögű háromszögek maximális számának és az összes kiválasztható háromszög számának az aránya a pontszám növekedésével csökkenő.

Ha $n=5$, mint az 1. megoldásban láttuk, $M(5)=7$, és így $\frac{M(5)}{10} = \frac{7}{10} = 0,7$.

(1) alapján tehát minden $n \geq 5$ -re

$$\frac{M(n)}{\binom{n}{3}} \leq 0,7 = 70 \text{ \%}.$$

1971.

1971/1. Bizonyítsuk be, hogy a következő állítás $n=3$ és $n=5$ esetén igaz, minden más, 2-nél nagyobb egész szám esetében pedig hamis:

„Bármely a_1, a_2, \dots, a_n valós számsorra teljesül az

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \dots (a_1 - a_n) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3) \dots (a_2 - a_n) + \dots \\ \dots + (a_n - a_1)(a_n - a_2) \dots (a_n - a_{n-1}) \geq 0.$$

egyenlőtlenség”.

Megoldás. $n=3$ esetén:

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3) + (a_3 - a_1)(a_3 - a_2) = \\ = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_1a_2 - a_2a_3 - a_3a_1 = \\ = \frac{1}{2} \left((a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_3 - a_1)^2 \right) \geq 0,$$

tehát az egyenlőtlenség teljesül.

$n=5$ esetén a kifejezés az a_i -kben szimmetrikus, ezért feltehetjük, hogy $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5$. A vizsgált kifejezést mindjárt alkalmasan átalakítva írjuk fel:

$$(a_1 - a_2)[(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_1 - a_5) - (a_2 - a_3)(a_2 - a_4)(a_2 - a_5)] + \\ + (a_1 - a_3)(a_2 - a_3)(a_4 - a_3)(a_5 - a_3) + \\ + (a_4 - a_5)[(a_1 - a_5)(a_2 - a_5)(a_3 - a_5) - (a_1 - a_4)(a_2 - a_4)(a_3 - a_4)].$$

Az első és harmadik tagban $a_1 - a_2 \geq 0$, $a_4 - a_5 \geq 0$; a szögletes zárójelen belül háromtényezős szorzatok különbsége áll, ezekben a szorzatokban azonban az azonos sorszámú tényező az első tagban nagyobb: $a_1 - a_3 \geq a_2 - a_3$, $a_1 - a_4 \geq a_2 - a_4$, $a_1 - a_5 \geq a_2 - a_5$ és hasonlóan: $a_1 - a_5 \geq a_1 - a_4$, $a_2 - a_5 \geq a_2 - a_4$, $a_3 - a_5 \geq a_3 - a_4$, ezért a szögletes zárójeleken belül nemnegatív számok állnak; következésképpen az első és harmadik tag nemnegatív. A középső tag két nempozitív és két nemnegatív szám szorzata, ezért nemnegatív; a kifejezés tehát nemnegatív.

$n=4$ esetén az $a_1=0, a_2=a_3=a_4=1$ helyettesítésnél a kifejezés értéke -1 , tehát a feladat állítása helyes.

Ha $n > 5$, az $a_1=1, a_2=a_3=a_4=2, a_5=a_6=\dots=a_n=0$ helyettesítésnél a kifejezés értéke -1 ; ezzel a feladat állítását bizonyítottuk.

Megjegyzés. A feladat eredetére utal a következő átfogalmazása: Legyen a

$$p(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_k) \quad (n \geq 2)$$

polinom függvény deriváltja $p'(x)$. A

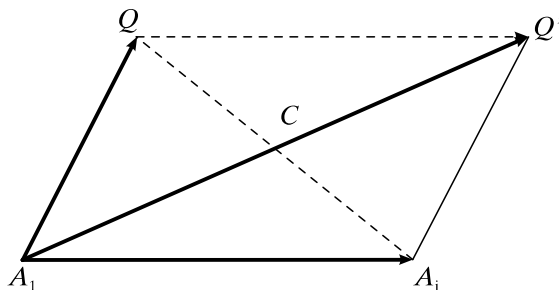
$$\sum_{i=1}^n p'(a_i) \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

egyenlőtlenség minden valós a_1, a_2, \dots, a_n szám n -esre csak $n=3$ és $n=5$ esetén teljesül.

A feladatunk megoldható a polinom és deriváltja közötti ismert kapcsolatok felhasználásával is.

1971/2. Adott egy 9 csúcú konvex poliéder: P_1 ; csúcspontjai legyenek A_1, A_2, \dots, A_9 . Jelöljük P_i -vel azt a poliédert, amelyet P_1 -ből az $A_1 \rightarrow A_i$ eltolással kapunk ($i=2, 3, \dots, 9$). Bizonyítsuk be, hogy a P_1, P_2, \dots, P_9 poliéderek közül legalább kettőnek van közös belső pontja.

Megoldás. Legyen Q a P_1 poliéder belső — vagy határpontja. Alkalmazunk erre egy $\overrightarrow{A_1 A_i}$ eltolást (1971/2.1 ábra), ennek eredménye olyan Q' pont,



71/2.1. ábra

amelynek helyvektora (A_1 -et tekintve origónak) az $\overrightarrow{A_1 Q'} = \overrightarrow{A_1 Q} + \overrightarrow{A_1 A_i}$ vektor. A paralelogramma-szabály szerint a Q' úgy is megkapható, hogy az A_1 -et tükrözzük az $A_i Q$ szakasz C felezőpontjára (ez akkor is igaz, ha Q az $A_1 A_i$ szakasz pontja). Mivel Q is és A_i is pontja P_1 -nek, a P_1 konvex voltából következik, hogy C is P_1 -nek belső v. határpontja. Ezek szerint Q' úgy is megkapható, hogy C -re A_1 középpontú kétszeres nagyítást alkalmazunk.

Eredményünk lényege, hogy a feladatban adott eltolásokkal olyan pontokat kapunk, amelyek benne vannak P_1 -nek az A_1 -ből való kétszeres felnagyítottjában.

Ha P_1 térfogata V , kétszeres felnagyítottjává $8V$. Mivel az egyenként V térfogatú P_1, P_2, \dots, P_9 poliéderek mind benne vannak a $8V$ térfogatú felnagyított poliéderben, ez csak úgy lehetséges, ha közülük néhánynak van közös belső pontja.

Megjegyzés. Nyolccsúcsú poliéderre — pl. kockára — még általában nem igaz a feladat állítása, viszont igaz minden 8-nál több csúcsú konvex poliéderre.

1971/3. Bizonyítsuk be, hogy a

$$\{2^n - 3\} \quad (n=2, 3, 4, \dots)$$

sorozat tartalmaz olyan végtelen részsorozatot, amelynek bármely két eleme relatív prím.

Megoldás. Az $n=3, 4, 5$ értékekre a sorozat elemei: 5, 13, 29 relatív prímek. Olyan eljárást adunk meg, amely a relatív prímekből álló néhány sorozatelem segítségével újabb sorozatelemet állít elő, amely szintén relatív prím a már meglévő sorozatelemekhez viszonyítva.

Legyenek a_1, a_2, \dots, a_k a részsorozat már meglévő elemei, és legyen $s = a_1 a_2 \dots a_k$. Tekintsük a

$$2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^s$$

$s+1$ számot, ezek között van kettő, amelynek ugyanaz az s -sel való osztási maradéka; legyenek ezek 2^r és 2^q ($r > q$). Mivel $2^r - 2^q = 2^q(2^{r-q} - 1)$ osztható s -sel és s páratlan számok szorzata lévén maga is páratlan, ezért s osztója $2^{r-q} - 1$ -nek, tehát valamilyen e egészszel $2^{r-q} - 1 = es$. Legyen most már

$$a_{k+1} = 4es + 1 = 4 \cdot 2^{r-s} - 4 + 1 = 2^{r-s+2} - 3.$$

a_{k+1} relatív prím az a_i sorozatelemekhez ($i \leq k$), mert ha a_i -nek és a_{k+1} -nek lenne 1-nél nagyobb közös osztója, az osztaná s -et és $4es + 1$ -et is, ami lehetetlen. a_{k+1} nagyobb minden a_i -nél ($i \leq k$), mert nagyobb azok szorzatánál is. Ezzel a módszerrel tehát végtelen sok, a feladat kikötéseinek eleget tevő a_{k+1} elemet állíthatunk elő.

Megjegyzések. 1. Megoldásunkat, gondolatmenetét megtartva, a következőképpen módosíthatjuk: Legyen

$$a_{k+1} = 2^{\varphi(s)+2} - 3$$

ahol φ az Euler-féle $\varphi(n)$ függvény [21]. Mivel az Euler-féle kongruenciátétel szerint $2^{\varphi(s)} \equiv 1 \pmod{s}$, $2^{\varphi(s)} - 1 = es$, ahol e egész szám és így

$$a_{k+1} = 4 \cdot 2^{\varphi(s)} - 3 = 4es + 1.$$

Ebből már következik, hogy $a_{k+1} > a_i$ ($i \leq k$) és a_{k+1} és a_i relatív prímek, mert ha lenne 1-nél nagyobb közös osztójuk, a $4es + 1$ -et is osztaná, ami lehetetlen.

2. Gondolatmenetünk átvihető a $\{p^n - (p+1)\}$ típusú sorozatokra is, ahol p prímszám.

3. Bizonyításbeli konstrukciónk azt az elvet követte, amit már Euklidész is használt a prímszámok végtelenségének a kimutatásánál; ti. ha csak véges sok prímszám léteznék: p_1, p_2, \dots, p_k , akkor $p_{k+1} = p_1 p_2 \dots p_k + 1$ -nek prímszámnak kellene lennie, mivel a p_i prímekek egyikével sem osztható.

1971/4. Az $ABCD$ tetraéder mindegyik lapja hegyesszögű háromszög. Legyen X, Y, Z, T rendre az AB, BC, CD, DA él egy-egy belső pontja, és tekintsük az összes $XYZTX$ zárt törött vonalat.

Bizonyítsuk be, hogy

ha

$$(1) \quad DAB\angle + BCD\angle \neq ABC\angle + CDA\angle,$$

akkor az $XYZTX$ törött vonalak között nincs legrövidebb;

ha

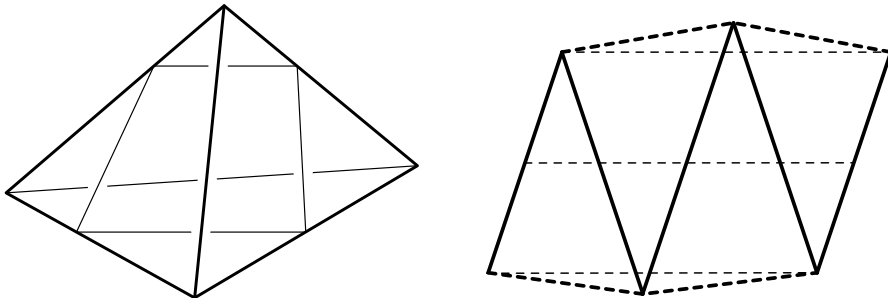
$$(2) \quad DAB\angle + BCD\angle = ABC\angle + CDA\angle,$$

akkor az $XYZTX$ törött vonalak között végtelen sok legrövidebb van, azok mindegyike

$$2AC \sin \frac{\alpha}{2}$$

hosszúságú, ahol $\alpha = BAC\angle + CAD\angle + DAB\angle$.

Megoldás. Vágjuk fel a tetraédert az AC, AB, BD élek mentén és felületét terítsük síkba, így a tetraéder hálóját kapjuk meg (1971/4.1. ábra). Kiterítéskor a lapokon határtól-határig terjedő szakaszok nem változnak meg, tehát a tetraéder



71/4.1. ábra

zárt töröttvonalak akkor a legkisebb, ha síkbaterítettjére is ez igaz.

A kiterítésben két szomszédos háromszög együttese hegyesszögű voltuk miatt konvex négyszöget alkot. Ha pl. az $ABDC$ kiterített négyszögben az XY és YZ szakaszok nem esnek egy egyenesbe, akkor Y felvehető úgy, hogy X, Y, Z egy egyenesen legyen és Y a BC élnek legyen belső pontja, tehát kiterítésben a legrövidebb $XYZTX$ törött vonal szakaszai szükségképpen egy egyenesen vannak; természetesen ennek akkor is igaznak kell lennie, ha nem az AB , hanem pl. az AD él mentén vágjuk fel a tetraédert.

Feltételezve az X, Y, Z, T egy egyenesre illeszkedését, vezessük be az

$$\begin{aligned} AXT\angle &= BXY\angle = \varphi_1, & BYX\angle &= CYZ\angle = \varphi_2, \\ CZY\angle &= DZT\angle = \varphi_3, & DTZ\angle &= ATX\angle = \varphi_4 \end{aligned}$$

jelöléseket, ezekkel:

$$\begin{aligned} DAB\angle + BCD\angle &= 2\pi - (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4), \\ ABC\angle + CDA\angle &= 2\pi - (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4), \end{aligned}$$

ami ellentmond az (1) feltevésnek, tehát nem létezhet legrövidebb $XYZTX$ töröttvonal.

Tegyük most fel, hogy (2) teljesül.

Legyen most az A, B, C, D tetraédercsúcsoknál levő három élszög összege rendre $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. (2) felhasználásával

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma &= DAB\angle + DAC\angle + CAB\angle + BCD\angle + BCA\angle + ACD\angle = \\ &= (DAB\angle + BCD\angle) + (CAB\angle + BCA\angle) + (DAC\angle + ACD\angle) = \\ &= ABC\angle + CDA\angle + \pi - ABC\angle + \pi - CDA\angle = 2\pi, \end{aligned}$$

tehát

$$(3) \quad \alpha + \gamma = 2\pi.$$

Ugyanezt a gondolatletemet alkalmazva bizonyíthatjuk, hogy (2)-ből

$$(4) \quad \beta + \delta = 2\pi$$

következik.

Tegyük fel, hogy $\gamma \leq \pi$ és $\delta \leq \pi$ (ha nem ez lenne a helyzet: (3)-ból és (4)-ből következik, hogy az (α, δ) , (α, β) , (γ, β) , (γ, δ) párok közül ez legalább egyre teljesül; ha pl. az (α, β) párra teljesülne, a tetraéder hálóját úgy teríthetnénk ki, hogy ábránk mintájára az AB él foglalja el ábránk CD élének a „központi” szerepét), ez azt jelenti, hogy az $ABDB'A'C$ hatszög konvex.

(2)-ből következik, (ld. megjegyzésünket), hogy AB és $A'B'$ párhuzamosak, s mivel egyenlők is, $AA'B'B$ paralelogramma. Így minden olyan töröttvonal, amely kiterítésben az AA' -vel párhuzamos XX' szakaszba megy át, minimális hosszúságú és valamennyi egyenlő.

$AC = A'C$ miatt ACA' egyenlő szárú háromszög, szárszöge γ , következésképpen az XX' töröttvonal hossza (3)-ra tekintettel:

$$XX' = AA' = 2AC \sin \frac{\gamma}{2} = 2AC \sin \left(\pi - \frac{\alpha}{2} \right) = 2AC \sin \frac{\alpha}{2},$$

és ezt kellett bizonyítanunk.

Megjegyzés. AB és $A'B'$ párhuzamossága így látható be: (2) szerint, ha $DAB \sphericalangle = \omega_2$, $BCD \sphericalangle = \omega_1$, $ABC \sphericalangle = \varepsilon_1$, $ADC \sphericalangle = \varepsilon_2$,

$$\omega_1 + \omega_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

azaz

$$-\varepsilon_1 + \omega_1 - \varepsilon_2 + \omega_2 = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy ha egy AB -vel párhuzamos vektort elforgatunk rendre $-\varepsilon_1$, $+\omega_1$, $-\varepsilon_2$, $+\omega_2$ szöggel, akkor állása nem változik meg, viszont ha az AB egyenesre alkalmazzuk egymás után ezeket az elforgatásokat B , C , D , A' középpontok körül, akkor éppen az $A'B'$ egyenesbe megy át, s mivel közben az állása nem változott meg, AB és $A'B'$ párhuzamosak.

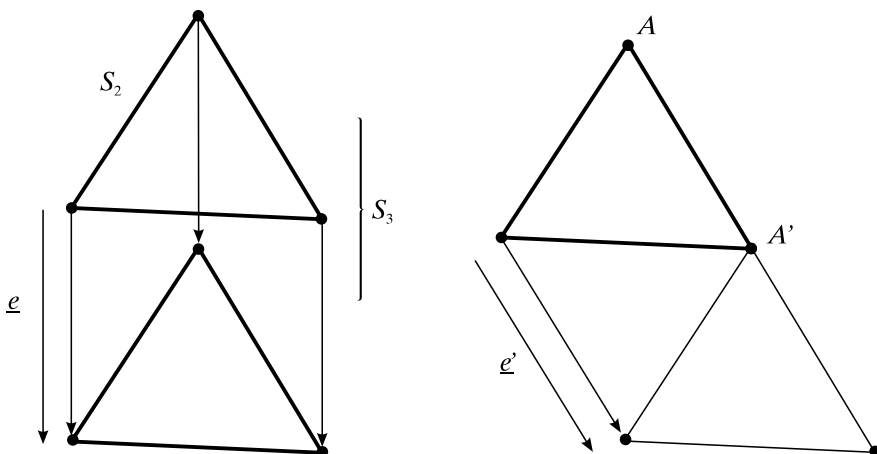
1971/5. Bizonyítsuk be, hogy bármely természetes számot jelentsen is m , mindig van a síkban olyan véges, nem üres S ponthalmaz, amely a következő tulajdonságú:

Ha A az S ponthalmaz tetszőleges pontja, akkor S -ben pontosan m számú olyan pont van, amely A -tól egységnyi távolságra esik.

Megoldás. $m = 1$ esetén S lehet pl. egy egységszakasz két végpontja; $m = 2$ esetén pl. egy egységoldalú szabályos háromszög 3 csúcsa. Egy nagyon egyszerű módszert adunk meg arra, hogy hogyan lehet valamely m értékhez tartozó S_m halmazból egy $m + 1$ értékhez tartozó S_{m+1} halmazt képezni:

Toljuk el az S_m halmaz minden pontját egy adott alkalmas egységvektorral; a kapott pontok egy S'_m halmazt alkotnak, S_m és S'_m egyesítése azonban már S_{m+1} típusú halmazt alkot, hiszen S_m és S'_m minden pontjától egy újabb pont lesz egységnyi távolságra.

Nem minden egységvektorral való eltolás hoz létre megfelelő S_{m+1} halmazt. Az 1971/5.1 ábrának szabályos háromszögeből az \underline{e} -vel való eltolás megfelelő S_3



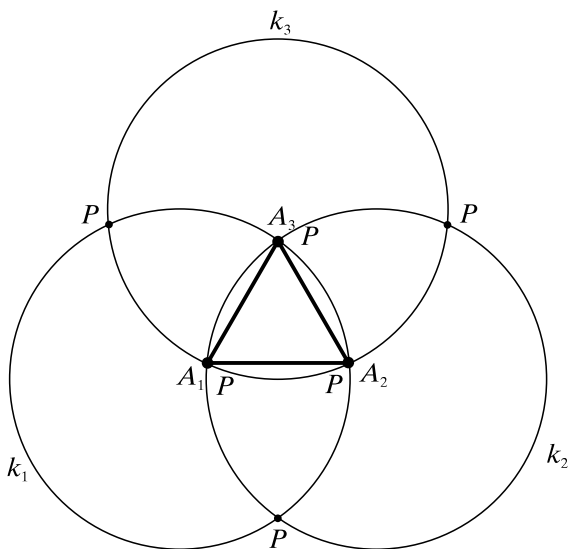
71/5.1. ábra

halmazt eredményezett, az e' -vel való eltolás azonban nem, mert pl. az A pont eltoltja, az A' , 4 ponttól is egységnyi távolságra van.

Vizsgáljuk meg, hogyan lehet ezeket a „rossz” eltolásokat kiküszöbölni. Rossz egy eltolás, ha S_m egy pontját S_m -nek egy másik pontjába viszi át, vagy pedig olyan pontba, amely S_{m+1} -nek egynél több pontjától van egységnyi távolságra.

Szerkesszünk S_m minden A_i pontja körül egy k_i egységkört. Jelölje k_i -nek a többi egységkörrel való metszéspontjait P_1, P_2, \dots, P_k ; ezek azok a pontok, amibe az A_i nem tolható el, az eltolás-egységvektorok közül kizárjuk ezért az $\overrightarrow{A_i P_1}, \overrightarrow{A_i P_2}, \dots, \overrightarrow{A_i P_k}$ vektorokat. Ha ezeket a kizárt vektorokat minden k_i körhöz meghatározzuk, véges sok vektort kapunk, ezek kivételével minden egységvektorral való eltolás megfelelő S_{m+1} halmazt állít elő. Az 1971/5.2. ábrán az A_1, A_2, A_3 pontokhoz P -vel jelöltük meg azokat a pontokat, amelyekhez tiltott egységvektorok vezetnek.

Ezzel megmutattuk, hogy tetszőleges S_1 halmazból kiindulva lépésenként minden m -hez szerkeszthetünk megfelelő S_m halmazt.



71/5.2. ábra

1971/6. Az n sorból és n oszlopból álló

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array}$$

négyzetes táblázat elemei nemnegatív egész számok. Ha a táblázat valamely eleme: $a_{ij} = 0$, akkor erre teljesül az

(1) $a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{in} + a_{1j} + a_{2j} + \dots + a_{nj} \geq n$
egyenlőtlenség.

Bizonyítsuk be, hogy e táblázat valamennyi elemének az összege nem kisebb

$$\frac{n^2}{2} - n \text{él.}$$

1. megoldás. (1) azt jelenti, hogy ha a táblázat egy helyén 0 áll, akkor a sorában és az oszlopában szereplő számok összege legalább n . Vegyük észre,

hogy ez a feltétel nem változik meg akkor, ha két sort egymással vagy két oszlopot egymással felcserélünk, vagy pedig a táblázatot 90° -kal elforgatjuk: sorokból oszlopok és oszlopokból sorok lesznek.

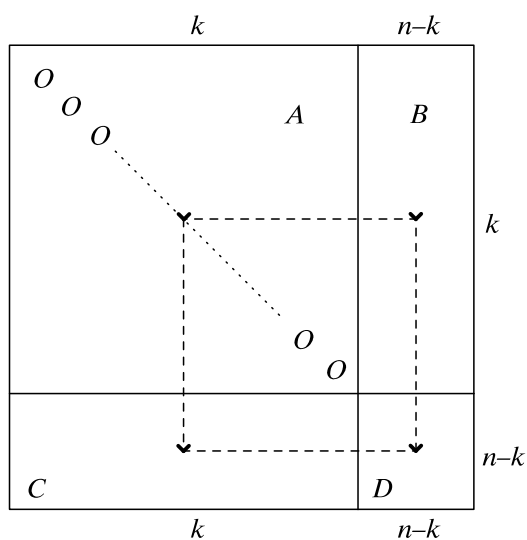
Adjuk össze minden sorban és minden oszlopban a számokat, az így kapott $2n$ összeg közül a legkisebbet (vagy azok egyikét) jelölje s . Feltehetjük, hogy ez az első sorhoz tartozik. Ha $s \geq n$, a táblázat elemeinek az összege legalább n^2 , ebben az esetben az állítás igaz.

Ha $s < n$, az első sorban legalább $n - s$ nulla van, rendezzük át a táblázatot úgy, hogy ezek a nullák a sor elején állnak. A nullával kezdődő oszlopban a számok összege legalább $n - s$, mert a sorban és oszlopban állók együttes összege legalább n .

Az első $n - s$ oszlopban (tehát a biztosan 0-val kezdődőkben) a számok összege így legalább $(n - s)(n - s) = (n - s)^2$. A többi s oszlopban viszont legalább s a számok összege, tehát összesen legalább s^2 , ezért a táblázat számainak összege legalább

$$(n - s)^2 + s^2 = \frac{n^2}{2} + \frac{(n - 2s)^2}{2} \geq \frac{n^2}{2},$$

ezt kellett bizonyítanunk.



71/6.1. ábra

2. megoldás. Rendezzük át a táblázatot sor-sor, ill. oszlop-oszlop cserével úgy, hogy a főátló bal felső részében nullák álljanak, még hozzá a lehető legtöbb. Tegyük fel, hogy a főátlóba rendezhető nullák maximális száma k . Táblázatunkat az 1971/6.1. ábrán látható módon négy részre osztjuk. A felső $k \times k$ -as A részben a főátlóban nullák vannak; A D rész nem tartalmazhat nullát, mert ellenkező esetben a sorok, ill. oszlopok átrendezhetők lennének úgy, hogy a főátlóba újabb nulla kerüljön.

A B és C részben nem helyezkedhet el egy-egy nulla a főátlóra szimmetrikusan, mert akkor két sor cseréjével a D -részbe újabb nulla kerülhetne.

Jelölje az egyes táblázatokban levő számok összegét $s(A)$, $s(B)$, $s(C)$, $s(D)$.

Mivel D -ben nincs nulla, $s(D) \geq (n - k)^2$. Az A -beli főátló nulláihoz tartozó sorok és oszlopok számait összeadva (1) miatt legalább kn -et kapunk. Ebben

az összegben A számai kétszer, B és C számai pedig egyszer szerepelnek, tehát

$$2s(A) + s(B) + s(C) \geq nk.$$

B és C számait úgy adjuk össze, hogy először B minden számát hozzáadjuk a vele főátlóra nézve tükrösen elhelyezkedő C -beli számhoz, így C minden helyén legalább 1 áll (nincsenek tükrösen elhelyezkedő nullák), tehát

$$s(B) + s(C) \geq k(n - k).$$

Ha ez utóbbi két egyenlőtlenség összegéhez hozzáadjuk a $2s(D) \geq 2(n - k)^2$ egyenlőtlenséget, kapjuk, hogy

$$2(s(A) + s(B) + s(C) + s(D)) \geq nk + k(n - k) + 2(n - k)^2 = n^2 + (n - k)^2,$$

Ebből

$$s(A) + s(B) + s(C) + s(D) \geq \frac{n^2}{2},$$

ami bizonyítandó volt.

Megjegyzés. A kapott eredmény nem javítható pl. abban az esetben, ha $n = 2k$, a táblázat főátlójában minden elem $\frac{n}{2}$, a többi elem pedig 0.

1972.

1972/1. Bizonyítsuk be, hogy bármely tíz — páronként különböző — kétjegyű természetes számból álló halmaznak mindig van két, közös elem nélküli részhalmaza, amelyben az elemek összege egyenlő egymással.

Megoldás. A tízelemű halmaznak $2^{10} - 2 = 1022$ valódi részhalmaza van. Kétjegyű számokból álló, legfeljebb 9 tagú összeg legkisebb lehetséges értéke 10, legnagyobb lehetséges értéke

$$91 + 92 + \dots + 99 = 855,$$

tehát összesen 846 érték lehetséges. Tíz természetes számból képzett egy-, kettő-, ... kilenctagú összegek között tehát biztosan van két egyenlő. Ha e két összeg tagjai között van mindkét összegben előforduló, akkor ezeket mindkét összegből elhagyva még egyenlő összegeket kapunk. Az nem lehetséges, hogy az egyikből bizonyos tagok elhagyásával 0 lesz, mert akkor a másikkal is ennek kell történnie, holott a két összeg nem áll azonos tagokból, így mindig található a tíz kétjegyű szám halmazában két közös elem nélküli részhalmaz, amelyben egyenlő a számok összege.

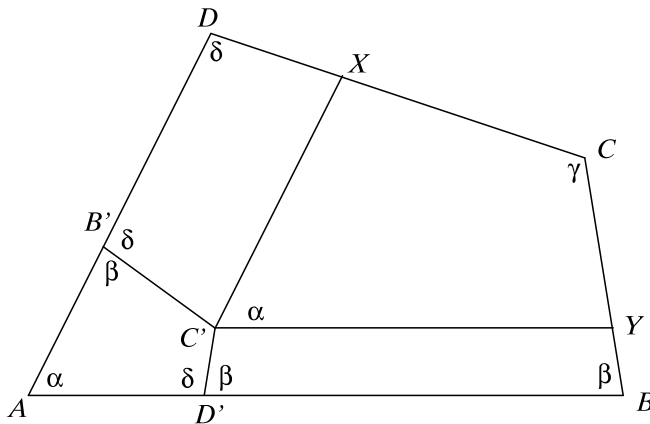
1972/2. Bizonyítsuk be, hogy minden húrnégyszög szétvágható n darab húrnégyszögre, ha n 4-nél nem kisebb természetes számot jelent.

Előzetes megjegyzések. Egy négyszög húrnégyszög volta csupán szögeitől függ, pontosabban: ha van két szemköztí szöge, amelynek összege 180° , akkor

a négyszög húrnégyszög. Ha tehát egy húrnégyszögon olyan átalakításokat végzünk, amely a szögeket nem változtatja meg, eredményül ismét húrnégyszöget kapunk.

Minden szimmetrikus trapéz húrnégyszög és alapjaival párhuzamos egyenesekkel tetszőleges számú húrnégyszögre vághatjuk szét. A feladat állítása tehát szimmetrikus trapézra nyilván igaz és így igaz téglalapra is, kiindulási négyszögeink közül ezért ezeket kizárjuk.

1. megoldás. Legyen az $ABCD$ húrnégyszög A -nál levő szöge hegyesszög, mivel $A + C = 180^\circ$, és a négyszög nem minden szöge derékszög, ilyennek kell lennie. Tükrözzük a négyszöget az A felezőjére, majd kicsinyítsük le akkorára, hogy teljesen az $ABCD$ belsejébe essék; legyen az így kapott négyszög $AB'C'D'$, s ez nyilván húrnégyszög (1972/2.1. ábra). A C' -ből AD -vel ill. AB -vel húzott párhuzamos a CD oldalt X -ben, ill. a BC oldalt Y -ban



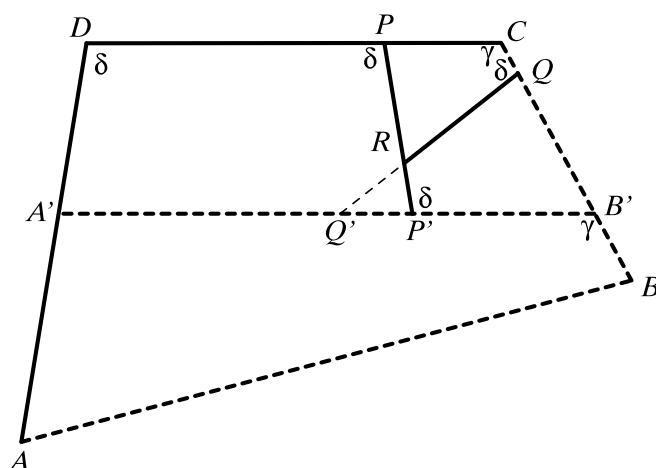
72/2.1. ábra

metszi. A $B'C'XD$ négyszög szimmetrikus trapéz, mert B' -nél és D -nél levő szögei egyenlők és ugyanilyen okból szimmetrikus trapéz a $D'C'YB$ trapéz is. $XC'YC$ húrnégyszög, mert szögei ugyanakkorák, mint $ABCD$ szögei.

A felhasznált kicsinyítés mértékét az szabja meg, hogy a C' -n át az AB -vel ill. AD -vel húzott párhuzamosok belső pontban messék a BC , ill. CD oldalakat; ez nyilván elérhető, hiszen kicsinyítéssel C' tetszőleges közel kerülhet az A száraihoz.

$ABCD$ -t ezzel négy húrnégyszögre vágtuk szét; valamelyik szimmetrikus trapéz felbontásával a darabok száma tetszőleges értéket elérhet.

2. megoldás. Az $ABCD$ húrnégyszög két tompaszöge nem lehet egymással szemben, mivel a szemkölti szögek összege 180° . Legyen $C = \gamma$ és $D = \delta$ két szomszédos tompaszög. A DC -vel párhuzamosan húzott $A'B'$ szelő levág



72/2.2. ábra

a húrnégyszögből egy $A'B'BA$ húrnégyszöget és egy $A'B'CD$ trapézt. Ha $\gamma = \delta$, $ABCD$ szimmetrikus trapéz lenne, ezért feltehetjük, hogy $\gamma > \delta$ (1972/2.2. ábra).

Válasszuk meg CD -n a P , $A'B'$ -n a P' pontot úgy, hogy $DPP' \sphericalangle = \delta$ legyen, majd CB' -n a Q , $A'B'$ -n a Q' pontot úgy, hogy $CQQ' \sphericalangle = \delta$ teljesüljön. A PP' és QQ' szakaszok, ill. egyeneseik eltolhatók úgy, hogy a trapéz egy belső R pontjában messék egymást. Ebben az esetben az $A'B'CD$ trapéz három húrnégyszögre esik szét: az $A'P'PD$ négyszög szimmetrikus trapéz, mert DP és $A'P'$ párhuzamosak, $A'DP \sphericalangle = DPP' \sphericalangle = \delta$; $QCPR$ húrnégyszög, mert a $CQR \sphericalangle = \delta$ egyenlő a szemközi külső szöggel; $B'P'RQ$ húrnégyszög, mert $B'P'R \sphericalangle = \delta$ (ti. a $DPP' \sphericalangle = \delta$ váltószöge) egyenlő a szemközi külső szöggel.

Az $ABCD$ húrnégyszöget így négy húrnégyszögre vágtuk szét; az $A'P'PD$ szimmetrikus trapéz tetszés szerinti számú húrnégyszögre vágásával $ABCD$ is tetszés szerinti $n \geq 4$ számú húrnégyszögre esik szét.

Megjegyzés. A feladatnak nagyszámú megoldása ismeretes; a bemutatott két megoldásnak az az előnye, hogy minden húrnégyszögre egyaránt alkalmazható, míg a legtöbb megoldás függ pl. attól, hogy a húrnégyszög köré írt körének a középpontja hol helyezkedik el.

1972/3. Legyenek m és n tetszőleges nemnegatív egész számok. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$$

egész szám. (Megállapodás szerint $0! = 1$).

1. megoldás. Vezessük be az

$$(1) \quad f(m, n) = \frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$$

jelölést. $f(m, 0)$ minden nemnegatív egész m -re egész szám, mivel

$$f(m, 0) = \frac{(2m)!}{(m!)^2} = \binom{2m}{m},$$

ami kombinatorikai jelentésénél fogva is egész szám.

Az $f(m, n)$ függvény kielégíti a következő egyenletet:

$$(2) \quad f(m+1, n) + f(m, n+1) = 4f(m, n).$$

Ennek bizonyítására végezzük el a bal oldalon az (1)-ből adódó helyettesítést:

$$\begin{aligned} f(m+1, n) + f(m, n+1) &= \frac{(2m+2)!(2n)!}{(m+1)!n!(m+n+1)!} + \frac{(2m)!(2n+2)!}{m!(n+1)!(m+n+1)!} = \\ &= \frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!} \cdot \frac{4m+2+4n+2}{m+n+1} = 4f(m, n), \end{aligned}$$

ezzel (2)-t igazoltuk. $n := n-1$ helyettesítéssel és átrendezéssel ebből kapjuk, hogy

$$(3) \quad f(m, n) = 4f(m, n-1) - f(m+1, n-1).$$

Ebből most már n szerinti teljes indukcióval következik, hogy $f(m, n)$ minden m, n esetén egész. Ti. láttuk, hogy $n=0$ esetén ez minden m -re igaz. Tegyük fel, hogy $f(m, n-1)$ is egész minden m -re, akkor (3)-ból következik, hogy $f(m, n)$ is egész; ezzel a feladat állítását bizonyítottuk.

2. megoldás. Megoldásunk alapgondolata a következő: megmutatjuk, hogy ha egy p prímszám osztója a nevezőnek, akkor osztója a számlálónak is, még-hozzá a számlálóban legalább akkora hatványon szerepel, mint a nevezőben. Ez éppen azt jelenti, hogy a nevező osztója a számlálónak, tehát a tört egész.

Ehhez először egy Legendre-től származó segédtelet bizonyítottunk be: $n!$ prímtenyezős felbontásában egy p prímszám kitevője:

$$\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \quad (p^k \leq n < p^{k+1}).$$

Ez azért igaz, mert az első n pozitív egész közül minden p -edik osztható p -vel, tehát $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ számú; p^2 -tel osztható $\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor$ számú, és így tovább: p^k -val $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$ számú, p tehát az $n!$ -ban $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$ -szor szerepel prímtenyezőnként, ezért ez p kitevője $n!$ prímtenyezős felbontásában. Nem követünk el hibát, ha a fenti összeget tetszőleges hosszán folytatjuk, hiszen ha $p^{k+1} > n$, akkor $\left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor = 0$, s ugyanez áll a következő tagokra is.

Második segédteételünk: Ha a és b tetszőleges nemnegatív számok,

$$(4) \quad [2a] + [2b] \geq [a] + [b] + [a + b].$$

Legyen ui. $a = [a] + \alpha$, $b = [b] + \beta$, ahol $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \beta < 1$. Ha $\alpha + \beta < 1$, akkor $[a + b] = [a] + [b]$ és

$$[2a] + [2b] = 2[a] + 2[b] + [2(\alpha + \beta)] \geq 2[a] + 2[b] = [a] + [b] + [a + b].$$

Ha $\alpha + \beta \geq 1$, akkor vagy $2\alpha \geq 1$, vagy $2\beta \geq 1$. Tegyük fel, hogy pl. $2\alpha \geq 1$. Ekkor

$$[a + b] = [a] + [b] + [\alpha + \beta] = [a] + [b] + 1$$

$$[2a] = 2[a] + [2\alpha] = 2[a] + 1.$$

Ebből

$$[2a] + [2b] \geq 2[a] + 1 + 2[b] = [a] + [b] + [a + b],$$

s ezzel segédteételünket bizonyítottuk.

A vizsgált tört számlálójában egy p prímszám kitevője:

$$A = \left[\frac{2m}{p} \right] + \left[\frac{2m}{p^2} \right] + \dots + \left[\frac{2m}{p^k} \right] + \left[\frac{2n}{p} \right] + \left[\frac{2n}{p^2} \right] + \dots + \left[\frac{2n}{p^k} \right];$$

k értékét most úgy választjuk, hogy p^{k+1} nagyobb legyen $2m$ -nél és $2n$ -nél is.

A tört nevezőjében p kitevője:

$$B = \left[\frac{m}{p} \right] + \left[\frac{m}{p^2} \right] + \dots + \left[\frac{m}{p^k} \right] + \left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \dots + \\ + \dots + \left[\frac{n}{p^k} \right] + \left[\frac{n+m}{p} \right] + \left[\frac{n+m}{p^2} \right] \dots + \left[\frac{n+m}{p^k} \right].$$

Állításunk bizonyításához azt kell megmutatnunk, hogy $A \geq B$, ami következik abból, hogy

$$\left[\frac{2m}{p^i} \right] + \left[\frac{2n}{p^i} \right] \geq \left[\frac{m}{p^i} \right] + \left[\frac{n}{p^i} \right] + \left[\frac{n+m}{p^i} \right], \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

ez viszont éppen a (4) alatti segédteétel állítása, s ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

Megjegyzések. 1. A feladat tétele E. Catalan belga matematikustól származik, aki ezt függvénytan vizsgálatok mellékeredményeként kapta.

2. A feladatnak számos irányú általánosítása ismeretes; pl. az USA Matematikai Olimpiáján szerepelt annak bizonyítása, hogy $\frac{(5m)!(5m)!}{m!n!(3m+n)!(3n+m)!}$ is egész.

1972/4. Adjuk meg az összes olyan, pozitív valós számokból álló $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ számötöst, amely kielégíti a következő egyenlőtlenség-rendszert:

$$(1) \quad (x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) \leq 0,$$

$$(2) \quad (x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) \leq 0,$$

$$(3) \quad (x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) \leq 0,$$

$$(4) \quad (x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) \leq 0,$$

$$(5) \quad (x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) \leq 0.$$

1. megoldás. Végezzük el a bal oldalon kijelölt szorzásokat, majd összegezzük az így kapott tagokat, összegüket jelölje B :

$$\begin{aligned} B = & x_1^2x_2^2 - x_2^2x_3x_5 - x_1^2x_3x_5 + x_3^2x_5^2 + \\ & + x_2^2x_3^2 - x_3^2x_4x_1 - x_2^2x_4x_1 + x_4^2x_1^2 + \\ & + x_3^2x_4^2 - x_4^2x_5x_2 - x_3^2x_5x_2 + x_5^2x_2^2 + \\ & + x_4^2x_5^2 - x_5^2x_1x_3 - x_4^2x_1x_3 + x_1^2x_3^2 + \\ & + x_5^2x_1^2 - x_1^2x_2x_4 - x_5^2x_2x_4 + x_2^2x_4^2. \end{aligned}$$

Ebből

$$\begin{aligned} 2B = & x_1^2 \left((x_2 - x_4)^2 + (x_3 - x_5)^2 \right) + \\ & + x_2^2 \left((x_3 - x_5)^2 + (x_4 - x_1)^2 \right) + \\ & + x_3^2 \left((x_4 - x_1)^2 + (x_5 - x_2)^2 \right) + \\ & + x_4^2 \left((x_5 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 \right) + \\ & + x_5^2 \left((x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 \right). \end{aligned}$$

Azt kaptuk tehát, hogy $2B$ öt nemnegatív kifejezés összege, ezért $B \geq 0$.

Viszont az eredeti egyenlőtlenségrendszer összegezéséből $B \leq 0$ következik, ami azt jelenti, hogy $B = 0$. Ez azonban csak úgy következhet be, ha a $2B$ -ben szereplő kifejezések mind nullák, azaz:

$$x_2 - x_4 = x_3 - x_5 = x_4 - x_1 = x_5 - x_2 = x_1 - x_3 = 0,$$

tehát $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$.

Az azonban közvetlenül látszik, hogy ha minden x_i egy tetszőleges c pozitív számmal egyenlő, akkor ez kielégíti az egyenlőtlenség-rendszert, tehát ennek megoldása minden egyenlő pozitív számokból álló számötös.

2. megoldás. Ha c tetszőleges pozitív szám, az

$$(6) \quad x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = c$$

értékrendszer nyilván megoldása az adott egyenlőtlenségeknek. Ha $(x_1, x_2, \dots, \dots, x_5)$ megoldás, akkor megoldás $\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_5}\right)$ is, és rendezettségük éppen ellentétes. Megmutatjuk, hogy az a feltevés, hogy (6)-on kívül még más megoldás is van, ellentmondásra vezet. Ha (6)-on kívül még van más megoldás is, akkor az

$$x_1 = x_3, \quad x_3 = x_5, \quad x_5 = x_2, \quad x_2 = x_4, \quad x_4 = x_1$$

egyenlőségek közül legalább az egyik nem teljesül. Mivel az x_i -k ciklikus cseréje az egyenlőtlenségrendszert önmagába viszi át, feltehetjük, hogy

$$(7) \quad x_3 < x_5.$$

További megfontolásainkat szétválasztjuk aszerint, hogy 1) $x_1 \leq x_2$, vagy 2) $x_1 > x_2$.

1). Legyen $x_1 \leq x_2$. Ebben az esetben $x_1^2 - x_3x_5 \leq x_2^2 - x_3x_5$, és ezért nem lehet, hogy $x_1^2 - x_3x_5 > 0$ legyen, mert ebből $x_2^2 - x_3x_5 > 0$ is következne, ami ellentmond (1)-nek; tehát $x_1^2 - x_3x_5 \leq 0$,

$$(8) \quad x_1 \leq \sqrt{x_3x_5} < x_5 \quad \text{azaz} \quad x_1 < x_5.$$

Nem lehet, hogy $x_2^2 - x_3x_5 < 0$ legyen, mert ebből $x_1^2 - x_3x_5 < 0$ következne, ami szintén ellentmond (1)-nek, tehát $x_2^2 - x_3x_5 \geq 0$, vagyis

$$(9) \quad x_2 \geq \sqrt{x_3x_5} > x_3, \quad \text{azaz} \quad x_3 < x_2.$$

(7)-ből és (8)-ból adódik, hogy

$$x_5^2 > x_1x_3, \quad \text{azaz} \quad x_5^2 - x_1x_3 > 0,$$

amiből (4) alapján $x_4^2 - x_1x_3 \leq 0$, azaz (8) felhasználásával:

$$(10) \quad x_4^2 \leq x_1x_3 < x_3x_5.$$

Másrészt (7)-ből és (9)-ből kapjuk, hogy $x_3^2 < x_2x_5$, ez viszont (3) és (9) alapján azt eredményezi, hogy

$$(11) \quad x_4^2 \geq x_5x_2 > x_5x_3.$$

Viszont (10) és (11) összevetéséből ellentmondásra jutunk.

2) Tegyük most fel, hogy $x_1 > x_2$. Ekkor $x_1^2 - x_3x_5 > x_2^2 - x_3x_5$; $x_2^2 - x_3x_5$ (1) miatt nem lehet pozitív, ezért $x_2^2 \leq x_3x_5$ és így

$$(12) \quad x_2 \leq \sqrt{x_3x_5} < x_5.$$

Ha $x_1^2 - x_3x_5 < 0$ lenne, akkor ebből $x_2^2 - x_3x_5 < 0$ következne, ami szintén ellentmond (1)-nek, tehát $x_1^2 \geq x_3x_5$,

$$(13) \quad x_1 \geq \sqrt{x_3x_5} > x_3.$$

(2) csak akkor állhat fenn, ha

$$x_4x_1 \leq \max(x_2^2, x_3^2).$$

Mivel azonban (12)-ből $x_2^2 \leq x_3x_5$ és (7)-ből $x_3^2 \leq x_3x_5$, ezért

$$(14) \quad x_4x_1 \leq x_3x_5.$$

Vizsgálat (5) csak akkor teljesülhet, ha

$$x_2x_4 \geq \min(x_5^2, x_1^2).$$

Minthogy (7)-ből $x_5^2 > x_5x_3$ és (13)-ból $x_1^2 \geq x_5x_3$,

$$(15) \quad x_2x_4 \geq x_5x_3.$$

(14) és (15) összehasonlításából $x_4x_1 \leq x_2x_4$, azaz $x_1 \leq x_2$ következik, ami ellentmond kiindulási feltételünknek. Ez viszont azt jelenti, hogy egyenlőtlenségrendszerünknek nincs (6)-tól különböző megoldása.

1972/5. Legyenek f és g minden valós számra értelmezett valós függvények, amelyek kielégítik az

$$(1) \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y)$$

egyenletet. Bizonyítsuk be, hogy ha $f(x)$ nem azonosan nulla, és minden x -re $|f(x)| \leq 1$, akkor egyszersmind minden y -ra $|g(y)| \leq 1$.

1. Megoldás. Mivel az összeg abszolút értéke nem nagyobb az összeadandók abszolút értékeinek az összegénél,

$$2|f(x)||g(y)| = |f(x+y) + f(x-y)| \leq |f(x-y)| + |f(x+y)|,$$

tehát feltétlenül teljesül a következő két egyenlőtlenségnek legalább az egyike:

$$|f(x)||g(y)| \leq |f(x+y)|, \quad |f(x)||g(y)| \leq |f(x-y)|.$$

Ez azt jelenti, hogy egy tetszőleges rögzített y -hoz és minden x -hez található olyan x_1 (azaz $x_1 = x+y$ vagy $x_1 = x-y$ alakban), hogy

$$(2) \quad |f(x)||g(y)| \leq |f(x_1)|.$$

Alkalmazzuk most (2)-t $x = x_0$ esetben, feltehetjük, hogy $f(x_0) \neq 0$:

$$|f(x_0)||g(y)| \leq |f(x_1)|.$$

Ezt a gondolatmenetet folytatva kapjuk, hogy van olyan x_0, x_1, \dots, x_k sorozat, amelyre

$$|f(x_{k-1})||g(y)| \leq |f(x_k)|$$

fenáll, tehát

$$|f(x_0)||g(y)|^k \leq |f(x_k)|, \quad k \text{ tetsz. poz. egész.}$$

Mivel $|f(x_k)| \leq 1$,

$$(3) \quad |g(y)|^k \leq \frac{1}{|f(x_0)|}.$$

Ha az állítással ellentétben lenne olyan y , amelyre $|g(y)| > 1$, akkor (3)-ból ellentmondásra jutunk, hiszen a jobb oldal egy rögzített szám, a bal oldal pedig k növekedésével bármilyen nagy értéket felvehet.

2. megoldás. Megoldásunkban felhasználjuk a valós számoknak azt az alapvető tulajdonságát, hogy a valós számok bármely korlátos halmazának van egy legkisebb felső korlátja, az ún. felső határa. A felső határ minden korlátos számhalmaz esetén egyértelműen meghatározott; nem kell hozzátartoznia a halmazhoz; pl. az 1-nél kisebb valós számok felső határa 1.

Mivel az $|f(x)|$ számok halmaza korlátos, létezik egy H felső határa, s mivel $f(x)$ nem azonosan nulla, ezért H is pozitív; tehát minden x -re $|f(x)| \leq H$.

Felhasználva az összeg abszolút értékére vonatkozó ismert összefüggést, (1)-ből adódik, hogy

$$2|f(x)||g(y)| \leq |f(x+y)| + |f(x-y)| \leq 2H,$$

tehát

$$(4) \quad |f(x)||g(y)| \leq H.$$

Ha most a bizonyítandóval ellentétben léteznék olyan y_0 , amelyre $|g(y_0)| > 1$ lenne, akkor (4)-ből minden x -re

$$|f(x)| \leq \frac{H}{|g(y_0)|} = H_0 < H$$

egyenlőtlenség is teljesülne, tehát az $|f(x)|$ -ek halmazának léteznék egy H -nál kisebb, H_0 felső korlátja, ami lehetetlen; ezért $|g(y)| \leq 1$ minden valós y -ra.

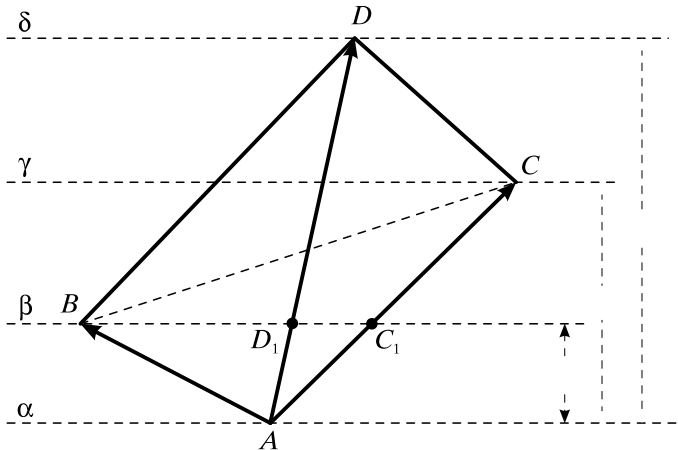
Megjegyzések. 1. Az $|f(x)| \leq 1$ feltételt csak annyiban használtuk ki, hogy feltételeztük $|f(x)|$ korlátos voltát.

2. Léteznek a függvényegyenletet kielégítő függvények, pl.

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \cos x.$$

1972/6. Adott négy különböző párhuzamos sík. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan szabályos tetraéder, amelynek az adott síkok mindegyikére esik csúcsa.

1. megoldás. Tegyük fel, hogy létezik a szerkesztendő $ABCD$ tetraéder és az A, B, C, D csúcsok rendre olyan párhuzamos $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ síkokon vannak, amelyek α egyik oldalán helyezkednek el és α -tól mért távolságaik rendre b, c és d . Az 1972/6.1. ábrán a síkokat úgy rajzoltuk meg, hogy merőlegesek legyenek



72/6.1. ábra

a rajz síkjára és így képeik párhuzamos egyenesek legyenek.

A β sík az AC élt C_1 -ben, az AD élt D_1 -ben metszi. Mivel α és β , α és γ távolságainak aránya $b : c$, ugyanez áll AC_1 és AC arányára:

$$(1) \quad \frac{AC}{AC_1} = \frac{c}{b},$$

ugyanezen az alapon

$$(2) \quad \frac{AD}{AD_1} = \frac{d}{b}.$$

Vegyük észre, hogy az A középpontú hasonlóság a szabályos tetraédert szabályos tetraéderbe viszi át, a csúcsokon átmenő párhuzamos síkok pedig olyan párhuzamos síkokra képződnek le, amelyeknek a távolságaránya nem változik meg.

E megfigyeléseink alapján a kívánt alakzat létezését a következő módon láthatjuk be: vegyünk egy tetszőleges $ABCD$ szabályos tetraédert, és tegyük fel hogy az adott $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ párhuzamos síkok az α sík egyik oldalán helyezkednek el és α -tól mért távolságaik rendre b, c, d . Jelöljük ki az AC , ill. AD éleken olyan C_1 , ill. D_1 pontot, amelyekre (1), ill. (2) teljesül. B, C_1, D_1 nincsenek egy egyenesen, ezért egy β' síkot határoznak meg. Alkalmazzunk most a tetraéderre

olyan A középpontú hasonlóságot, amely A és β' távolságát b nagyságúra változtatja, majd fektessünk A -n át egy β' -vel párhuzamos α síkot. A hasonlóság C és D távolságát α -tól c , ill. d távolságúvá alakítja át, ezért a B -n, C -n, ill. D -n át α -val párhuzamosan fektetett síkok α -tól mért távolsága éppen b , c , ill. d lesz; tehát a feladatban előírt alakzat valóban létezik.

2. megoldás. A verseny zsűrije elé került feladatjavaslat eredetileg a tetraéder élhosszáinak a meghatározását is kívánta volna, a síkok távolságainak az ismeretében. A most következő analitikus geometriai megoldásban ez az eredmény is szerepel.

Helyezzünk el egy $6s$ élhosszúságú szabályos tetraédert a koordinátarendszerben úgy, hogy a csúcsok koordinátái rendre $A(0, 0, 0)$, $B(3s, 3s\sqrt{3}, 0)$, $C(-3s, 3s\sqrt{3}, 0)$, $D(0, 2s\sqrt{3}, 2s\sqrt{6})$ legyenek, az élhosszt a számítások egyszerűsítése céljából választottuk $6s$ -nek; könnyen meggyőződhetünk róla, hogy az így adott négy pont valóban szabályos tetraédert határoz meg. Legyen egy A -ból induló \mathbf{n} egységvektor három koordinátája $\mathbf{n}(p, q, r)$, tehát

$$(3) \quad p^2 + q^2 + r^2 = 1.$$

Vezessük be az $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{d}$ jelölést. Legyen B , C , D merőleges vetülete \mathbf{n} egyenesén rendre B' , C' , D' . Ha \mathbf{n} -et és s -et sikerül úgy megválasztanunk, hogy $AB' = b$, $AC' = c$, $AD' = d$ legyen, ahol b , c , d előre adott pozitív távolságok, akkor A , B , C , D pontokból az \mathbf{n} -re merőlegesen állított α , β , γ , δ síkok α -tól mért távolságai az adott b , c , d értékek; tehát négy adott párhuzamos síkhoz elhelyezhető a kívánt módon egy $ABCD$ szabályos tetraéder.

Az élvektorok koordinátái:

$$\mathbf{b}(3s, 3s\sqrt{3}, 0) \quad \mathbf{c}(-3s, 3s\sqrt{3}, 0) \quad \mathbf{d}(0, 2s\sqrt{3}, 2s\sqrt{6}).$$

Mivel egy vektor egységvektorral való skaláris szorzata a vektornak az egységvektoron levő előjeles vetülehosszát adja meg,

$$\mathbf{n}\mathbf{b} = b, \quad \mathbf{n}\mathbf{c} = c, \quad \mathbf{n}\mathbf{d} = d,$$

vagy koordinátákkal:

$$\begin{aligned} 3sp + 3\sqrt{3}sq &= b, \\ -3sp + 3\sqrt{3}sq &= c, \\ sq + 2\sqrt{6}sr &= d. \end{aligned}$$

Ez az egyenletrendszer az sp , sq , sr ismeretlenekre egyszerűen megoldható, az eredmény:

$$(4) \quad sp = \frac{b-c}{6}, \quad sq = \frac{b+c}{6\sqrt{3}}, \quad sr = \frac{3d-b-c}{6\sqrt{6}}.$$

Ebből (3) figyelembe vételével kapjuk, hogy

$$(sp)^2 + (sq)^2 + (sr)^2 = s^2 = \frac{1}{36 \cdot 6} \left((\sqrt{6}(b-c))^2 + (\sqrt{2}(b+c))^2 + (3d-b-c)^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{36 \cdot 2} (b^2 + c^2 + d^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-b)^2).$$

Amiből a tetraéder élhossza:

$$(5) \quad 6s = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{b^2 + c^2 + d^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-b)^2}.$$

Az \mathbf{n} egységvektor koordinátái (4)-ből:

$$(6) \quad p = \frac{b-c}{6s}, \quad q = \frac{b+c}{6s\sqrt{3}}, \quad r = \frac{3d-b-c}{6s\sqrt{6}}.$$

Helyezzünk most el a koordinátarendszerben a megadott módon olyan $ABCD$ tetraédert, amelynek élhossza az (5) alatti $6s$ -sel egyenlő és vegyünk fel olyan \mathbf{n} egységvektort, amelynek koordinátái a (6) alatti (p, q, r) értékek. Az $ABCD$ tetraéder csúcsain átmenő és \mathbf{n} -re merőleges síkok éppen az adott távolságú $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ síkok lesznek, tehát a feladatban előírt alakzat valóban létezik.

Megjegyzés. Az 1. megoldás nem használta ki a tetraéder szabályos voltát, tehát ez tetszőleges tetraéderre alkalmazható.

1973.

1973/1. Legyen O az e egyenes valamely pontja, $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \dots, \overrightarrow{OP_n}$ olyan egységvektorok, amelyeknek P_i végpontjai mind ugyanabban — az e egyenest tartalmazó — síkban helyezkednek el, mégpedig e -nek ugyanazon a partján. Bizonyítsuk be, hogy ha n páratlan, akkor

$$|\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \dots + \overrightarrow{OP_n}| \geq 1,$$

ahol $|\overrightarrow{OM}|$ jelöli az \overrightarrow{OM} vektor hosszát.

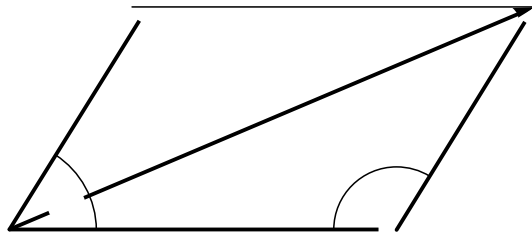
1. megoldás. Előrebocsájítjuk a következő észrevételt: ha az \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorok 90° -nál nem nagyobb szöget zárnak be, akkor

$$(1) \quad |\mathbf{a} + \mathbf{b}| \geq |\mathbf{a}| \quad \text{és} \quad |\mathbf{a} + \mathbf{b}| \geq |\mathbf{b}|.$$

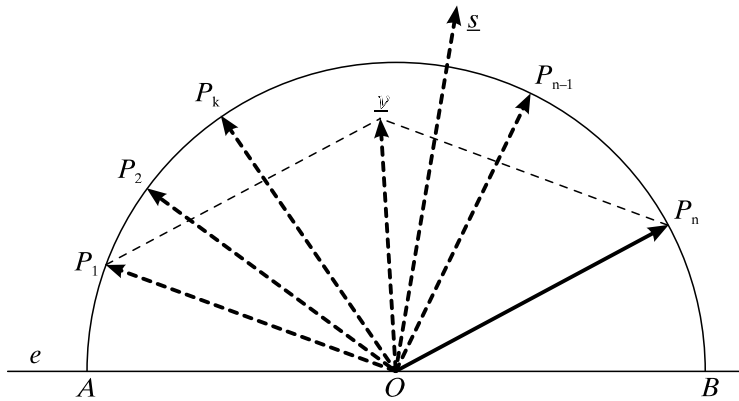
Ez egyszerűen abból következik, hogy $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}$ olyan háromszög oldalvektorai, amelyben az $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ -ral szemben 90° -nál nem kisebb szög van, tehát a háromszög legnagyobb szöge, ezért az oldalhosszak közül $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ a legnagyobb. (1) nyilván igaz akkor is, ha \mathbf{a} és \mathbf{b} között nullvektor is van vagy szögük 0° -os (1973/1.1. ábra).

Messe az O középpontú egységkör az e egyenest az A , ill. B pontokban; a P_i pontokat számozzuk úgy, hogy A -tól B felé haladva P_1, P_2, \dots, P_n sorrendben következzenek (1973/1.2. ábra).

A feladat állítását még kibővítjük azzal, hogy az O kezdőpontú összegvektor a P_1OP_n szögtartományban helyezkedik el. Teljes indukcióval bizonyítjuk: $n = 1$ -re az állítás nyilván igaz; tegyük fel, hogy igaz $n - 2$ vektor esetén is, azaz



73/1.1. ábra



73/1.2. ábra

az $\mathbf{s} = \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3} + \dots + \overrightarrow{OP_{n-1}}$ vektorra

$$|\mathbf{s}| = |\overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3} + \dots + \overrightarrow{OP_{n-1}}| \geq 1$$

és \mathbf{s} a P_2OP_{n-1} szögtartományban van. Az $\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_n} = \mathbf{v}$ a P_1OP_n szögtartomány szögfelező vektora és ezért \mathbf{s} hegyesszöget zár be vele, bevezető megjegyzésünk szerint tehát

$$|\mathbf{v} + \mathbf{s}| = |\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \dots + \overrightarrow{OP_n}| \geq |\mathbf{s}| \geq 1,$$

valamint az is látható, hogy $\mathbf{v} + \mathbf{s}$ a P_1OP_n szögtartományban van; ezt kellett bizonyítanunk.

2. megoldás. Az 1. megoldás pontszámozását használva jelölje az $\overrightarrow{OP_i}$ -t \mathbf{e}_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Legyen \mathbf{e} vektorok közül tetszőleges kettő \mathbf{e}_j és \mathbf{e}_i . $\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i$ felezi \mathbf{e}_j és \mathbf{e}_i szögét, ezért $\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i$ derékszögnél nem nagyobb szöget zár be minden olyan \mathbf{e}_s vektorral, amely az \mathbf{e}_j és az \mathbf{e}_i által meghatározott szögtartományban van, ezért $\mathbf{e}_s(\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i) \geq 0$. Ha $n = 2k - 1$, a „középső” \mathbf{e}_k benne van az $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_{2k-1})$, $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_{2k-2})$, \dots , $(\mathbf{e}_{k-1}, \mathbf{e}_{k+1})$ vektorpárok által meghatározott szögtartományokban. Ezt figyelembe véve:

$$\begin{aligned} & \mathbf{e}_k(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \dots + \mathbf{e}_{k-1} + \mathbf{e}_k + \mathbf{e}_{k+1} + \dots + \mathbf{e}_{2k-2} + \mathbf{e}_{2k-1}) = \\ (2) \quad & = \mathbf{e}_k(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_{2k-1}) + \mathbf{e}_k(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_{2k-2}) + \dots + \mathbf{e}_k(\mathbf{e}_{k-1} + \mathbf{e}_{k+1}) + \mathbf{e}_k^2 \geq \mathbf{e}_k^2 = 1, \end{aligned}$$

másrészt

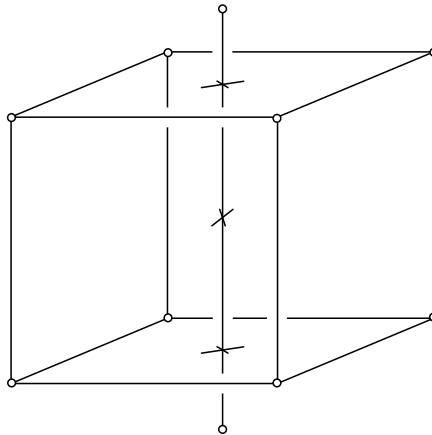
$$(3) \quad \mathbf{e}_k(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \dots + \mathbf{e}_n) \leq |\mathbf{e}_k| |\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \dots + \mathbf{e}_n| = |\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \dots + \mathbf{e}_n|.$$

(2) és (3) összevetéséből adódik, hogy

$$|\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \dots + \mathbf{e}_n| \geq 1.$$

1973/2. Állapítsuk meg, vajon van-e a háromdimenziós térben olyan M pontthalmaz, amely véges számú, nem ugyanabba a síkba eső pontot tartalmaz és a következő tulajdonságú: a halmaz bármely két különböző A és B pontjához mindig található a halmaznak két pontja: C és D , hogy az AB és CD egyenesek párhuzamosak és különbözők.

Megoldás. Egy kocka alaplappja legyen $ABCD$, fedőlapja $A'B'C'D'$, a kocka S középpontjának az alap- ill. fedőlapra vonatkozó tükörképe K , ill. K' . A kocka 8 csúcsa, hozzájuk véve K -t és K' -t, a feladatot kielégítő M pontthalmazt alkot (1973/2.1. ábra).



73/2.1. ábra

Válasszunk ki ugyanis tetszőlegesen két pontot; ha összekötő egyenesük nem megy át S -en, akkor párhuzamos S -re vonatkozó tükörképével, ez szintén két M -beli pontot köt össze, hiszen M tükrös S -re. Ha a két pont összekötő egyenese a kocka valamelyik testátlója, akkor a KA , KB , KC , KD szakaszok valamelyikével párhuzamos; s végül: ha a kiválasztott egyenes KK' , akkor ez párhuzamos pl. AA' -vel.

Megjegyzés. A feladatot számos, különböző módon szerkesztett M pontthalmaz is kielégíti. Példánk két irányban is általánosítható: kocka helyett tetszőleges

páros oldalszámú szabályos egyenes hasábot is vehetünk. Másik: példánk felfogható az $AA'K'C'CK$ és a $BB'K'D'DK$ középpontosan szimmetrikus hatszögek egyesítésének úgy, hogy a KK' átlójuk közös legyen. Ha ilyen egyesítést tetszőleges páros oldalszámú pl. szabályos sokszöggel hajtunk végre, a $2n$ oldalú sokszögek $4n - 2$ csúcsa szintén kielégíti a feladatot.

Megfelel M halmazként egy kocka 12 élfelező pontja is. Egy nem középpontosan szimmetrikus M halmaz: toljunk össze öt egybevágó kockát úgy, hogy középpontjaik egy egyenesen legyenek, és a szomszédosaknak legyen egy közös lapja. A 24 kockacsúcs, valamint az első, második és ötödik kocka középpontja egy 27 pontból álló megfelelő M halmazt alkot.

1973/3. Állapítsuk meg $a^2 + b^2$ lehető legkisebb értékét, ha a és b olyan valós számokat jelentenek, amelyekre az

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

egyenletnek van legalább egy valós gyöke.

1. megoldás. Az egyenletnek $x = 0$ nem gyöke, ezért x^2 -tel végigoszthatjuk az egyenletet, rendezve kapjuk, hogy

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + a \left(x + \frac{1}{x} \right) + b = 0.$$

Vezessük be az $x + \frac{1}{x} = z$ jelölést. Ezzel $x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$. Mivel egy pozitív számnak és reciprokának az összege legalább kettő,

$$(1) \quad z^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \geq 4.$$

A fenti helyettesítéseket elvégezve kapjuk:

$$(2) \quad \begin{aligned} z^2 + az + b - 2 &= 0, \\ 2 - z^2 &= az + b. \end{aligned}$$

Alkalmazzuk az egyenlet jobb oldalán a Cauchy-egyenlőtlenséget [22]:

$$(3) \quad (2 - z^2)^2 = (a \cdot z + b \cdot 1)^2 \leq (a^2 + b^2)(z^2 + 1),$$

ebből:

$$(4) \quad a^2 + b^2 \geq \frac{(2 - z^2)^2}{z^2 + 1} = (z^2 - 2) \left(1 - \frac{3}{z^2 + 1} \right).$$

Mivel a jobb oldali szorzat mindkét tényezője z^2 növekedésével növekszik, legkisebb értékét z^2 legkisebb értékénél, azaz (1) miatt $z^2 = 4$ -nél veszi fel:

$$a^2 + b^2 \geq \frac{4}{5},$$

ez azt jelenti, hogy $a^2 + b^2$ minimuma $\frac{4}{5}$; meg kell még mutatnunk, hogy ilyen feltétel mellett van valós gyöke a kiindulási egyenletnek.

Mivel ebben az esetben (3)-ban az egyenlőség teljesül, a Cauchy egyenlőtlenség szerint ez csak akkor lehetséges, ha

$$a : b = z : 1, \text{ azaz } a^2 = b^2 z^2,$$

tehát $a^2 = 4b^2$. Ebből

$$a^2 + b^2 = 5b^2 = \frac{4}{5}, \quad b^2 = \frac{4}{25}, \quad a^2 = \frac{16}{25}.$$

A lehetséges együttható értékek ezért:

$$a = \pm \frac{4}{5}, \quad b = \pm \frac{2}{5}.$$

Ha mindkét esetben a negatív értékeket választjuk, az

$$x^4 - \frac{4}{5}x^3 - \frac{2}{5}x^2 - \frac{4}{5}x + 1 = 0$$

egyenletnek $x = 1$ gyöke, ezért $a^2 + b^2$ minimuma az adott feltételek mellett valóban $\frac{4}{5}$.

2. megoldás. Tegyük fel, hogy az egyenletnek van egy pozitív x megoldása. Mivel minden valós c számra $c \geq -|c|$,

$$0 = x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 \geq x^4 - |a|x^3 - |b|x^2 - |a|x + 1,$$

ebből

$$(5) \quad x^4 + 1 \leq |a|x^3 + |b|x^2 + |a|x = |a|(x^3 + x) + \frac{|b|}{2}2x^2.$$

Vegyük most figyelembe, hogy $(x^2 - 1)^2 \geq 0$ miatt

$$2x^2 \leq x^4 + 1,$$

s mivel $x^3 - 1$ és $x - 1$ előjele egyenlő, $(x^3 - 1)(x - 1) \geq 0$, ebből

$$x^3 + x \leq x^4 + 1;$$

ezek alapján (5)-ből

$$x^4 + 1 \leq |a|(x^4 + 1) + \frac{|b|}{2}(x^4 + 1),$$

azaz

$$1 \leq |a| + \frac{|b|}{2},$$

$$|b| \geq 2 - 2|a| = 2(1 - |a|).$$

Ha $|a| \leq 1$,

$$a^2 + b^2 = |a|^2 + |b|^2 \geq |a|^2 + 4 + 4|a|^2 - 8|a| = 5 \left(|a| - \frac{4}{5} \right)^2 + \frac{4}{5},$$

tehát

$$(6) \quad a^2 + b^2 \geq \frac{4}{5}$$

és egyenlőség csak $|a| = \frac{4}{5}$ esetén állhat fenn.

Ha $|a| > 1$, akkor (6) nyilván fennáll.

Ha viszont az eredeti egyenletről azt tesszük fel, hogy van egy negatív x megoldása, akkor az

$$x^4 - ax^3 + bx^2 - ax + 1 = 0$$

egyenletnek a pozitív ($-x$) megoldása; erre alkalmazva gondolatmenetünket ismét a (6) alatti eredményre jutunk.

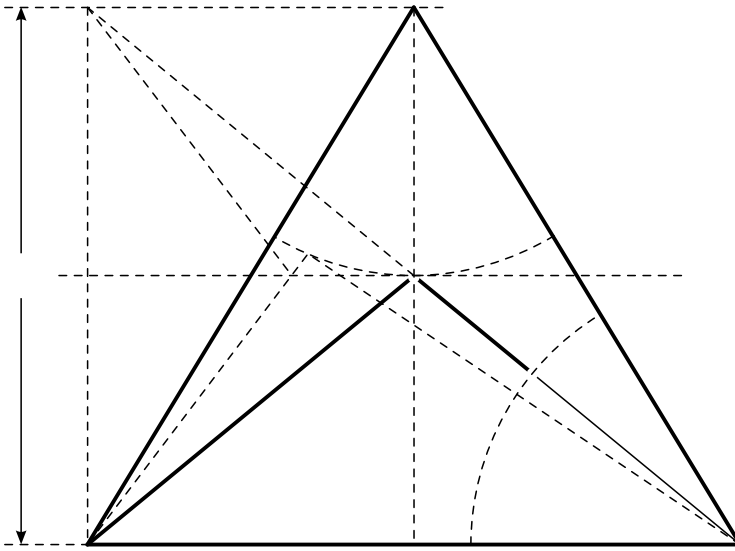
Mint az 1. megoldásban láttuk, a (6) feltétel mellett az együtthatók megválaszthatók úgy, hogy $a^2 + b^2 = \frac{4}{5}$ legyen és az egyenletnek létezzék valós megoldása, ezért $a^2 + b^2$ minimuma valóban $\frac{4}{5}$.

Megjegyzés. A feladat egyenlete ún. reciprok egyenlet; így nevezzük azokat a polinom-egyenleteket, amelyeknek x_0 -lal együtt $\frac{1}{x_0}$, illetve $-\frac{1}{x_0}$ is gyöke. Ezeknek az együtthatói szimmetrikusan, ill. antiszimmetrikusan helyezkednek el, azaz az n -edfokú polinomnak x^{n-k} és x^k együtthatói egyenlők, ill. ellentettek. Az 1. megoldásban alkalmazott helyettesítéssel még a kilencedfokú reciprok egyenletek is megoldhatók algebrai módszerekkel.

1973/4. Egy katonának meg kell győződnie arról, hogy valamely egyenlő oldalú háromszög alakú terep — határvonalát is beleértve — aknamentes-e. Észlelő berendezésének hatósugara egyenlő a háromszög magasságának a felével. A katona a háromszög egyik csúcspontjából indul el. Milyen utat kell választania, ha a terepet a legrövidebb úton haladva akarja átvizsgálni?

Megoldás. Legyen a szóban forgó ABC háromszög magassága m , és tegyük fel, hogy a katona az A csúcsból indul. Hogy a B , ill. C csúcsokat ellenőrizze, el kell jutnia a B , illetve C köré $\frac{m}{2}$ sugárral szerkesztett k_1 , illetve k_2 körív egy-egy pontjához. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy először a k_1 ív egy P pontját éri el, innen a k_2 -höz vezető legrövidebb út nyilván a PC egyenesen van, messe ez k_2 -t Q -ban. Az $AP + PC$ út $\frac{m}{2}$ -vel hosszabb az $AP + PQ$ útnál, ezért ez utóbbi is akkor a legrövidebb, ha $AP + PC$ is az (1973/4.1. ábra).

Feladatunk most tehát a k_1 íven annak a P_0 pontnak a kiválasztása, amelyre az $AP_0 + P_0C$ a lehető legrövidebb. Megmutatjuk, hogy ez arra a P_0 pontra teljesül, amely rajta van a B -hez tartozó magasságon. Húzzuk meg k_1 -nek P_0 pontbeli e érintőjét, és válasszunk k_1 -en egy P_0 -tól különböző tetszőleges P pontot. Megmutatjuk, hogy $AP + PC > AP_0 + P_0C$. Legyen A -nak e -re vonatkozó tükröképe A' . Mivel $AA' = m$, az A' , P_0 , C pontok egy egyenesre esnek, tehát $AP_0 + P_0C = A'C$. Az e egyenes elválasztja a k_1 ívet az A ponttól, ezért az AP szakasz egy M pontban metszi e -t. A tükrözés miatt $AM = A'M$

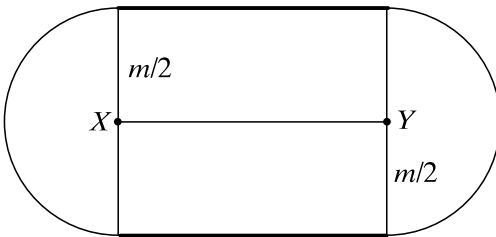


73/4.1. ábra

és így $AP + PC = A'M + MP + PC$; az $A'MPC$ töröttvonal viszont hosszabb $A'C$ -nél, ezért valóban

$$AP + PC < AP_0 + P_0C,$$

ami azt jelenti, hogy ha k_2 és P_0C metszéspontját Q_0 jelöli, akkor a keresett legrövidebb út: $A \rightarrow P_0 \rightarrow Q_0$.



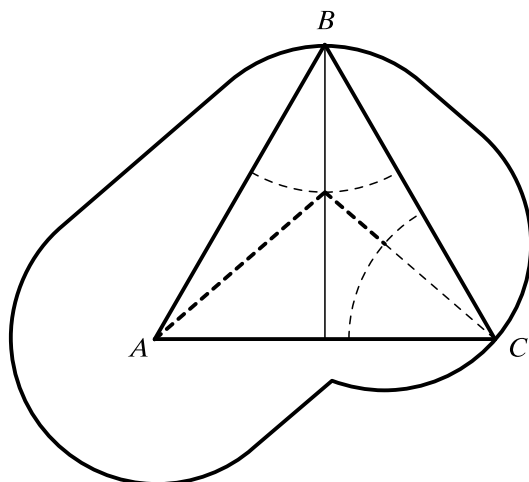
73/4.2. ábra

Erről az útról a teljes háromszög ellenőrizhető; vegyük ui. figyelembe, hogy egy XY szakasztól $\frac{m}{2}$ -nél nem nagyobb távolságra levő pontok az 1973/4.2. ábrán levő „stadion-idom”-ot töltik ki; az AP_0 és a P_0Q_0 szakaszokhoz tartozó stadion-

idomok együttesen lefedik az ABC háromszöget, tehát a feladat feltételét az $A \rightarrow P_0 \rightarrow Q_0$ út elégíti ki (1973/4.3. ábra).

1973/5. Az x valós változónak $f(x) = ax + b$ alakú, nem állandó f függvényeiből álló valamely nem üres G halmaz a következő tulajdonságokkal rendelkezik (a és b valós állandók):

Ha $f, g \in G$, akkor $g \circ f \in G$, ahol $g \circ f(x) = g(f(x))$.



73/4.3. ábra

Ha $f \in G$, akkor f inverze: $f^{-1} \in G$, ahol $f(x) = ax + b$ inverze:

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}.$$

Minden egyes f -hez, amelyre $f \in G$, létezik olyan valós x_f , amelyre

$$f(x_f) = x_f$$

teljesül.

Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan k szám, amelyre a G halmaz minden f függvénye esetén

$$f(k) = k$$

teljesül.

Megoldás. f nem állandó volta azt jelenti, hogy $a \neq 0$. A c) feltételből következik, hogy ha $f(x) = ax + b$ -nél $a = 1$, akkor $b = 0$, mert különben $x_f + b = x_f$ nem teljesülhetne. x_f -et az f fixpontjának mondjuk.

Mivel b) miatt $f^{-1}(x) = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}$ és a) miatt

$$f \circ f^{-1} = f \circ f^{-1}(x) = a \left(\frac{x}{a} - \frac{b}{a} \right) + b = x$$

is G -hez tartozik, vezessük be az $e(x) = x$ jelölést; s mivel G nem üres, így $e(x)$ is mindig eleme G -nek; $e(x)$ -nek minden valós x fixpontja.

Ha G csupán $e(x)$ -ből áll, a feladat állítása nyilvánvaló. Ha G -nek e -n kívül még van egy f eleme, akkor végtelen sok is van, hiszen $f, f \circ f, (f \circ f) \circ f, \dots$ mind különböző függvények, mert x együtthatói bennük a, a^2, a^3, \dots mind különbözők.

Legyen most $f(x) = ax + b$, $g(x) = cx + d$ ($a \neq 1$, $c \neq 1$) G -nek két tetszőleges eleme. Azt kell bizonyítanunk, hogy ha k az f -nek fixpontja, akkor fixpontja g -nek is. Ha k az f -nek fixpontja,

$$ak + b = k, \text{ azaz } k = \frac{b}{1-a}.$$

Mivel g fixpontja $\frac{d}{1-c}$, állításunk bizonyítására azt kell megmutatnunk, hogy

$$(1) \quad k = \frac{b}{1-a} = \frac{d}{1-c}.$$

A bizonyítás céljára képezzük most a $p = f \circ g$ és $q = g \circ f$ függvényeket:

$$p(x) = a(cx + d) + b = acx + ad + b$$

$$q(x) = c(ax + b) + d = acx + bc + d.$$

G -nek eleme $p \circ q^{-1}$ is:

$$p \circ q^{-1}(x) = ac \left(\frac{x}{ac} - \frac{bc + d}{ac} \right) + ad + b = x + (-bc - d + ad + b).$$

Bevezető megjegyzésünk szerint, mivel itt x együtthatója 1, $-bc - d + ad + b = 0$, azaz

$$b(1-c) = d(1-a)$$

$$\frac{b}{1-a} = \frac{d}{1-c}$$

tehát (1) valóban teljesül.

Megjegyzések. 1. Feladatunk jellegzetessége, hogy a G halmaz csoport [23], mivel az $e(x) = x$ elemre $f \circ e = e \circ f = f$, e a csoport egységeleme; G csoport voltához még azt kell belátnunk, hogy e csoportművelet asszociatív, ha tehát $f, g, h \in G$, akkor $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, ami a bal, ill. jobboldali függvények tényleges előállításával egyszerűen igazolhatók.

G neve: az egyenesen értelmezett lineáris leképezések egy csoportja. A bizonyítottakból következik, hogy G minden $f(x) = ax + b$ elemére $f(k) = k$, azaz $ak + b = k$, $b = k(1 - a)$; ezért a G minden eleme

$$(2) \quad f(x) = ax + k(1 - a)$$

alakú.

2. A feladat geometriai indíttatására mutatnak a következő kapcsolatok: (2) alapján következik, hogy f az egyenes k középpontú a arányú hasonlósági transzformációja. Legyen ugyanis x a valós száme egyenes tetszőleges pontja, ennek k -tól mért (előjeles) távolsága, $x - k$, az $f(x)$ pont k -tól mért (előjeles) távolsága $f(x) - k$, (2)-t más alakban felírva kapjuk, hogy

$$\frac{f(x) - k}{x - k} = a,$$

ami éppen azt jelenti, hogy az $f(x)$ és x pontok k -tól mért távolságaránya egy állandó a értékkel egyenlő. A c) kikötés geometriai jelentése az, hogy G elemei

között nincs eltolás, hiszen G minden elemének van fixpontja. A feladat állítása egy jól ismert geometriai tétel: ha az egyenest önmagára leképező középpontos hasonlóságok egy halmaza olyan csoportot alkot, amely nem tartalmaz eltolást, akkor a csoport elemei egyetlen rögzített középpontú hasonlóságok. (A tétel egyébként két és három dimenzióban is igaz).

A tétel bizonyítása is geometriai sugallatú: lényege a következő: valamilyen alakzatra egy a arányú, majd egy c arányú „nagyítást” alkalmazunk, majd egy $\frac{1}{a}$ arányú és egy $\frac{1}{c}$ arányú „kicsinyítést”; az alakzat nagysága ezek következtében nem változott, tehát a végeredmény az eredetivel egyállású és vele egybevágó alakzat, eltolás azonban nem lehet, ezért a négy transzformáció egymásutánja azonosságot eredményez.

2. Egy másik geometriai megfeleltetés: G olyan $y = ax + b$ egyenletű egyenesek halmaza, amelyek egyike sem párhuzamos az x tengellyel és a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:

a) Ha az $y = ax + b$ és $y = cx + d$ egyenesek G -hez tartoznak, akkor az $y = acx + (ad + b)$ egyenes is G -hez tartozik.

b) Ha egy egyenes G -hez tartozik, akkor ugyanez igaz az $y = x$ egyenesre vonatkozó tükörképére is.

c) G minden egyenese metszi az $y = x$ egyenest. Következmény: G minden egyenese átmegy egy $K(k, k)$ ponton.

1973/6. Legyenek a_1, a_2, \dots, a_n adott pozitív számok, q pedig a $0 < q < 1$ kettős egyenlőtlenségnek eleget tevő valós szám. Adjunk meg n olyan valós számot: b_1 -et, b_2 -t ..., b_n -et, amelyek egyidejűleg kielégítik a következő feltételeket:

$$a_k < b_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n);$$

$$q < \frac{b_{k+1}}{b_k} < \frac{1}{q}, \quad (k = 1, 2, \dots, n-1);$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n < \frac{1+q}{1-q} (a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

Megoldás. A c) feltétel sugallja a b_k számok következő előállítását:

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 + a_2 q + a_3 q^2 + \dots + a_n q^{n-1} \\ b_2 &= a_1 q + a_2 + a_3 q + \dots + a_n q^{n-2} \\ b_3 &= a_1 q^2 + a_2 q + a_3 + \dots + a_n q^{n-3} \\ &\dots\dots\dots \\ b_n &= a_1 q^{n-1} + a_2 q^{n-2} + a_3 q^{n-3} + \dots + a_n. \end{aligned} \quad (1)$$

Általában tehát

$$(2) \quad b_k = \sum_{i=1}^{k-1} a_i q^{k-i} + a_k + \sum_{i=k+1}^n a_i q^{i-k}.$$

Megmutatjuk, hogy az (1) alatti előállítás kielégíti az a)–c) feltételeket.

a) nyilván teljesül, hiszen (1) jobb oldalán a_k mellett még pozitív összeadandók állanak.

b) teljesülésének vizsgálatához vegyük észre, hogy

$$b_{k+1} = \sum_{i=1}^k a_i q^{k+1-i} + \sum_{i=k+1}^n a_i q^{i-k-1} = q \sum_{i=1}^k a_i q^{k-i} + \frac{1}{q} \sum_{i=k+1}^n a_i q^{i-k}.$$

Mivel $0 < q < 1$ és $\frac{1}{q} > 1$,

$$b_{k+1} < \frac{1}{q} \sum_{i=1}^k a_i q^{k-i} + \frac{1}{q} \sum_{i=k+1}^n a_i q^{i-k} = \frac{1}{q} b_k,$$

$$b_{k+1} > q \sum_{i=1}^k a_i q^{k-i} + q \sum_{i=k+1}^n a_i q^{i-k} = q b_k,$$

amivel a b) alatti egyenlőtlenség mindkét oldalát igazoltuk.

c) bizonyítására adjuk össze oszloponként az (1)-ben szereplő kifejezéseket; az i -edik oszlop összege:

$$\begin{aligned} & a_i (q^{i-1} + q^{i-2} + \dots + q + 1) + a_i (q + q^2 + \dots + q^{n-i}) = \\ & = a_i \left(\frac{1-q^i}{1-q} + q \frac{1-q^{n-i}}{1-q} \right) = a_i \frac{1+q-q^i-q^{n-i+1}}{1-q} < a_i \frac{1+q}{1-q}. \end{aligned}$$

Az n oszlopösszeget összegezve kapjuk, hogy

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n < (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \frac{1+q}{1-q},$$

amivel a c) teljesülését is igazoltuk.

Megjegyzés. Bizonyításunkból látszik, hogy az a_i számok nem határozzák meg egyértelműen a b_i számokat. Megmutatható, hogy végtelen sok olyan b_i szám n -es van, amely kielégíti a feladat feltételeit.

1974.

1974/1. Három játékos: A , B és C a következő játékot játssza: Három kártya mindegyikére egy-egy egész szám van írva, erre a három számra (p , q és r) $0 < p < q < r$ teljesül. A kártyákat összekeverik, majd szétosztják úgy, hogy mindegyik játékos kapjon egyet. Ezután a játékosoknak annyi golyót adnak, amennyit kártyájuk mutat. Utána összeszedik a kártyákat, a kapott golyók azonban a játékosoknál maradnak.

Ezt a játékot (a kártyák összekeverése és szétosztása, a golyók odaadása, a kártyák összeszedése) legalább kétszer játsszák végig. A utolsó játszma esetén A -nak 20, B -nek 10, míg C -nek 9 golyója van. Ezenkívül B azt is tudja, hogy ő az utolsó alkalommal r darab golyót kapott.

Kinek jutott először q darab golyó?

Megoldás. Tegyük fel, hogy összesen n játékot játszottak ($n \geq 2$). Mindegyik osztásnál $p+q+r$ golyót adtak ki, tehát a kiosztott golyók száma $n(p+q+r)$, ez a feladat szerint $20+10+9=39$ -cel egyenlő:

$$(1) \quad n(p+q+r) = 3 \cdot 13.$$

Mivel $p \geq 1$, $q \geq 2$, $r \geq 3$ és $n \geq 2$, $p+q+r \geq 6$, ezért (1) csak $n=3$, $p+q+r=13$ értékekre teljesülhet. r értéke nem lehet kisebb 7-nél, mert a 3 játszmában egy játékos legfeljebb $3r$ golyót szerezhethet, A -nak viszont 20 golyója van, ezért $r \geq 7$. Mivel $p+q+r > 10$ és B a 10 golyóját úgy szedte össze, hogy a harmadik játékban r golyót kapott, B golyóinak az eloszlása nem lehet $q+q+r$, $p+q+r$, és nem kaphatott kétszer r golyót, B golyóinak a száma szükségképpen $p+p+r$, tehát

$$2p+r=10,$$

ebből $p \geq 1$, $r \geq 7$ miatt $p=1$, $r=8$ következik és így $q=4$.

C -nek összesen 9 golyója volt, ezért egyetlen játszmában sem nyerhetett $r=8$ golyót, hanem csak 1-et vagy 4-et. Mivel B az első játszmában az 1-es lapot kapta, C -nek a 4-es lapot kellett kapnia: az első fordulóban tehát C kapta a $q=4$ golyót.

Ennek alapján összeállíthatjuk a játék menetét leíró táblázatot:

	A	B	C
	golyóinak a száma		
I. játék	8	1	4
II. játék	8	1	4
III. játék	4	8	1
Összesen	20	10	9

Megjegyzés. A megoldások értékelésénél felmerült az a kérdés, hogy a megoldáshoz szükséges-e a fenti táblázat összeállítása, vagy pedig a lejátszhatóság

eleve feltétel volt (ezt az utóbbi álláspontot fogadták el). Ha ui. a játék lejátszhatóságát (egzisztenciáját) nem tételezzük fel, hamis eredményre is juthatunk; pl. ha kiindulási adatainkat 18, 8, ill. 7 golyóra módosítjuk, gondolatmenetünk végigvihető és ebben az esetben is C kapja először a q golyót; a táblázat azonban nem állítható össze, mert a játék nem létezik.

1974/2. Jelölje A, B, C rendre egy háromszög csúcsait; α, β és γ pedig ugyanebben a sorrendben a csúcsoknál levő szögek mérőszámát.

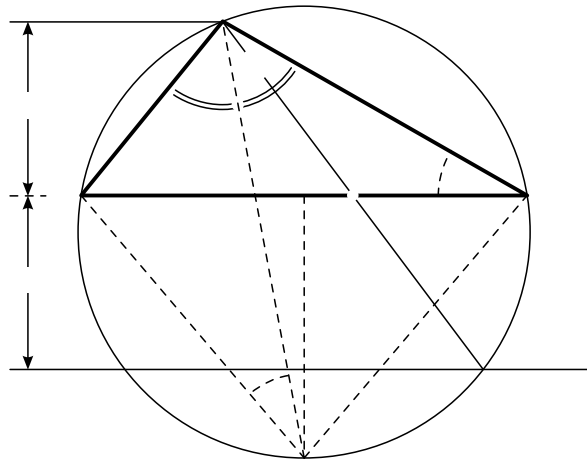
Bizonyítsuk be, hogy akkor és csakis akkor található az AB szakaszon olyan D pont, amelyre CD hossza az AD és DB szakaszok hosszának a mértani közepe, ha

$$(1) \quad \sin \alpha \cdot \sin \beta \leq \sin^2 \frac{\gamma}{2}.$$

1. megoldás. Feladatunk tehát annak a bizonyítása, hogy az (1) egyenlőtlenség akkor és csakis akkor teljesül, ha AB -n van olyan D pont, amelyre

$$(2) \quad AD \cdot DB = CD^2.$$

Tegyük fel, hogy létezik ilyen D pont és messe a CD egyenes ABC körülírt körét az E pontban (1974/2.1. ábra). Mivel a kör belső pontján átmenő



74/2.1. ábra

húrok metszeteinek a szorzata egyenlő, $AD \cdot DB = CD \cdot DE$, ebből (2) alapján $CD = DE$ következik, vagyis az E pont AB -től mért távolsága a C -hez tartozó magassággal egyenlő. A szóban forgó D pont ezért akkor és csakis akkor létezik, ha az AB -vel m_c távolságra húzott e párhuzamos metszi a körülírt kört. Ez akkor következik be, ha a C -t nem tartalmazó AB ív F felezőpontja AB -től m_c -nél nem kisebb távolságra van, ami azzal egyenértékű, hogy az AFB háromszög területe legalább akkora, mint ABC területe: $t_{AFB} \geq t_{ABC}$.

Legyen az ABC köré írt kör átmérője 1, akkor $BC = \sin \alpha$, $AC = \sin \beta$ és így

$$t_{ABC} = \frac{1}{2} \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

Az AFB egyenlő szárú háromszögben $\angle AFB = 180^\circ - \gamma$, hegyesszögei $\frac{\gamma}{2}$ -vel egyenlők, ezért területe

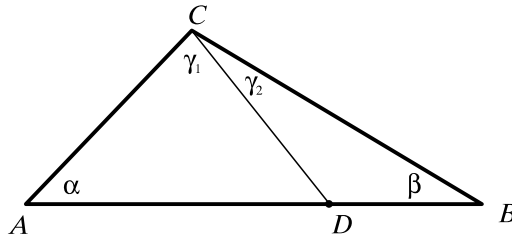
$$t_{AFB} = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\gamma}{2} \sin \gamma,$$

a területek közötti egyenlőtlenség tehát az

$$\frac{1}{2} \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \leq \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\gamma}{2} \sin \gamma$$

egyenlőtlenséggel, azaz (1)-gyel egyenértékű. Ezzel (1) és (2) egyenértékűségét is bizonyítottuk.

2. megoldás. Tételezzük fel ismét a D pont létezését és ossza fel a CD egyenes a γ szöget γ_1, γ_2 nagyságú részekre (1974/2.2. ábra). Az ADC , illetve BDC háromszögekre alkalmazzuk a szinusztételt:



74/2.2. ábra

$$(3) \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma_1} = \frac{CD}{AD}, \quad \frac{\sin \beta}{\sin \gamma_2} = \frac{CD}{DB}.$$

Szorozzuk össze e két egyenlőtlenséget és vegyük figyelembe (2)-t:

$$(4) \quad \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin \gamma_1 \sin \gamma_2} = \frac{CD^2}{AD \cdot DB} = 1,$$

$$(5) \quad \sin \alpha \sin \beta = \sin \gamma_1 \sin \gamma_2.$$

Mivel $2 \sin \gamma_1 \sin \gamma_2 = \cos(\gamma_1 - \gamma_2) - \cos(\gamma_1 + \gamma_2)$ és $\cos \gamma = 1 - 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}$,

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\gamma_1 - \gamma_2) - \cos \gamma = 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} - (1 - \cos(\gamma_1 - \gamma_2)) \leq 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2},$$

s ezzel megmutattuk, hogy (2)-ből következik (1).

Ha viszont (1) fennáll, $2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} = 1 - \cos \gamma$ miatt

$$2 \sin \alpha \sin \beta \leq 1 - \cos \gamma, \quad 2 \sin \alpha \sin \beta + \cos \gamma \leq 1.$$

Minthogy $0 < 2 \sin \alpha \sin \beta$ és $-1 < \cos \gamma$,

$$-1 < 2 \sin \alpha \sin \beta + \cos \gamma \leq 1.$$

Ez azt jelenti, hogy létezik olyan φ szög, amelyre $0 \leq \varphi < \pi$ és

$$(6) \quad \cos \varphi = 2 \sin \alpha \sin \beta + \cos \gamma,$$

teljesül, s mivel $\cos \varphi > \cos \gamma$, $0 \leq \varphi < \gamma$, vezessük be a $\gamma_1 = \frac{\gamma + \varphi}{2}$, $\gamma_2 = \frac{\gamma - \varphi}{2}$ jelöléseket, (6)-ból

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos \varphi - \cos \gamma = 2 \sin \frac{\gamma + \varphi}{2} \sin \frac{\gamma - \varphi}{2} = 2 \sin \gamma_1 \sin \gamma_2.$$

Ez azt jelenti, hogy a γ szöget γ_1 és γ_2 részekre vágva (5) teljesül, ebből viszont (3) alapján (4) és így (2) is következik, (1)-nek ezért (2) következménye, s ezzel bizonyításunkat befejeztük.

3. megoldás. Megoldásunk lényege: megmutatjuk, hogy mind (1), mind pedig (2) egyenértékűek a háromszög oldalai közötti

$$a + b \leq c\sqrt{2}$$

egyenlőtlenség teljesülésével.

A C -ből induló szögfelező a körülírt kört F -ben, az AB oldalt G -ben metszi. Az 1. megoldásban az 1974/2.1. ábrához fűzött megjegyzésünk szerint a feladatot kielégítő D pont akkor és csakis akkor létezik, ha CF metszi az e egyenest, azaz $GF \geq CG$.

A CGB és CAF háromszögek hasonlóak, mert két-két szögük egyenlő (ill. azonos) ívekhez tartozó kerületi szögek; az oldalarányok egyenlőségéből

$$\frac{a}{CG} = \frac{CF}{b} = \frac{CG + GF}{b} \quad \text{azaz} \quad CG^2 = ab - CG \cdot GF$$

s mivel $GF \geq CG$, és a húrmetszetek szorzatának egyenlősége miatt $CG \cdot GF = AG \cdot GB$,

$$AG \cdot GB = CG \cdot GF \geq CG^2 = ab - AG \cdot GB,$$

$$(7) \quad 2AG \cdot GB \geq ab.$$

Vegyük még figyelembe, hogy a CG szögfelező a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja, s ezért

$$AG = \frac{bc}{a+b}, \quad GB = \frac{ac}{a+b},$$

helyettesítsük ezt (7)-be:

$$\frac{2abc^2}{(a+b)^2} \geq ab,$$

amiből

$$(8) \quad a + b \leq c\sqrt{2}$$

következik; s mivel megfontolásaink megfordíthatók, (8) egyenértékű (2)-vel.

Megmutatjuk viszont, hogy (1) és (8) is egyenértékűek. Induljunk ki (1)-ből; válasszuk a körülírt kör átmérőjét 1-nek és vegyük figyelembe, hogy a koszinusztételből $2ab(1 + \cos \gamma) = (a + b)^2 - c^2$ következik:

$$2 \sin \alpha \sin \beta \leq 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{4 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \cos^2 \frac{\gamma}{2}}{2 \cos^2 \frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin^2 \gamma}{2 \cos^2 \frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin^2 \gamma}{1 + \cos \gamma}.$$

Ebből $a = \sin \alpha$, $b = \sin \beta$, $c = \sin \gamma$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$2ab \leq \frac{c^2}{1 + \cos \gamma}, \quad 2ab(1 + \cos \gamma) = (a + b)^2 - c^2 \leq c^2,$$

ebből viszont közvetlenül megkaphatjuk (8)-at; gondolatmenetünk most is megfordítható, ezért (1) és (8) egyenértékűek.

Megjegyzés. Utolsó eredményünk lényegében azt jelenti, hogy a D pont akkor létezik, ha $a + b$ „nem nagyon” tér el c -től, hiszen $c < a + b \leq c\sqrt{2} \approx 1,41c$. Ez biztosan teljesül, ha a háromszögben γ nem hegyesszög, hiszen ekkor a koszinusztételből $c^2 \geq a^2 + b^2$, és így

$$2c^2 \geq 2(a^2 + b^2) = (a + b)^2 + (a - b)^2 \geq (a + b)^2.$$

1974/3. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} \cdot 2^{3k}$$

n semmilyen természetes egész értéke esetén sem osztható 5-tel.

1. megoldás. A feladatban szereplő összeg a binomiális tételre emlékeztet, ezért ennek a binomiális tétel segítségével történő előállítását kíséreljük meg. E tétel szerint, mivel $\sqrt{2^3} = \sqrt{8}$,

$$\begin{aligned} (\sqrt{8} + 1)^{2n+1} &= (2\sqrt{2} + 1)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (\sqrt{8})^k = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} \cdot 8^k + \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} \cdot 8^k \cdot \sqrt{8}. \end{aligned}$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$a_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} \cdot 8^k, \quad b_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} \cdot 8^k,$$

s így b_n éppen a vizsgálandó összeget jelenti. Ezzel

$$(1) \quad (\sqrt{8} + 1)^{2n+1} = a_n + b_n \sqrt{8}.$$

Az előző gondolatmenetet megismételve kapjuk, hogy

$$(2) \quad (\sqrt{8} - 1)^{2n+1} = -a_n + b_n \sqrt{8}.$$

Ez utóbbi két egyenlőség szorzatából kapjuk, hogy

$$7^{2n+1} = 8b_n^2 - a_n^2,$$

$$(3) \quad 7 \cdot 49^n + a_n^2 = 8b_n^2.$$

Mivel a_n és b_n egészek, ha b_n osztható lenne 5-tel, (3) jobb oldalán 0-ra végződő szám állana. 49^n utolsó jegye 9 vagy 1, $7 \cdot 49^n$ -é ezért 3 vagy 7. Mivel a_n^2 lehetséges végződése 0, 1, 4, 5, 6, 9, a bal oldali szám nem végződhet 0-ra, tehát b_n nem lehet osztható 5-tel.

2. megoldás. Az (1) alatti formulából indulunk ki:

$$\begin{aligned} a_{n+1} + b_{n+1} \sqrt{8} &= (\sqrt{8} + 1)^{2(n+1)+1} = (\sqrt{8} + 1)^{2n+1} (\sqrt{8} + 1)^2 = \\ &= (a_n + b_n \sqrt{8})(9 + 2\sqrt{8}) = (9a_n + 16b_n) + (2a_n + 9b_n)\sqrt{8}. \end{aligned}$$

Mivel a zárójeleken belül egész számok vannak, ebből következik, hogy

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 9a_n + 16b_n \\ b_{n+1} &= 2a_n + 9b_n. \end{aligned}$$

Ezeket az összefüggéseinket a következőkben csak az 5-tel való oszthatóság szempontjából vizsgáljuk, ezért (mod 5) kongruenciákként írjuk fel:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\equiv 4a_n + b_n, \\ (4) \quad b_{n+1} &\equiv 2a_n + 4b_n. \end{aligned}$$

Ezt megismételve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} a_{n+2} &\equiv 4a_{n+1} + b_{n+1} \equiv 3a_n + 3b_n, \\ b_{n+2} &\equiv 2a_{n+1} + 4b_{n+1} \equiv a_n + 3b_n. \end{aligned}$$

Végül

$$b_{n+3} \equiv 2a_{n+2} + 4b_{n+2} \equiv 3b_n$$

Ez az eredmény azt jelenti, hogy a b_n -ek sorozatában egy elem akkor és csakis akkor osztható 5-tel, ha az előtte levő harmadik is osztható. Viszont (1)-ből következik, hogy $a_0 = b_0 = 1$ és (4)-ből, hogy $a_1 \equiv 0$, $b_1 \equiv 1$; $b_2 \equiv 4$, tehát b_0 , b_1 , b_2 egyike sem osztható 5-tel, ezért a b_n -ek között nincs 5-tel osztható.

1974/4. Egy 8×8 mezőből álló sakktáblát úgy vágunk szét p darab téglalapra, hogy egyetlen mezőt sem vágunk ketté. Minden ilyen szétvágásnak ki kell elégténie a következő feltételeket:

Minden egyes téglalapnak ugyanannyi fehér mezőt kell tartalmaznia, mint feketét.

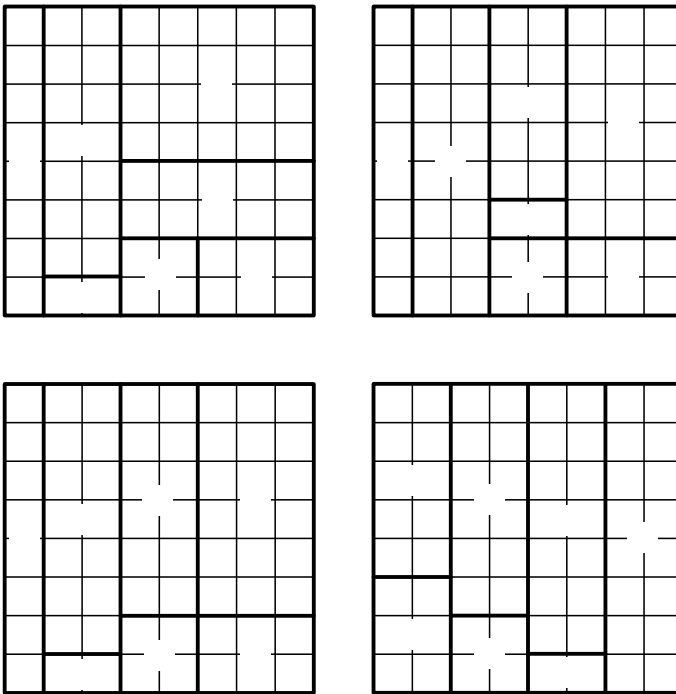
Ha a_i jelöli az i -edik téglalapban levő fehér mezők számát, akkor fenn kell állnia az $a_1 < a_2 < \dots < a_p$ egyenlőtlenség sorozatnak.

Keressük meg p -nek azt a legnagyobb értékét, amelyre létezik ilyen szétválasztás. Továbbá: állítsuk elő p -nek ehhez az értékéhez tartozó valamennyi a_1, a_2, \dots, a_p sorozatot.

Megoldás. A sakktáblán 32 fehér mező van, ezért $a_1 + a_2 + \dots + a_p = 32$. Mivel $a_1 \geq 1, a_2 \geq 2, \dots, a_p \geq p$,

$$1 + 2 + \dots + p \leq a_1 + a_2 + \dots + a_p = 32;$$

ebből viszont az következik, hogy p legnagyobb értéke 7. Határozzuk most meg 32 összes felbontását 7 pozitív egész összegére.



74/4.1. ábra

$a_3 \geq 3$, ennél nagyobb azonban nem lehet, mert akkor $a_3 + a_4 + \dots + a_7 \geq 30$ lenne, ami lehetetlen, ezért $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$ minden felbontásban, és így $a_1 + a_2 + a_3 = 6, a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 26$.

Ha $a_5 = 5$, akkor szükségképpen $a_4 = 4$, és így $a_6 + a_7 = 17$, ennek lehetséges felosztásai: $6 + 11, 7 + 10$ és $8 + 9$. Az eddig nyert felbontások:

- $\alpha) \quad 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 11,$
- $\beta) \quad 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 10,$
- $\gamma) \quad 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 8 + 9.$

Ha $a_5 = 6$, akkor a_4 értéke 4 vagy 5, az első esetben $a_6 + a_7 = 7 + 9$, a második esetben $a_6 + a_7 = 7 + 8$, tehát a felbontások:

$$\delta) \quad 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 9,$$

$$\varepsilon) \quad 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 7 + 8.$$

$a_5 > 6$ nem lehetséges, mert ebből $a_5 + a_6 + a_7 \geq 24$ következne, ami lehetetlen; a felsoroltak tehát az aritmetikailag lehetséges felbontások. Közülük α) nem valósítható meg, mert 11 fehér mezőhöz legalább 1×22 -es vagy 2×11 -es sakktáblarészlet kellene, a többi négy viszont az 1974/4.1. ábra tanúsága szerint megvalósítható.

1974/5. Állapítsuk meg az

$$S = \frac{a}{d+a+b} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{c+d+a}$$

összeg értékkészletét, ha a, b, c és d tetszés szerinti pozitív számokat jelölnek.

Megoldás. Az S összeget csökkentjük, ha mind a négy nevezőt $a+b+c+d$ -re növeljük:

$$S > \frac{a}{a+b+c+d} + \frac{b}{a+b+c+d} + \frac{c}{a+b+c+d} + \frac{d}{a+b+c+d} = 1.$$

Viszont növeljük S -et, ha az első két tört nevezőjét $a+b$ -re, a másik kettőt pedig $c+d$ -re csökkentjük:

$$S < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{c+d} = 2,$$

ezek szerint

$$1 < S < 2.$$

Megmutatjuk, hogy S az $]1, 2[$ intervallum minden értékét fel is veszi, ez tehát az értékkészlete.

Legyen először $a = b = x$ és $c = d = 1$. Vezessük be az

$$S = f(x) = \frac{2x}{2x+1} + \frac{2}{x+2}$$

függvényt.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 1 \quad \text{és} \quad f(1) = \frac{4}{3},$$

(az $x \rightarrow 0+$ jobboldali határértékre utal) mivel f folytonos a $[0, 1]$ intervallumban, ezért minden olyan λ értéket felvesz, amelyre $1 < \lambda \leq \frac{4}{3}$.

Legyen továbbá $a = c = x$, $b = d = 1$; ekkor az

$$S = g(x) = \frac{2x}{x+2} + \frac{2}{2x+1}$$

függvényre

$$g(1) = \frac{4}{3} \text{ és } \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = 2,$$

$g(x)$ folytonos a $[0, 1]$ intervallumban ezért minden olyan λ értéket felvesz, amelyre $\frac{4}{3} \leq \lambda < 2$.

A vizsgált S összeg értékkészlete ezek szerint az $]1, 2[$ intervallum, ennek minden értékét valóban fel is veszi.

Megjegyzések. 1. Meggondolásainkban Bolzanonak azt a nevezetes tételét használtuk fel, mely szerint zárt intervallumon folytonos függvény minden olyan értéket felvesz, amely az intervallum végpontjaiban felvett függvényértékek közé esik. Mi ugyan félig zárt intervallumokban vizsgáltuk ezeket a függvényeket, de ezeket 1-hez ill. 0-hoz bármilyen közel „lezárrhatjuk”, hiszen a határértékek létezése miatt van olyan belső hely a $[0, 1]$ intervallumban, ahol pl. $f(x)$ az 1-hez tetszőlegesen közeli értéket felvesz.

Folytonossági meggondolások nélkül is célt érhetünk a következő módszerrel: megmutatjuk, hogy van olyan pozitív x , amelyre $f(x)$ előre adott λ -val egyenlő, ha $1 < \lambda \leq \frac{4}{3}$. Tekintsük ugyanis

$$f(x) = \frac{2x}{2x+1} + \frac{2}{x+2} = \lambda$$

egyenletet, ebből

$$2(\lambda - 1)x^2 + (5\lambda - 8)x + 2(\lambda - 1) = 0,$$

ennek

$$x = \frac{8 - 5\lambda + \sqrt{3(\lambda - 4)(3\lambda - 4)}}{4(\lambda - 1)}$$

pozitív megoldása, mivel a λ -ra tett kikötés miatt $\lambda - 1 > 0$, $8 - 5\lambda > 0$ és a diszkrimináns is nemnegatív; van tehát olyan pozitív x , amelyre $f(x) = \lambda$.

Hasonlóan látható be, hogy ha $\frac{4}{3} \leq \lambda < 2$, a $g(x) = \lambda$ egyenletnek van pozitív megoldása.

2. Az f és g függvények helyett egyetlen $t(x)$ függvényt is szerepeltethetünk; legyen $a = 1$, $b = x$, $c = 1 - x$, $d = (1 - x)x$ ($0 < x < 1$). Ekkor

$$S = t(x) = \frac{1}{-x^2 + 2x + 1} + \frac{x}{2} + \frac{1 - x}{-x^2 + x + 1} + \frac{(1 - x)x}{-x^2 + 2}.$$

Mivel

$$\lim_{x \rightarrow 0+} t(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1} t(x) = 1,$$

és t folytonos a $[0, 1]$ intervallumban, az intervallum belsejében minden olyan λ értéket felvesz, amelyre $1 < \lambda < 2$.

1974/6. Legyen $P(x)$ egész együtthatós, nem állandó értékű polinom. Bizonyítsuk be, hogy ha $n(P)$ azoknak a különböző k egész számoknak a számát jelenti, amelyekre $(P(k))^2 = 1$, akkor

$$(1) \quad n(P) - \deg(P) \leq 2,$$

ahol $\deg(P)$ jelöli a $P(x)$ polinom fokszámát.

1. megoldás. Megoldásunkat egy gyakran alkalmazott segédattal kezdjük: ha $P(x)$ egész együtthatós polinom és b, c különböző egészek, akkor $P(b) - P(c)$ osztható $b - c$ -vel.

Legyen ui.

$$P(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

akkor

$$P(b) - P(c) = a_m(b^m - c^m) + a_{m-1}(b^{m-1} - c^{m-1}) + \dots + a_1(b - c).$$

Mivel a jobb oldal minden tagja osztható $b - c$ -vel, ezért a bal oldal, $P(b) - P(c)$ is osztható vele.

Feladatunk állításának bizonyítására jelölje $P(x)$ fokszámát m ; $m = \deg(P)$; azt kell bizonyítanunk, hogy

$$(2) \quad n(P) \leq m + 2.$$

Tegyük fel, hogy az állítással ellentétben $n(P) > m + 2$, tehát $n(P) \geq m + 3$. Ebben az esetben létezik legalább $m + 3$ különböző egész szám, amelyekre $P(x)$ helyettesítési értéke $+1$ vagy -1 ; legyenek ezek: $k_1 < k_2 < \dots < k_{m+3}$.

$|P(k_i) - P(k_1)|$ értéke csak 0 vagy 2 lehet, viszont $k_2 - k_1 \geq 1$, $k_3 - k_1 \geq 2$, $k_4 - k_1 \geq 3$; segédattalunk szerint $k_i - k_1$ osztója $P(k_i) - P(k_1)$ -nek, ezért ha $i \geq 4$, $P(k_i) - P(k_1)$ szükségképpen 0-val egyenlő. Ez azonban azt jelenti, hogy a

$$P(k_1), P(k_4), P(k_5), \dots, P(k_{m+3})$$

$m + 1$ darab helyettesítési érték egyenlő, ami lehetetlen, hiszen egy m -edfokú polinom legfeljebb m helyen veheti fel ugyanazt az értéket. $n(P) > m + 2$ tehát ellentmondásra vezet, ezért (2) valóban fennáll.

2. megoldás. $P(x)$ valamilyen egész x helyen akkor és csakis akkor veheti fel a $+1$ vagy -1 értéket, ha a $P_1(x) = P(x) - 1$, ill. $P_2(x) = P(x) + 1$ polinomnak van egész gyöke. Megmutatjuk, hogy P_1 és P_2 közül az egyiknek legfeljebb két egész gyöke lehet.

Tegyük fel, hogy állításunkkal ellentétben P_1 -nek és P_2 -nek is van három egész gyöke. Nem lehet, hogy x_0 mindkettőnek közös gyöke, mert ez

$$P(x_0) - 1 = P(x_0) + 1$$

teljesülését jelentené, ami nyilván lehetetlen.

Legyen P_1 és P_2 egész gyökei közül a legkisebb k és legyen ez pl. P_1 -nek gyöke, tehát $P_1(k)=0$. Következésképpen létezik olyan $Q(x)$ egész együtthatós polinom, amelyre

$$(3) \quad P_1(x) = (x - k)Q(x).$$

Legyenek P_2 egész gyökei a , b és c , tehát $P_2(a)=P_2(b)=P_2(c)=0$. $Q(a)$, $Q(b)$, $Q(c)$ egyike sem lehet nulla, mert pl. $Q(a)=0$ esetén (3)-ból $P_1(a)=0$ következne, holott P_1 -nek és P_2 -nek nem lehet közös gyöke.

Mivel

$$P_1(x) = P_2(x) - 2 = (x - k)Q(x),$$

ezért ebből rendre a , b , c helyettesítésével következik, hogy

$$(a - k)Q(a) = (b - k)Q(b) = (c - k)Q(c) = -2,$$

ami azt jelentené, hogy -2 -nek a különböző $a - k$, $b - k$, $c - k$ pozitív egészek mind osztói, ami lehetetlen, tehát P_1 -nek és P_2 -nek nem lehet 3-3 egész gyöke.

Ebből már következik feladatunk állítása: hiszen a P_1 és P_2 polinomoknak csak annyi gyöke lehet, mint amekkora a $P(x)$ fokszáma, azaz $\deg(P)$, így $P(x)$ a $+1$, ill. -1 értékeket legfeljebb $\deg(P)+2$ helyen veheti fel, ami azt jelenti, hogy

$$n(P) \leq \deg(P) + 2,$$

tehát (1) valóban teljesül.

Megjegyzés. Ha az $n(P) - \deg(P)$ különbségét d -vel jelöljük, feladatunk a $d \leq 2$ egyenlőség bizonyítását kívánja. Az igazság az, hogy a polinomok óriási többségénél a $d \leq 0$ is teljesül, s az első megoldás gondolatmenetét követve ezt legalább ötödfokú polinomokra könnyen beláthatjuk.

Tegyük fel ugyanis, hogy $\deg(P) = m \geq 5$ és $P(x)$ a $k_1 < k_2 < \dots < k_{m+1}$ helyeken $+1$ vagy -1 értéket vesz fel. Ekkor egyrészt $k_i - k_1$ osztója $P(k_i) - P(k_1)$ -nek, ha $i \geq 4$, ebből $P(k_1) = P(k_4) = \dots = P(k_{m+1})$ következik; másrészt az $i = 1, 2, \dots, m-2$ esetben $k_{m+1} - k_i \geq 3$, de osztója $P(k_{m+1}) - P(k_i)$ -nek, ebből $P(k_{m+1}) = P(k_2) = P(k_3)$ is következik, ami azt jelentené, hogy $P(x)$ $m+1$ különböző helyen vesz fel azonos értékeket és ez lehetetlen, ezért $m \geq 5$ esetén $n(P) \leq m$, tehát $d \leq 0$.

Itt az egyenlőség elérhető pl. a

$$P(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-m)+1$$

m -edfokú polinomnál ($m \geq 5$).

Megmutatható, hogy az $n(P) - \deg(P) \leq 0$ egyenlőtlenség az egész együtthatós polinomok körében „majdnem mindig” fennáll, kivételt csak az alábbi polinomok képeznek (a egész számot jelent):

$$\begin{aligned} P(x) &= \pm \left((x-a)^2 + (x-a) - 1 \right) & d=2, \\ P(x) &= \pm ((x-a)(x-a-1)(x-a-3)+1) & d=1, \\ P(x) &= \pm ((x-a)(x-a-2)(x-a-3)+1) & d=1, \\ P(x) &= \pm (2(x-a)^2 - 1) & d=1, \\ P(x) &= \pm 2(x-a) + 1 & d=1, \\ P(x) &= \pm (x+a) & d=1. \end{aligned}$$

1975.

1975/1. Jelentsenek x_i és y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) olyan való számokat, amelyekre $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ és $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$.

Legyen továbbá z_1, z_2, \dots, z_n az y_1, y_2, \dots, y_n számok valamely elrendezése (permutációja). Bizonyítsuk be, hogy

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2.$$

1. megoldás. A kéttagúakat négyzetre emelve mindkét oldalon megkapjuk az x_i -k, ill. y_i -k négyzetösszegét; ezeket elhagyva az (1)-gyel egyenértékű

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n x_i z_i \leq \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

egyenlőtlenséget kapjuk; ezt fogjuk bizonyítani. Ha a z_i -k és y_i -k elrendezése azonos, (2)-ben egyenlőség áll; ha nem azonos a két szám- n -es elrendezése, tegyük fel, hogy az y_i és z_i számok először a k -adik helyen különböznek, azaz $y_1 = z_1, y_2 = z_2, \dots, y_{k-1} = z_{k-1}$, de $y_k \neq z_k$. Legyen pl. $z_k = y_r$ és $y_k = z_s$, ahol r és s k -nál nagyobb sorszámok, tehát $r > k$ és $s > k$. Jelölésünk szerint

$$x_k z_k + x_s z_s = x_k y_r + x_s y_k.$$

Változtassuk most meg (2) bal oldalán az $x_k z_k + x_s z_s = x_k y_r + x_s y_k$ kéttagú összeget úgy, hogy helyébe $x_k y_k + x_s y_r$ -et írjuk, ekkor a bal oldali összeg növekedni fog (pontosabban: nem csökken), mert

$$(x_k y_k + x_s y_r) - (x_k y_r + x_s y_k) = (x_k - x_s)(y_k - y_r) \geq 0.$$

Ezzel a változtatással elértük, hogy (2) bal oldalának már az első k tagja megegyezik a jobb oldal első k tagjával. Ezekkel a cserékkel a bal oldalt folyton növelve (nem csökkentve) eljuthatunk a jobb oldali összeghez, ami éppen (2) érvényességét bizonyítja.

2. megoldás. Ismét (2) bizonyítását tűztük ki célul. Vezessük be az $A_k = y_1 + y_2 + \dots + y_k$, $B_k = z_1 + z_2 + \dots + z_k$ jelölést ($k = 1, 2, \dots, n$); állapodjunk meg abban, hogy $A_0 = B_0 = 0$. E jelöléseink szerint

$$y_k = A_k - A_{k-1} \quad \text{és} \quad z_k = B_k - B_{k-1}.$$

Ezekkel (2) jobb, ill. bal oldala:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n x_k y_k &= \sum_{k=1}^n x_k (A_k - A_{k-1}) = \sum_{k=1}^n x_k A_k - \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} A_k = \\ &= x_n A_n + \sum_{k=1}^{n-1} (x_k - x_{k+1}) A_k. \end{aligned}$$

Teljesen hasonlóan kapjuk,

$$\sum_{k=1}^n x_k z_k = x_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} (x_k - x_{k+1}) B_k.$$

Mivel A_n és B_n ugyanannak az n számnak az összege, $A_n = B_n$ és $A_k \geq B_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) is teljesül, mert A_k a B_k összeget is képező n szám közül a k legnagyobbnak az összege. (2)-t ezért így írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} (x_k - x_{k+1}) B_k &\leq \sum_{k=1}^{n-1} (x_k - x_{k+1}) A_k, \\ \sum_{k=1}^{n-1} (x_k - x_{k+1}) (A_k - B_k) &\geq 0 \end{aligned}$$

ez viszont nyilván teljesül, mert az összeg minden tagjában mindkét tényező nemnegatív.

Megjegyzés. A bizonyításainkban főszerepet játszó (2) egyenlőtlenség lényegében azt mondja ki, hogy ha az x_1, x_2, \dots, x_n és z_1, z_2, \dots, z_n valós szám n -esekből képezett

$$S = \sum_{i=1}^n x_i z_i$$

összeg akkor a legnagyobb, ha az x_i -k és y_i -k azonosan vannak rendezve, tehát mindkettő vagy növekvően vagy pedig fogyólag.

Az alkalmazott módszerrel megmutatható, hogy S akkor a legkisebb, ha az x_i -k és z_i -k rendezése ellentétes.

E két tételből a nevezetes egyenlőtlenségek egész sora vezethető le; pl. a számtani-mértani közép-re vonatkozó, a Csebisev-féle, a Cauchy-féle, stb. (Ld. még az 1978/5. feladat megoldásához fűzött megjegyzésünket és [35] kiegészítésünket.)

1975/2. Jelentse a_1, a_2, a_3, \dots a pozitív egész számoknak olyan végtelen sorozatát, amelyre $a_k < a_{k+1}$.

Bizonyítsuk be, hogy ennek a sorozatnak végtelen sok eleme írható

$$a_m = xa_p + ya_q$$

alakban, ahol x és y pozitív egész számok és $p \neq q$.

1. megoldás. Tegyük fel, hogy az állítással ellentétben a sorozatnak csak véges sok eleme írható fel a kívánt alakban, és legyen az így előállított elemek közül a legnagyobb a_s . Hagyjuk el a_s -sel bezárólag a sorozat első s elemét és jelölje a megmaradt elemeket rendezve

$$b_1, b_2, b_3, \dots$$

(Ha egyetlen elem sem állítható elő, $b_1 = a_1$). Osszuk el a sorozat második elemétől kezdődő $b_1 + 1$ számú elemét b_1 -gyel, ezek között lesz kettő, amelyeknek megegyezik az osztási maradéka, tehát különbségük osztható b_1 -gyel; legyen ez a két elem b_k és b_r ($b_r > b_k$). Ezek szerint

$$b_r - b_k = x \cdot b_1,$$

ahol x pozitív egész és így $b_r = x \cdot b_1 + b_k$, ezért $y = 1$ választással

$$b_r = x \cdot b_1 + y b_k,$$

b_r tehát előállt a kívánt alakban s így a végeesség feltételezésével ellentmondásba kerültünk.

2. megoldás. Felhasználjuk a következőket (ld. megjegyzésünket): ha a, b, c pozitív egészek és $c > ab$, a és b relatív prímek, akkor az $ax + by = c$ egyenletnek van x -ben és y -ban pozitív egész megoldása.

Jelölje a_1 és a_i ($i = 2, 3, \dots$) legnagyobb közös osztóját d_i . Mivel a_1 -nek csak véges sok osztója van, a d_2, d_3, \dots sorozatban valamelyik elem végtelen sokszor előfordul, legyen ez d . Ez azt jelenti, hogy az a_i sorozatban végtelen sok olyan elem van, amelyek

$$a_1 = b_1 d, \quad b_2 d, \quad b_3 d, \quad \dots$$

alakban állíthatók elő. Mivel az a_i sorozattal együtt a b_i sorozat is szigorúan növekvő, a sorozatban végtelen sok $b_1 b_2$ -nél nagyobb b_k elem van. Mivel $a_1 = b_1 d$ -nek és $b_2 d$ -nek d a legnagyobb közös osztója, b_1 és b_2 relatív prímek. Bevezető tételünk szerint tehát a

$$b_1 x + b_2 y = b_k$$

egyenletnek van pozitív egész megoldaspárja, ezért van a

$$b_1 dx + b_2 dy = b_k d$$

egyenletnek is, amelyben $b_1 d, b_2 d, b_k d$ az a_i sorozat elemei. Mivel b_k választására végtelen sok lehetőségünk van, a feladat állítását bizonyítottuk.

Megjegyzés. A 2. megoldás bevezető tételét a következő módon bizonyíthatjuk: az $a, 2a, 3a, \dots, ba$ számok b -vel való osztási maradékai különbözők, mert ha nem lenne közülük kettő, amelyek b -vel osztva ugyanazt a maradékot adják, pl. ia és ja ($1 \leq i < j \leq b$), akkor $(j-i)a$ osztható lenne b -vel, ami lehetetlen, hiszen $j-i < b$ és a és b relatív prímek. Ebből következik, hogy az $a, 2a, \dots, ba$ számok b -vel való osztási maradékai szolgáltatják az összes lehetséges b számú maradékot (ún. teljes maradérendszer alkotnak a b modulusra nézve).

Ezek szerint van közöttük olyan — mondjuk xa —, amelynek ugyanaz az osztási maradéka, mint c -nek, tehát $c - ax$ osztható b -vel, ezért van olyan egész y , amelyre

$$c - ax = by.$$

Mivel $x \leq b$, $ax \leq ab < c$, $c - ax = by > 0$, következésképpen $y > 0$ és így az $ax + by = c$ egyenletnek valóban van pozitív x, y megoldása.

1975/3. Egy tetszés szerinti ABC háromszög oldalaira úgy szerkesztettük meg kifelé a BPC , CQA és ARB háromszögeket, hogy

$$\angle PBC = \angle CAQ = 45^\circ$$

$$\angle BCP = \angle QCA = 30^\circ$$

$$\angle ABR = \angle BAR = 15^\circ.$$

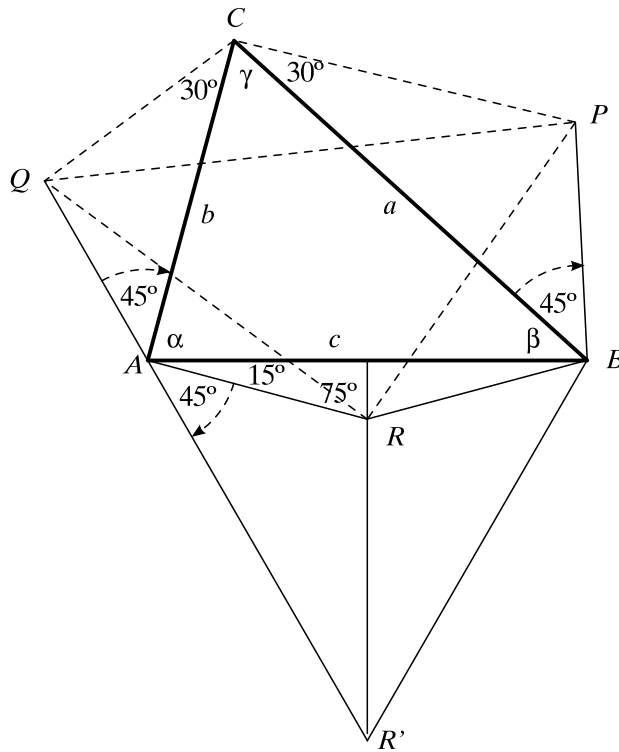
Bizonyítsuk be, hogy $\angle QRP = 90^\circ$ és $QR = RP$.

1. megoldás. A jelöléseket válasszuk úgy, hogy az ABC , BPC , CQA ARB háromszögek pozitív körüljárásúak legyenek (1975/3.1. ábra). A CQA és CPB háromszögnek hasonlósága miatt

$$\frac{AC}{AQ} = \frac{BC}{BP} = \lambda.$$

Jelölje τ_1 az A középpontú λ arányú -45° -os forgatva nyújtást, τ_2 pedig a B középpontú $\frac{1}{\lambda}$ arányú -45° -os forgatva nyújtást. τ_1 a Q pontot C -be, τ_2 pedig a C -t P -be viszi át, tehát a $\tau_1\tau_2$ transzformáció Q -t P -be. $\tau_1\tau_2$ olyan forgatva nyújtás, amelynél az elforgatás szöge $2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$, aránya $\lambda \cdot \frac{1}{\lambda} = 1$, ezért egybevágóság, azaz 90° -os elforgatás.

τ_1 az R -et úgy viszi át egy R' pontba, hogy az AQC és az ARR' hasonlók lesznek, tehát $\angle ARR' = 105^\circ$, ennél fogva RR' merőleges AB -re, s mivel ARB egyenlő szárú háromszög, RR' szimmetriatengelye az ABR' háromszögnek. ABR' ezért egyenlő szárú ($\angle BAR' = 60^\circ$ miatt szabályos is). Ebből következik, hogy ARR' és BRR' egybevágó háromszögek, τ_2 ezért R' -t R -be viszi át; ezek szerint R a $\tau_1\tau_2$ elforgatás fixpontja, azaz középpontja. $\tau_1\tau_2$ így R középpontú 90° -os elforgatás, s mivel Q -t P -be viszi át, a QRP egyenlő szárú derékszögű háromszög; ezt kellett bizonyítanunk.



75/3.1. ábra

2. megoldás. Trigonometria alkalmazásával is célt érünk. Az ACQ és PBC háromszögekre alkalmazva a szinusztételt kapjuk, hogy

$$\frac{AQ}{b} = \frac{BP}{a} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 105^\circ} = \frac{1}{2 \sin 75^\circ}; \quad \frac{CQ}{b} = \frac{CP}{a} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 105^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2} \sin 75^\circ},$$

ebből

$$(1) \quad AQ = \frac{b}{2 \sin 75^\circ}, \quad BP = \frac{a}{2 \sin 75^\circ}, \quad CQ = \frac{b}{\sqrt{2} \sin 75^\circ}, \quad CP = \frac{a}{\sqrt{2} \sin 75^\circ}.$$

Az ARB egyenlő szárú háromszögből

$$(2) \quad AR = BR = \frac{c}{2 \sin 75^\circ}.$$

A koszinusztételt a QAR , PBR és PQC háromszögekre alkalmazzuk, felhasználva az (1) és (2) alatti kifejezéseket (a háromszögek egyike esetleg egyenesszakasszá fajulhat):

$$\begin{aligned} QR^2 &= AQ^2 + AR^2 - 2AQ \cdot AR \cos(\alpha + 60^\circ) = \\ &= \frac{1}{4 \sin^2 75^\circ} (b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha + 60^\circ)). \end{aligned}$$

Hasonlóan:

$$PR^2 = \frac{1}{4 \sin^2 75^\circ} (a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta + 60^\circ)),$$

$$PQ^2 = \frac{1}{2 \sin^2 75^\circ} (a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma + 60^\circ)).$$

Megmutatjuk, hogy az utóbbi három kifejezésben a zárójelen belül egyenlő mennyiségek állnak; ehhez elegendő bizonyítanunk, hogy bármelyikük az oldalaknak és a háromszög területének a segítségével ugyanúgy állítható elő. Pl.

$$S = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma + 60^\circ) = a^2 + b^2 - 2ab \left(\frac{1}{2} \cos \gamma - \frac{\sqrt{3} \sin \gamma}{2} \right) =$$

$$(3) \quad = a^2 + b^2 - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} + \sqrt{3}ab \sin \gamma = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2\sqrt{3}t.$$

s nyilván ugyanezt kapjuk, bármelyik kifejezésből indulunk ki, ezért

$$QR = PR \quad \text{és} \quad PQ^2 = QR^2 + PR^2,$$

ami azt jelenti, hogy PQR egyenlő szárú derékszögű háromszög, ami bizonyítandó volt. (Megjegyezzük, hogy a végén felhasznált összefüggés egyszerűen következik az izogonális pont tételéből is [4]).

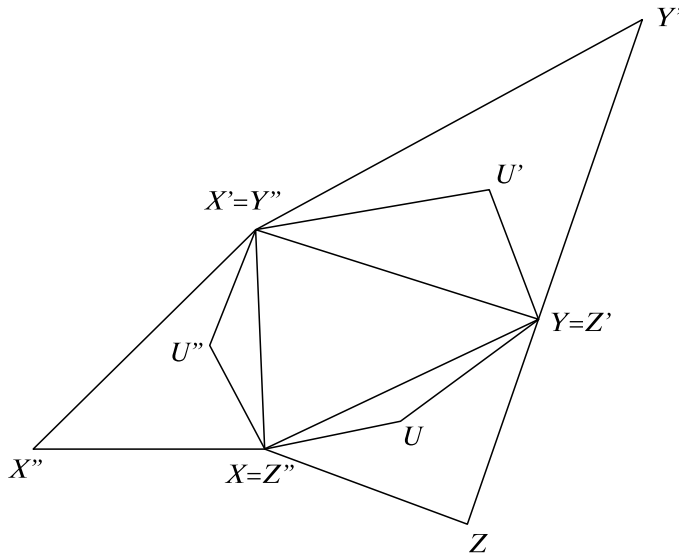
3. megoldás. A feladat mélyebb összefüggéseire mutat rá a következő általánosítása, ill. megoldása. Két pontnégyest hasonlóknak mondunk, ha van olyan hasonlósági transzformáció, amely az egyiket a másikba viszi át; két hasonló pontnégyesben 3-3 megfelelő pontot kiválasztva az általuk meghatározott háromszögek hasonlóak. Két hasonló pontnégyes egyező irányítású, ha az egymásnak megfelelő háromszögek egyező irányításúak. Tételünk a következő:

Ha $XYZU$, $X'Y'Z'U'$, $X''Y''Z''U''$ hasonló pontnégyesek és $Z' = Y$, $Y'' = X'$, $Z'' = X$, továbbá $U' \neq U$, $U'' \neq U$, akkor az $XX'X''$, $YY'Y''$, $ZZ'Z''$ és $UU'U''$ egymáshoz páronként hasonló háromszögek (1975/3.2. ábra).

Tételünk szemléletes tartalma a következő: ha adott a síkon egy tetszőleges háromszög (ábránkban XYX') és ennek oldalaihoz úgy illesztjük hozzá a három hasonló pontnégyest, hogy az XY oldalhoz az első pontnégyes XY szakasza illeszkedjék, az $YX' = Z'Y''$ oldalhoz a második pontnégyes $Z'X'$ szakasza, az $X'X = Y''Z''$ oldalhoz pedig a harmadik pontnégyes $Y''Z''$ szakasza, akkor a tételben jelzett négy háromszög páronként hasonló.

Az első három háromszög hasonlósága nyilvánvaló, hiszen pl. XYZ azonos a $Z''Z'Z$ háromszöggel és $X'Y'Z'$ azonos az $Y''Y'Y$ háromszöggel; a bizonyítandó tehát az, hogy az $UU'U''$ is hasonló az előbbi háromszögekhez.

A bizonyítás céljára helyezzük el az alakzatunkat a komplex számsíkban úgy, hogy a 0 pont U -val essék egybe; az egyes pontokhoz tartozó komplex számokat a megfelelő kisbetűkkel jelöljük; szóhasználatunkban nem teszünk különbséget a pont és a pontot jelölő komplex szám között.



75/3.2. ábra

Mivel minden irányítástartó hasonlóság, amely a p pontot p^* -ba viszi át, lineáris függvénnyel adható meg, legyen az $XY ZU$ -t $X'Y'Z'U'$ -be átvivő transzformáció

$$(4) \quad p^* = k_1 p + t_1,$$

az $XY ZU$ -t $X''Y''Z'U''$ -be átvivő pedig

$$(5) \quad p^* = k_2 p + t_2,$$

ahol k_1, t_1, k_2, t_2 megfelelő komplex állandók.

Mivel $u = 0$ és (4) u -t u' -be, (5) pedig u'' -be viszi át, ezért $u' = k_1 \cdot 0 + t_1 = t_1$, $u'' = k_2 \cdot 0 + t_2 = t_2$, (4) és (5) tehát

$$(6) \quad p^* = k_1 p + u', \quad \text{ill.} \quad p^* = k_2 p + u''$$

alakban írható. Írjuk most fel a (6) alatti formulákkal az $x \rightarrow x', z \rightarrow z' = y$, ill. $y \rightarrow y'' = x', z \rightarrow z'' = x$ megfeleltetéseket:

$$(7) \quad x' = k_1 x + u' \quad (9) \quad x' = k_2 y + u''$$

$$(8) \quad y = k_1 z + u' \quad (10) \quad x = k_2 z + u''$$

(7)-ből, ill. (9)-ből adódik, mivel $x \neq 0, y \neq 0$, hogy

$$k_1 = \frac{x' - u'}{x}, \quad k_2 = \frac{x' - u''}{y}.$$

Ezeket (8)-ba, ill. (10)-be helyettesítve kapjuk:

$$y = \frac{x' z - u' z + u' x}{x}, \quad x = \frac{x' z - u'' z + u'' y}{y}.$$

E két eredmény összevetéséből nyerjük:

$$xy = x' z - u' z + u' x = x' z - u'' z + u'' y; \quad u'(x - z) = u''(y - z).$$

Ennek alapján vezessük be a

$$k_3 = \frac{x-z}{u''} = \frac{y-z}{u'} \quad (u' \neq 0, u'' \neq 0)$$

jelölést. Alkalmazzuk most a $p^* = k_3 p + z$ hasonlósági transzformációt rendre az u, u', u'' pontokra:

$$k_3 u + z = z,$$

$$k_3 u' + z = y,$$

$$k_3 u'' + z = x,$$

ami éppen azt jelenti, hogy az $U''U'U$ háromszög hasonló az XYZ háromszöghöz, ezt kellett bizonyítanunk.

Ha most az $XYZU$ pontnégyest úgy vesszük fel, hogy XYZ egyenlő szárú derékszögű háromszög legyen (derékszög Z -nél) és benne U -t úgy, hogy XUY egyenlő szárú háromszög legyen $ARU \sphericalangle = 150^\circ$ -os szárszöggel, akkor éppen a feladatunkban vizsgált alakzatot kapjuk.

Megjegyzések. 1. Az 1. megoldással azonos módon bizonyíthatjuk be a feladat alábbi általánosítását:

Ha egy tetszés szerinti ABC háromszög oldalaira úgy szerkesztjük kifelé a BPC, CQA, ARB háromszögeket, hogy

$$PBC \sphericalangle = CAQ \sphericalangle = \varphi,$$

$$BCP \sphericalangle = QCA \sphericalangle = \delta,$$

$$ABR \sphericalangle = BAR \sphericalangle = |90^\circ - (\varphi + \delta)|$$

legyen és R az AB egyenesek C -vel ellentétes oldalán helyezkedjék el, ha $\varphi + \delta < 90^\circ$, C -vel egyező oldalán, ha $\varphi + \delta > 90^\circ$ és essék egybe AB felező pontjával, ha $\varphi + \delta = 90^\circ$, akkor $QRP \sphericalangle = 2\varphi$ és $QR = RP$.

Feladatunkban $\varphi = 45^\circ$, $\delta = 30^\circ$. Ennek a megfogalmazásnak számos érdekes speciális esete van. Ha pl. $\varphi = \delta = 45^\circ$, akkor az ABC háromszög AC és BC oldalára egyenlő szárú derékszögű háromszögeket szerkesztünk; ebben az esetben P, Q és AB -nek R felezőpontja egyenlő szárú derékszögű háromszöget alkot.

2. Az előbbi általánosítás történetileg érdekes speciális esete, ha $\varphi = \delta = 30^\circ$, az ABC oldalaira ekkor egyenlő szárú, 120° -os szárszögű háromszögeket szerkesztünk, ennek a csúcsai éppen az oldalakra szerkesztett szabályos háromszögek középpontjai. A feladat eredménye szerint e középpontok olyan egyenlő szárú háromszöget alkotnak, amelynek szárszöge 60° -os, ez pedig szabályos háromszög. E feladat szerzőjének Napoleont tartják: a háromszög oldalára szerkesztett szabályos háromszögek középpontjai szabályos háromszög csúcsai.

Ennek viszont egy más irányú általánosítása az ún. Napoleon–Barlotti tétel: ha egy n -oldalú sokszög oldalaira (kifelé) szabályos n -szögeket szerkesztünk,

ennek középpontjai akkor és csak akkor csúcsai egy szabályos n -szögnek, ha az eredeti sokszög affin szabályos n -szög. (Affin szabályos egy n -szög, ha szabályos n -szög párhuzamos vetületeként állítható elő; pl. minden háromszög affin szabályos; az affin szabályos négyszögek a paralelogrammák.)

1975/4. Legyen A a tízes számrendszerben felírt 4444^{4444} szám számjegyeinek az összege, B pedig A számjegyeinek az összege.

Számítsuk ki B számjegyeinek az összegét.

Megoldás. Jelöljük a 4444^{4444} számot N -nel, B jegyeinek az összegét C -vel. Mivel egy szám 9-es maradéka jegyei összegének a 9-es maradékával egyenlő, N 9-es maradéka azonos A , B és C 9-es maradékával. 4444 9-es maradéka 7, azaz $N = 9k + 7$, ahol k pozitív egész. $9k + 7$ hatványainak alakja: $(9k + 7)^2 = 9k_1 + 4$, $(9k + 7)^3 = 9k_2 + 1$, $(9k + 7)^4 = 9k_3 + 7$, a 9-es maradékok tehát rendre 7, 4, 1, 7, ... és periodikusan ismétlődnek; ha a hatvány kitevő $3m + 1$, $3m + 2$, $3m$ alakú, a 9-es maradékok 7, 4, 1. Mivel 4444 $3m + 1$ alakú, N 9-es maradéka 7, ugyanennyi A , B és C 9-es maradéka is.

Mivel $N < 10\,000^{4444} = 10^{4 \cdot 4444} = 10^{17\,776}$, N legfeljebb 17 776 jegyű, ezért $A \leq 9 \cdot 17\,776 = 159\,984$. Minthogy A első jegye legfeljebb 1, $B \leq 1 + 5 \cdot 9 = 46$. Az első 46 természetes szám közül 39 jegyeinek az összege a legnagyobb, ezért $C \leq 12$; viszont C 9-es maradéka 7, ezért $C = 7$.

Megjegyzések. 1. Számítógéppel is előállítható N , 16 211 jegyű szám és $A = 72\,601$. Ezek szerint $B = 16$ és eredményünkkel egyezésben $C = 7$.

2. Kongruenciák felhasználásával N 9-es maradékát gyorsan megkaphatjuk:

$$N = 4444^{4444} \equiv 7^{4444} \equiv (-2)^{3 \cdot 1481 + 1} \equiv 7 \cdot (-8)^{1481} \equiv 7 \cdot 1^{1481} = 7.$$

1975/5. Döntsük el, kiválasztható-e az egységkörön 1975 pont úgy, hogy közülük bármely kettő által meghatározott húr hossza racionális szám legyen.

1. megoldás. Megmutatjuk, hogy az egységkörön felvehető n pont úgy, hogy közülük bármely kettő távolsága racionális szám ($n > 1$).

Felhasználjuk, hogy létezik bármilyen kicsiny pozitív szög, amelynek racionális a tangense. Legyen ugyanis az ABC derékszögű háromszög BC befogója 1, AC befogója N pozitív egész, $BAC \sphericalangle = \varphi$, ekkor $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{N}$ racionális; N növelésével $\operatorname{tg} \varphi$ és ezzel φ tetszőlegesen kicsinnyé tehető.

Válasszuk most az α szöget úgy, hogy $\alpha < \frac{\pi}{n-1}$ teljesüljön és $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ racionális legyen. Ebben az esetben $\sin \alpha$ és $\cos \alpha$ is racionális, minthogy

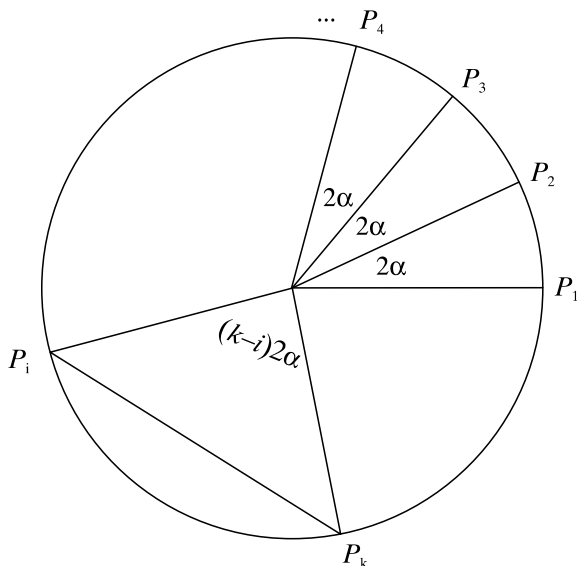
$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \quad \text{és} \quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}},$$

sőt $\sin n\alpha$ és $\cos n\alpha$ is racionális. Ezt teljes indukcióval láthatjuk be, felhasználva, hogy

$$\sin(n+1)\alpha = \sin n\alpha \cos \alpha + \cos n\alpha \sin \alpha,$$

$$\cos(n+1)\alpha = \cos n\alpha \cos \alpha - \sin n\alpha \sin \alpha.$$

$n=1$ -re az állítás igaz, n -ről $n+1$ -re áttérve pedig előző képleteink biztosítják állításunk igazságát.



75/5.1. ábra

Mérjük fel egy P_1 pontból kiindulva az egységgörre $n-1$ -szer a 2α ívet, végpontjai legyenek P_2, P_3, \dots, P_n (75/5.1. ábra). Ezek a pontok mind különbözők, mivel $(n-1) \cdot 2\alpha < 2\pi$. Két tetszőleges pont, pl. P_i és P_k ($k > i$) közötti ívtávolság $(k-i) \cdot 2\alpha$, ezért

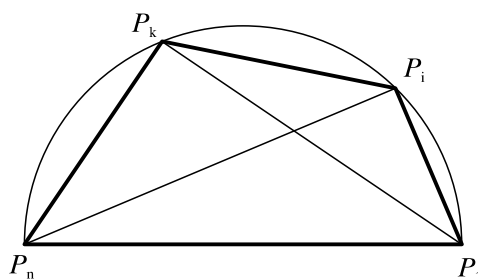
$$P_i P_k = 2 \sin(k-i)\alpha,$$

s mivel $\sin \alpha$ racionális, ezért a $P_i P_k$ távolság is racionális.

2. megoldás. A 2 hosszúságú $P_1 P_n$ szakasz mint átmérő fölé szerkesztünk olyan $P_1 P_k P_n$ derékszögű háromszögeket, amelynek befogói:

$$P_1 P_k = \frac{4k}{k^2 + 1}, \quad P_k P_n = \frac{2(k^2 - 1)}{k^2 + 1}. \quad (k = 2, 3, \dots, n-1).$$

Mivel $P_1 P_k^2 + P_k P_n^2 = 4$, az ilyen derékszögű háromszögek léteznek és P_k csúcsaik a $P_1 P_n$ fölé szerkesztett egységsugarú körön vannak. A P_1, P_2, \dots, P_n pontok kielégítik a feladat feltételeit, mert $P_1 P_k$ és $P_k P_n$ definíciójuk alapján



75/5.2. ábra

racionális. $P_i P_k$ racionális voltának a bizonyítására alkalmazzuk Ptolemaiosz tételét [24] ($1 < i < k < n$) (1975/5.2. ábra):

$$P_1 P_k \cdot P_n P_i = P_1 P_n \cdot P_i P_k + P_1 P_i \cdot P_n P_k,$$

ebből

$$P_i P_k = \frac{1}{2}(P_1 P_k \cdot P_n P_i - P_1 P_i \cdot P_n P_k).$$

Mivel a jobb oldalon racionális számok szorzata, ill. összege áll, ezért $P_i P_k$ is racionális.

Megjegyzés. A bizonyított állításból következik, hogy a síkon mindig megadható N számú pont úgy, hogy közülük egyik három se legyen egy egyenesen, de közülük bármely kettő távolsága egész szám legyen. Ha ugyanis a feladatban előállított N számú pont távolságai

$$\frac{p_1}{q_1}, \quad \frac{p_2}{q_2}, \quad \dots, \quad \frac{p_r}{q_r}$$

racionális számok, a síkot $q_1 q_2 \dots q_r$ -szeresére nagyítva minden távolság egész lesz.

Ezek után meglepő, hogy a síkban nem adható meg végtelen sok pont úgy, hogy ne legyenek egy egyenesen, de bármely kettő távolsága egész legyen. Ezt a következő módon láthatjuk be: legyenek az ABC háromszög oldalhosszai egészek, megmutatjuk, hogy csak véges sok olyan D pont van, amelynek távolságai az A , B , C csúcsoktól egészek.

Legyen $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ egészek, a D pont távolságai az A , B , C pontoktól szintén egészek. A háromszögegyenlőtlenség miatt

$$|DB - DC| \leq a, \quad |DA - DB| \leq c.$$

Azoknak a D pontoknak a halmaza, amelyekre $|DB - DC| = k$ (állandó) vagy hiperbola B és C fókuszokkal ($0 < k < a$), vagy BC felező merőlegese ($k = 0$), vagy a BC egyenes BC szakaszon kívüli része ($k = a$). Mivel a egész, k értéke csak $0, 1, 2, \dots, a$ lehet, ezért D két egyenes, illetve $a - 1$ hiperbola valamelyikén helyezkedhet el. Hasonlóan a $|DA - DB| \leq c$ miatt D két egyenes, ill. $c - 1$ hiperbola valamelyikén lehet. Mivel azonban két hiperbolának, ill.

egyenespárnak legfeljebb négy metszéspontja lehet, D lehetséges helyzeteinek a száma véges, ezért lehetetlen, hogy végtelen sok egész távolságú pont létezzék az adott feltételek mellett.

1975/6. Állítsunk elő minden olyan kétváltozós polinomot, amelyek kielégítik a következő feltételeket:

- I. Minden valós t, x, y számra $P(tx, ty) = t^n P(x, y)$, ahol n pozitív egész, azaz P homogén és n -edfokú.
- II. Minden valós a, b, c szám esetén fennáll, hogy $P(a+b, c) + P(b+c, a) + P(c+a, b) = 0$.
- III. $P(1, 0) = 1$.

Megoldás. A kétváltozós n -edfokú homogén polinomok általános alakja:

$$(1) \quad P(x, y) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} y + a_{n-2} x^{n-2} y^2 + \dots + a_1 x y^{n-1} + a_0 y^n.$$

Az (1) alatti alakból (de az I. tulajdonságból is) következik, hogy $P(0, 0) = 0$. Ha $P(x, y)$ elsőfokú, akkor alakja $a_n x + a_0 y$, ez a II. és III. feltételeket csak $x = 2y$ alakban elégíti ki. Megmutatjuk, hogy $P(-x, x) = 0$ minden valós x -re, ha $n > 1$. Alkalmazzuk ui. a II. tulajdonságot $a = b = x, c = -2x$ esetén:

$$\begin{aligned} P(2x, -2x) + P(-x, x) + P(-x, x) &= 0, \\ ((-2)^n + 2)P(-x, x) &= 0, \\ P(-x, x) &= 0. \end{aligned}$$

Ez az eredmény úgy is értelmezhető, hogy ha $x + y = 0$, akkor

$$(2) \quad P(x, y) = 0.$$

Tegyük most fel, hogy $x + y \neq 0$. Alkalmazzuk a II. tulajdonságot $c = 1 - a - b$ esetben:

$$(3) \quad P(a+b, 1-a-b) + P(1-a, a) + P(1-b, b) = 0.$$

Ha most $b = 0$,

$$P(a, 1-a) + P(1-a, a) + 1 = 0$$

Ebből

$$P(1-a, a) = -P(a, 1-a) - 1.$$

Mivel (3) a -ban és b -ben szimmetrikus

$$P(1-b, b) = -P(b, 1-b) - 1.$$

Helyettesítsük ezt a két kifejezést (3)-ba; átrendezve kapjuk, hogy

$$(4) \quad P(a+b, 1-a-b) = P(a, 1-a) + P(b, 1-b) + 2.$$

Vezessük be a $Q(z) = P(z, 1-z) + 2$ jelölést, (4) ezzel

$$Q(a+b) = Q(a) + Q(b)$$

alakba írható, ahol $Q(z)$ nyilván egyváltozós polinom. III. alapján $Q(1) = P(1, 0) + 2 = 3$, teljes indukcióval következik, hogy $Q(n) = 3n$, mivel $Q(n+1) = Q(n) + Q(1) = 3n + 3 = 3(n+1)$. $Q(z)$ helyettesítési értéke így végtelen sok helyen megegyezik a $3z$ polinom helyettesítési értékével, ezért

$$Q(z) = 3z, \quad \text{azaz} \quad P(z, 1-z) = 3z - 2,$$

ebből

$$\begin{aligned} P(x, y) &= (x+y)^n P\left(\frac{x}{x+y}, \frac{y}{x+y}\right) = (x+y)^n P\left(\frac{x}{x+y}, 1 - \frac{x}{x+y}\right) = \\ &= (x+y)^n \left(\frac{3x}{x+y} - 2\right) = (x+y)^{n-1}(x-2y), \end{aligned}$$

és ez nyilván az $x+y=0$ esetben is kielégíti a (2) feltételt.

A kapott előállítás az I. és III. feltételnek eleget tesz, s II. is teljesül, mert $(a+b+c)^{n-1}(a+b-2c) + (a+b+c)^{n-1}(b+c-2a) + (a+b+c)^{n-1}(c+a-2b) = 0$.

A feladat kikötéseit tehát egyetlen kétváltozós polinom teljesíti:

$$P(x, y) = (x+y)^{n-1}(x-2y).$$

Megjegyzés. A polinomokra vonatkozó bővebb ismeretek (pl. folytonosság) felhasználásával más megoldások is adhatók. Egy ilyen utat felvázolunk:

Ha $n > 1$, (2) szerint $P(x, -x) = 0$. Ha most a polinomban x -et rögzítettnek tekintjük, akkor $P(x, y) = P_x(y)$ az y -nak egyváltozós polinomja, s mivel $P(x, -x) = 0$, $P_x(y)$ -ből, azaz $P(x, y)$ -ből kiemelhető az $x+y$ tényező,

$$P(x, y) = (x+y)Q_1(x, y),$$

ahol $Q_1(x, y)$ homogén kétváltozós polinom és

$$\begin{aligned} 0 &= P(a+b+c) + P(b+c, a) + P(c+a, b) = \\ &= (a+b+c)(Q_1(a+b, c) + Q_1(b+c, a) + Q_1(c+a, b)), \end{aligned}$$

ez azt jelenti, hogy ha $a+b+c \neq 0$, $Q_1(x, y)$ kielégíti a II. feltételt.

$Q_1(x, y)$ az I. feltételt is kielégíti, ha $x+y \neq 0$, mert

$$Q_1(tx, ty) = \frac{P(tx, ty)}{t(x+y)} = t^{n-1}Q_1(x, y).$$

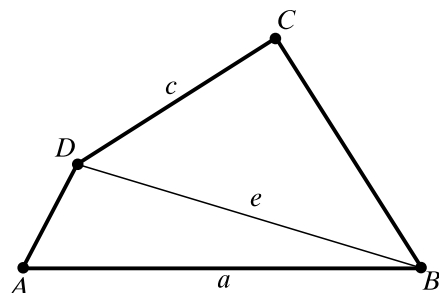
Ez azt jelenti, hogy $Q_1(x, y)$ kielégíti az I.–III. feltételeket: s $P(x, y)$ folytonosságát felhasználva ez akkor is igaz, ha $a+b+c=0$, ill. $x+y=0$. $Q_1(x, y)$ -ra alkalmazva az előbbi eljárást, $Q_1(x, y)$ -ről ismét leválaszthatunk egy $(x+y)$ -os tényezőt mindaddig, míg $Q_i(x, y)$ elsőfokú nem lesz; de ekkor szükségképpen $x-2y$ alakú, tehát

$$P(x, y) = (x+y)^{n-1}(x-2y).$$

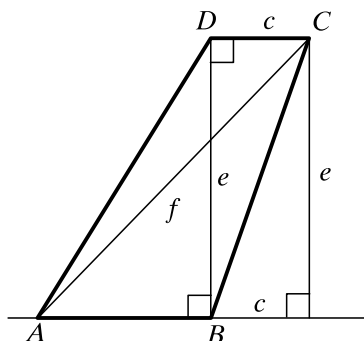
1976.

1976/1. Egy síkbeli konvex négyszög területe 32 cm^2 , egyik átlójának és két egymással szemközti oldalának összege 16 cm . Állapítsuk meg e négyszög másik átlójának minden lehetséges hosszát.

Megoldás. Legyen a konvex négyszög $ABCD$ és vezessük be a következő jelöléseket: $AB = a$, $CD = c$, $AC = f$, $BD = e$ (1976/1.1. ábra), az ABC háromszögterületét t_{ABC} jelöli; a feladat szerint $a + e + c = 16$.



76/1.1. ábra



76/1.2. ábra

A háromszög területének kétszerese nem nagyobb két oldalának a szorzatánál és csak akkor egyenlő vele, ha e két oldal merőleges egymásra. Ezért

$$(1) \quad 2 \cdot 32 = 2t_{ABD} + 2t_{BDC} \leq ae + ec = (a + c)e = (16 - e)e,$$

ebből

$$(2) \quad 0 \geq e^2 - 16e + 64 = (e - 8)^2,$$

ami csak akkor teljesül, ha $e = 8$ és így $a + c = 8$; (1)-ben és (2)-ben egyenlőség esetén azonban szükségképpen AB és CD merőleges a BD átlóra (1976/1.2. ábra), ezért a másik átló hossza:

$$f = \sqrt{(a + c)^2 + e^2} = \sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2},$$

s ez az egyetlen lehetséges átlóhossz.

1976/2. Legyen $P_1(x) = x^2 - 2$; $P_j(x) = P_1(P_{j-1}(x))$; $j = 2, 3, \dots$ Bizonyítsuk be, hogy n tetszős szerinti pozitív egész értéke esetén a $P_n(x) = x$ egyenletnek minden gyöke valós és páronként egymástól különböző.

1. megoldás. Mivel a P_j polinom foka kétszerese P_{j-1} fokának, ($j = 2, 3, \dots$), ezért $P_n(x) - x$ fokú polinom és így legfeljebb 2^n valós gyöke lehet. Keressük most a gyökeit a $[-2, 2]$ intervallumban; ennek pontjai $x = 2 \cos t$ alakban állíthatók elő. Felhasználva, hogy $\cos 2t = 2 \cos^2 t - 1$,

$$(1) \quad P_1(x) = P_1(2 \cos t) = 4 \cos^2 t - 2 = 2 \cos 2t.$$

Ebből teljes indukcióval következik, hogy

$$(2) \quad P_n(x) = P_n(2 \cos t) = 2 \cos 2^n t.$$

$n = 1$ -re állításunk az (1) alattival azonos; tegyük fel, hogy $P_{n-1}(x) = 2 \cos 2^{n-1}t$, akkor

$$P_n(x) = (P_{n-1}(x))^2 - 2 = 4 \cos^2 2^{n-1}t - 2 = 2(2 \cos^2 2^{n-1}t - 1) = 2 \cos 2^n t,$$

amivel (2)-t bizonyítottuk.

Egyenletünket ezért a következő alakba írhatjuk:

$$\cos 2^n t = \cos t$$

ebből

$$2^n t = t + 2k\pi \quad \text{vagy} \quad 2^n t = -t + 2k\pi, \quad k \text{ tetsz. egész}$$

és így

$$(3) \quad t_1 = \frac{2k_1\pi}{2^n - 1}, \quad \text{illetve} \quad t_2 = \frac{2k_2\pi}{2^n + 1}.$$

Ha t_1 esetében $k_1 = 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1$ és t_2 esetében $k_2 = 1, 2, \dots, 2^{n-1}$, akkor az $x = 2 \cos t$ értékek 2^n számú gyököt adnak. A t_1 értékek egymás között mind különbözők és különbözők a hozzájuk tartozó koszinusz értékek is, mivel t_1 szöbajövő értékei a $[0, \pi]$ intervallumba esnek és mivel $\cos x$ ebben az intervallumban szigorúan monoton, ugyanez igaz a t_2 -höz tartozó értékekre is. Azt kell még belátnunk, hogy a t_1 és t_2 értékek között nincs azonos, ez ugyanis azt jelentené, hogy valamilyen k_1 és k_2 egészekre

$$\frac{2k_1\pi}{2^n - 1} = \frac{2k_2\pi}{2^n + 1},$$

$$k_1(2^n + 1) = k_2(2^n - 1)$$

egyenlőség állana fenn, ami lehetetlen, mivel $2^n + 1$ és $2^n - 1$ relatív prímek és $2^n + 1$ nem lehet osztója k_2 -nek. Ezek szerint tehát a (3) alatt megadott 2^n szám mind különböző valós gyöke egyenletünknek és ez az egyenlet összes gyöke.

2. megoldás. A feladat nem kívánja a gyökök meghatározását, hanem csupán létezésük bizonyítását. Ezt figyelembe véve abból indulunk ki, hogy ha $P_{n-1}(x)$ rendre a $-2, 0, 2$ értékeket veszi fel, akkor ugyanezen a helyeken

$$P_n(x) = (P_{n-1}(x))^2 - 2$$

értékei $2, -2, 2$.

Teljes indukcióval bizonyítjuk be $P_n(x)$ -nek a következő alapvető tulajdonságát: ha -2 -től indulva $+2$ -ig haladunk, $P_n(x)$ felváltva veszi fel a $+2$ és -2 értékeket, méghozzá $+2$ -t $2^{n-1} + 1$ helyen, -2 -t pedig 2^{n-1} helyen.

$n = 1$ -re állításunk igaz, mivel $P_1(-2) = 2$, $P_1(0) = -2$, $P_1(2) = 2$. Tegyük fel, hogy igaz $P_{n-1}(x)$ -re is, tehát -2 -től $+2$ -ig haladunk $2^{n-2} + 1$ -szer a 2 , 2^{n-2} -szer pedig felváltva a -2 értéket. Ezek a vizsgált helyek (összesen $2^{n-1} + 1$ hely) a $[-2, 2]$ intervallumnak az első és utolsó vizsgált hely közötti szakaszát 2^{n-1} részre bontják. $P_{n-1}(x)$ minden ilyen intervallum egyik végpontjában -2 -vel, másik végpontjában $+2$ -vel egyenlő, ezért folytonossága miatt Bolzano tétele következtében van nulla-helye. Csatoljuk most ezeket a nulla helyeket a vizsgált helyekhez, ezekkel együtt az itt felvett függvényértékek:

$$2, 0, -2, 0, 2, -2, \dots, -2, 0, 2.$$

Minden $(2, -2)$ ill. $(-2, 2)$ pár közé egy 0 ékelődött, ezért ebben a sorozatban 2^{n-1} darab 0 van. Bevezető megjegyzésünk értelmében $P_n(x)$ értékei ezeken a

0 helyeken:

$$2, -2, 2, -2, 2, -2, \dots, 2, -2, 2,$$

tehát $2^{n-1} + 1$ darab 2-es és 2^{n-1} darab -2 -es; ezzel indukciós bizonyításunkat befejeztük.

A feladat állításának igazolása ebből már következik. A szóban forgó 2^{n-1} hely $[-2, 2]$ -ben 2^n részintervallumot hoz létre, amelyeknek csak határpontjai lehetnek közösek. Ezeknek az intervallumoknak az egyik végén $P_n(x) - x$ pozitív, másik végén negatív, mivel a részintervallumokban (az $x=2$ hely kivételével) $x < 2$; ezért a részintervallumok belsejében $P_n(x) - x$ -nek van nulla helye, azaz a $P_n(x) = x$ egyenletnek gyöke. Az utolsó intervallumban a függvény a bal végpontban negatív, a jobb végpontban nemnegatív, ezért ebben is van gyök. Így tehát a $P_n(x) - x$ egyenletnek van 2^n különböző valós gyöke, több azonban nincs, mivel $P_n(x) - x$ fokszáma éppen 2^n .

Megjegyzések. 1. A 2. megoldás utolsó lépésében bizonyítottaknak szemléletes tartalma a következő: Mivel $[-2, 2]$ -ben a $P_n(x)$ függvény $2^{n-1} + 1$ -szer veszi fel a 2 és 2^{n-1} -szer a -2 értéket, az $y = P_n(x)$ egyenletű függvénygörbét az $y = x$ egyenes legalább 2^n pontban metszi, méghozzá a $P_n(x) = x$ egyenlet gyökhelyein (1976/2.1. ábra).

2. A $P_n(x) = x$ egyenletet $(P_{n-1}(x))^2 - 2 = x$ alakba írva kapjuk, hogy egyenletünk

$$P_{n-1}(x) = \pm \sqrt{2+x}$$

alakban is megadható; ezt folytatva nyerjük, hogy

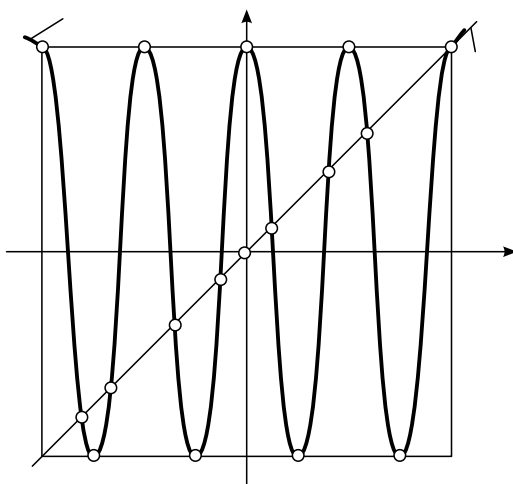
$$P_{n-2}(x) = \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{2+x}}$$

\vdots

$$(2) \quad P_1(x) = \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{2 \pm \dots \pm \sqrt{2+x}}} = x^2 - 2$$

$$x = \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{2 \pm \dots \pm \sqrt{2+x}}}.$$

Ez az utóbbi alak lényegében 2^n egyenlet, mert ennyi az előjelek variációinak a száma, mivel n négyzetgyökjel szerepel benne. Egyenletrendszerünk egy-egy



76/2.1. ábra

megoldását tehát megkaphatjuk úgy is, hogy a (2) egyenletben konkrét előjelvariációt szerepeltetünk. Ez azt jelenti, hogy az (1) alatti t értékekkel az $x = 2 \cos t$ számok kielégítik valamilyen előjelvariációval a (2) egyenletet. Ez összhangban van azzal az ismert összefüggéssel, mely szerint ha az a_1, a_2, \dots, a_n számok mindegyike $+1$ vagy -1 , akkor

$$2 \sin \left(a_1 + \frac{a_1 a_2}{2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{2^2} + \dots + \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{2^n} \right) \frac{\pi}{4} = \\ = a_1 \sqrt{2 + a_2 \sqrt{2 + \dots + a_n \sqrt{2}}}.$$

(Ld. pl. Skljarszkij–Csencov–Jaglom: Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből. 1. kötet. 195. feladat. Tankönyvkiadó, Bp. 1965).

1976/3. Egy téglalakú doboz teljesen kitölthető egységnyi élű kockákkal. Ha úgy helyezzük bele a lehető legtöbb, 2 egységnyi térfogatú kockát, hogy azok élei rendre párhuzamosak legyenek a doboz élével, akkor a doboz belső terének pontosan 40%-át töltik ki.

Állapítsuk meg az összes lehetséges, ilyen tulajdonságú doboz élének a hosszát. ($\sqrt[3]{2} = 1,2599 \dots$).

Megoldás. Legyenek a téglalakú doboz élei a, b, c , a kétegyeségyi térfogatú kockák pedig ε ($\varepsilon^3 = 2$). A megadott közelítő értékből

$$(1) \quad \frac{5}{4} = 1,25 < \varepsilon < 1,2857 \dots = \frac{9}{7}$$

Ha az ε élű kockákkal a doboz 40%-át, azaz $\frac{2}{5}$ részét tudjuk kitölteni maximálisan, akkor ezek a kockák együttesen szintén téglalattá tolhatók össze, különben még lehetne a dobozba több kockát is elhelyezni.

A téglalattal a hosszúságú él mentén maximálisan $\left\lceil \frac{a}{\varepsilon} \right\rceil$ számú kocka helyezhető el, ezért a kitöltés térfogata

$$2 \left\lceil \frac{a}{\varepsilon} \right\rceil \left\lceil \frac{b}{\varepsilon} \right\rceil \left\lceil \frac{c}{\varepsilon} \right\rceil = abc \cdot \frac{2}{5},$$

ebből

$$\frac{abc}{\left\lceil \frac{a}{\varepsilon} \right\rceil \left\lceil \frac{b}{\varepsilon} \right\rceil \left\lceil \frac{c}{\varepsilon} \right\rceil} = 5.$$

Vezessük be az $t_n = \frac{n}{\left\lceil \frac{n}{\varepsilon} \right\rceil}$ jelölést. Feladatunk ezek szerint a

$$(2) \quad t_a t_b t_c = 5$$

egyenlet megoldásának a meghatározása. Készítsünk t_n -re egy értéktáblázatot:

n	2	3	4	5	6	7	8
t_n	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{4}{3}$
	2,00	1,50	1,33	1,67	1,50	1,40	1,33

Ennek alapján kézenfekvő t_n -re bizonyos alsó- és felsőbecslést végezni. Egyrészt — tekintettel (1)-re

$$(3) \quad t_n \geq \frac{n}{\frac{n}{\varepsilon}} = \varepsilon > \frac{5}{4},$$

másrészt

$$t_n = \varepsilon \frac{\frac{n}{\varepsilon}}{\left[\frac{n}{\varepsilon}\right]} < \varepsilon \frac{\left[\frac{n}{\varepsilon}\right] + 1}{\left[\frac{n}{\varepsilon}\right]} = \varepsilon \left(1 + \frac{1}{\left[\frac{n}{\varepsilon}\right]}\right),$$

ebből, ha $n \geq 8$, $\left[\frac{n}{\varepsilon}\right] \geq \left[\frac{8}{\varepsilon}\right] = [6,34] = 6$, és így

$$(4) \quad t_n < \varepsilon \left(1 + \frac{1}{6}\right) < \frac{9}{7} \cdot \frac{7}{6} = \frac{3}{2}.$$

A táblázatbeli értékekre, ha $n > 2$, $t_n \leq \frac{5}{3}$, ha tehát a , b és c 2-nél nagyobbak,

$$t_a t_b t_c \leq \left(\frac{5}{3}\right)^3 = 4,62 \dots < 5,$$

ami ellentmond (2)-nek; természetesen a (4)-ből adódó $n \geq 8$ esetén érvényes összefüggések alapján is ez a helyzet; ez azt jelenti, hogy a , b és c közül legalább egy 2-vel egyenlő; legyen pl. $a = 2$, ekkor $t_a = 2$ és így (2)-ből

$$(5) \quad t_b t_c = \frac{5}{2}$$

következik.

t_b és t_c egyike sem lehet 2, mert ez (3)-nak mondana ellent. (4) következménye, hogy b és c egyike sem lehet 7-nél nagyobb, mert akkor azt kapjuk, hogy

$$t_b t_c < \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{2}, \quad \text{ill.} \quad t_b t_c < \left(\frac{3}{2}\right)^2 < \frac{5}{2}$$

ami (5)-tel áll ellentétben, ezért

$$(6) \quad 3 \leq b, c \leq 7.$$

Mivel

$$abc = 5 \left[\frac{a}{\varepsilon}\right] \left[\frac{b}{\varepsilon}\right] \left[\frac{c}{\varepsilon}\right],$$

b és c közül az egyik osztható 5-tel, ez (6) miatt csak $b = 5$ vagy $c = 5$ esetben lehetséges; tegyük fel, hogy $b = 5$, tehát $t_b = \frac{5}{3}$ és így (5)-ből $t_c = \frac{3}{2}$ és így c lehetséges értékei tekintettel (4)-re és a táblázatra: $c = 3$ vagy $c = 6$.

A lehetséges téglatestek ezek szerint (2, 3, 5) vagy (2, 5, 6). Az ilyen téglatestek valóban kielégítik a feladat feltételeit; az első térfogata 30 és $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ kocka helyezhető el benne, a második térfogata 60, a benne elhelyezett kockák száma $1 \cdot 3 \cdot 4 = 12$, a térfogatarány mind a két esetben 40%-os.

1976/4. Számítsuk ki olyan pozitív egész számok szorzatának a maximumát, amelyek összege 1976.

1. megoldás. Mivel 1976-ot csak véges sok módon lehet pozitív egészek összegére bontani, van olyan felbontás, amelyben az összeadandók szorzata maximális. Legyenek az ebben a felbontásban résztvevő egészek a_1, a_2, \dots, a_n ; tehát $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1976$; jelölje ezek szorzatát M , $M = a_1 a_2 \dots a_n$.

Az a_i -k között nincs 1-es, mert $a_i = 1$ -et elhagyva és a_k helyett $a_k + 1$ -et írva az összeg nem változik, a szorzat azonban növekszik, hiszen $1 \cdot a_k < a_k + 1$; ezért $a_i \geq 2$.

$a_i < 5$, mert ellenkező esetben a_i -t $a'_i = 2$ és $a''_i = a_i - 2$ részekre bontva az összeg nem változik, M viszont növekszik, hiszen

$$a'_i a''_i = 2(a_i - 2) = 2a_i - 4 > a_i.$$

Ezek szerint a_i értéke csak 2, 3 vagy 4 lehet. 4 helyett azonban mindig írható $2+2$, ezzel sem az összeg, sem a szorzat nem változik, tehát feltehetjük, hogy az a_i -k között csak 2-esek és 3-asok vannak.

Nem lehet azonban az a_i -k között 2-nél több 2-es, mert $2+2+2$ helyett $3+3$ -at írva az összeg nem változik, a szorzat azonban növekszik.

Eredményünk tehát a következő: bármely pozitív egészet maximális szorzatú pozitív egészek összegére bontva az összeadandók között legfeljebb két 2-es szerepel, a többi 3-as. Mivel $1976 = 3 \cdot 658 + 2$, $a_1 = 2$, $a_2 = a_3 = \dots = a_{658} = 3$ és így $M = 2 \cdot 3^{658}$.

2. megoldás. Induljunk ki ismét abból, hogy 1976 felbontásai közül az $M = a_1 a_2 \dots a_n$ szorzat a maximális, és tegyük fel először, hogy $n \geq 5$.

α) Az a_i -k között nem lehet kettő, amelyek különbsége nagyobb 1-nél, mert ha $a_k - a_j > 1$, akkor az $a'_k = a_k - 1$, $a'_j = a_j + 1$ helyettesítéssel a tényezők összege nem változik meg, szorzatuk viszont

$$a'_k a'_j = (a_k - 1)(a_j + 1) = a_k a_j + a_k - a_j - 1 > a_k a_j$$

miatt növekszik. A felbontásban tehát csak szomszédos egészek szerepelhetnek.

β) Mivel, ha $k \neq 3$

$$3^k > k^3$$

(ez pl. teljes indukcióval igazolható), az a_i -k között nem lehet 2-nél több egyenlő, ha $a_i \neq 3$; ebben az esetben ugyanis az $a_i + a_i + a_i$ összeget a_i darab 3-as összegevel pótolva az összeg változatlan, szorzatuk viszont

$$3^{a_i} > a_i^3$$

miatt növekszik.

Mivel $n \geq 5$, az α) miatt lehetséges kétféle tényező egyikéből legalább 3-nak kell lennie, ezek azonban β) miatt csak 3-asok lehetnek, a másik tényezőfajta

(amiből legfeljebb kettő lehet) 4 vagy 2. A 4-es tényező az összegük és szorzatuk egyenlősége miatt mindig tekinthető két 2-es tényezőnek, ezért a maximális felbontásban csak 3-asok és legfeljebb két 2-es szerepelhet. Mivel $1976 = 3 \cdot 658 + 2$, a maximális szorzat $n \geq 5$ esetén $3^{658} \cdot 2$.

Ha $n < 5$, a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt a maximális szorzat nem lehet nagyobb $\left(\frac{1976}{n}\right)^n$ -nél, viszont

$$\left(\frac{1976}{n}\right)^n < 2 \cdot 3^{658}$$

minden szóbjövő n -re nyilván teljesül.

Megjegyzések. 1. Megoldásainkból kitűnik, hogy ha egy pozitív egész $3k + r$ alakú ($r = 0, 1, 2$), akkor összeadandókra bontva ezek szorzatának maximuma 3^k , $2^2 \cdot 3^{k-1}$, $2 \cdot 3^k$ aszerint, hogy $r = 0, 1, 2$.

2. Ha megszabjuk, hogy az n pozitív egészet k tag összegére bontsuk úgy, hogy szorzatuk maximális legyen, a megoldásainkban alkalmazott gondolatmenettel azt kapjuk, hogy ha $n = kt + r$ ($0 \leq r < k$), a maximális szorzat

$$(t+1)^r t^{k-r}.$$

3. A feladat teljesen általános fogalmazása: az n pozitív valós számot bontsuk fel pozitív összeadandókra úgy, hogy azok szorzata maximális legyen. A feladat lényege itt az összeadandók (azaz a tényezők) számának a meghatározása, mert a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenségből következik, hogy a szorzat csak egyenlő tényezők esetén lehet maximális. Differenciálszámítás felhasználásával bebizonyítható, hogy maximális szorzatnál a tényezők k száma $\left[\frac{n}{e}\right]$, ahol e az Euler-féle szám ($e = 2,7182818 \dots$), vagy pedig ennél 1-gyel nagyobb, tehát a maximális szorzatérték

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \quad \text{vagy} \quad \left(\frac{n}{k+1}\right)^{k+1}.$$

Mivel $\frac{n}{k}$, ill. $\frac{n}{k+1}$ közelítőleg e -vel egyenlő, azt mondhatjuk, hogy maximális szorzatértéknél a tényezők közelítőleg e -vel egyenlők. Ez a mélyebb oka annak, hogy eredeti feladatainkban is ez volt a helyzet, hiszen a felbontást uraló 3-as az e -hez legközelebbi egész.

1976/5. Adott a következő p egyenletből álló $q = 2p$ ismeretlent tartalmazó egyenletrendszer:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1q}x_q = 0,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2q}x_q = 0,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pq}x_q = 0,$$

ahol $a_{ij} \in \{0, 1, -1\}$ ($i = 1, 2, \dots, p$, $j = 1, 2, \dots, q$).

Bizonyítsuk be, hogy az egyenletrendszernek van olyan x_1, x_2, \dots, x_q megoldása, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

az x_1, x_2, \dots, x_q számok egészek;

az x_j számok között van nem 0 ($j = 1, 2, \dots, q$);

$|x_j| \leq q$ ($j = 1, 2, \dots, q$).

Megoldás. Tegyük fel, hogy az egészekből álló

$$(u_1, u_2, \dots, u_q) \text{ és } (v_1, v_2, \dots, v_q)$$

olyan különböző szám q -asok, amelyekre $|u_j| \leq p, |v_j| \leq p$ ($j = 1, 2, \dots, q$) és amelyek helyettesítési értékei az i -edik egyenletben ugyanazt az y_i értéket adják ($i = 1, 2, \dots, p$). Ebben az esetben az

$$(u_1 - v_1, u_2 - v_2, \dots, u_q - v_q)$$

kielégítik az egyenletrendszert és az a), b), c) feltételeket is. Az a), b) feltételek teljesülése közvetlenül következik az u_i -k és v_i -k megadásából, viszont $|u_i - v_i| \leq |u_i| + |v_i| \leq 2p = q$ miatt c) is teljesül.

Feladatunk megoldásához elegendő tehát belátnunk a szóban forgó u_i -k és v_i -k létezését.

Egy ilyen (u_1, u_2, \dots, u_q) -ban u_i értékét $-p \leq u_i \leq p$ miatt $2p + 1$ féleképpen választhatjuk meg, tehát ezek száma:

$$(2p + 1)^q = (2p + 1)^{2p} = (4p^2 + 2p + 1)^p.$$

Meghatározásaink szerint

$$y_i = a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \dots + a_{iq}u_q \quad (i = 1, 2, \dots, p),$$

ezért

$$\begin{aligned} |y_i| &\leq |a_{i1}||u_1| + |a_{i2}||u_2| + \dots + |a_{iq}||u_q| \leq \\ &\leq |u_1| + |u_2| + \dots + |u_q| \leq pq, \end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy y_i legfeljebb $2pq + 1$ különböző értéket vehet fel, tehát az egyenletrendszer jobb oldalán fellépő (y_1, y_2, \dots, y_p) szám p -esek száma legfeljebb

$$(2pq + 1)^p = (4p^2 + 1)^p$$

lehet. Mivel pedig

$$(4p^2 + 4p + 1)^p > (4p^2 + 1)^p,$$

ezért létezik két különböző szám q -as; ezt kellett bizonyítanunk.

1976/6. Egy u_0, u_1, \dots számsorozatot a következőképpen értelmezzük: $u_0 = 2$, $u_1 = \frac{5}{2}$, $u_{n+1} = u_n(u_{n-1}^2 - 2) - u_1$ ($n = 1, 2, \dots$). Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$[u_n] = 2^{\frac{2^n - (-1)^n}{3}} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Megoldás. Állítsuk elő a sorozat néhány kezdő elemét:

$$u_0 = 1 + \frac{1}{1}, \quad u_1 = 2 + \frac{1}{2}, \quad u_2 = 2 + \frac{1}{2}, \quad u_3 = 8 + \frac{1}{8}, \quad u_4 = 32 + \frac{1}{32}, \quad u_5 = 2048 + \frac{1}{2048},$$

ezek így is írhatók:

$$\begin{aligned} u_0 &= 2^0 + \frac{1}{2^0}, & u_1 &= 2^1 + \frac{1}{2^1}, & u_2 &= 2^1 + \frac{1}{2^1}, \\ u_3 &= 2^3 + \frac{1}{2^3}, & u_4 &= 2^5 + \frac{1}{2^5}, & u_5 &= 2^{11} + \frac{1}{2^{11}}. \end{aligned}$$

Ennek alapján alakul ki bennünk az a sejtés, hogy

$$(1) \quad u_n = 2^{f(n)} + 2^{-f(n)}$$

ahol

$$(2) \quad f(n) = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$$

A sejtés a konkrét értékek alapján $n = 0, 1, \dots, 5$ értékekre igaz. Teljes indukcióval bizonyítunk. Tegyük fel, hogy (1) és (2) fennáll valamilyen n egészig. A sorozatot definiáló képlet szerint

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \left(2^{f(n)} + 2^{-f(n)}\right) \left(2^{2f(n-1)} + 2^{-2f(n-1)}\right) - \frac{5}{2} = \\ (3) \quad &= 2^{f(n)+2f(n-1)} + 2^{-f(n)+2f(n-1)} + 2^{f(n)-2f(n-1)} + 2^{-f(n)-2f(n-1)} - \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Térjünk most rá (2) alapján a kitevők átalakítására.

$$\begin{aligned} f(n) + 2f(n-1) &= \frac{1}{3} \left(2^n - (-1)^n + 2^n - (-1)^{n-1} \cdot 2\right) = \\ &= \frac{1}{3} \left(2^{n+1} - (-1)^{n+1}\right) = f(n+1), \\ f(n) - 2f(n-1) &= \frac{1}{3} \left(2^n - (-1)^n - 2^n + (-1)^{n-1} \cdot 2\right) = \\ &= \frac{1}{3} \left(-(-1)^n + (-1)^{n-1} \cdot 2\right) = \frac{1}{3} \left((-1)^{n+1} + 2(-1)^{n+1}\right) = (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Ezek figyelembe vételével (3) így alakul:

$$u_{n+1} = 2^{f(n+1)} + 2^{-f(n+1)} + 2 + 2^{-1} - \frac{5}{2} = 2^{f(n+1)} + 2^{-f(n+1)},$$

ezzel sejtésünket bebizonyítottuk.

$f(n)$ értéke mindig egész, hiszen $2^n - (-1)^n$ mindig osztható 3-mal; viszont $2^{-f(n)} < 1$, ezért

$$[u_n] = \left[2^{f(n)} + 2^{-f(n)} \right] = 2^{f(n)} = 2^{\frac{2^n - (-1)^n}{3}},$$

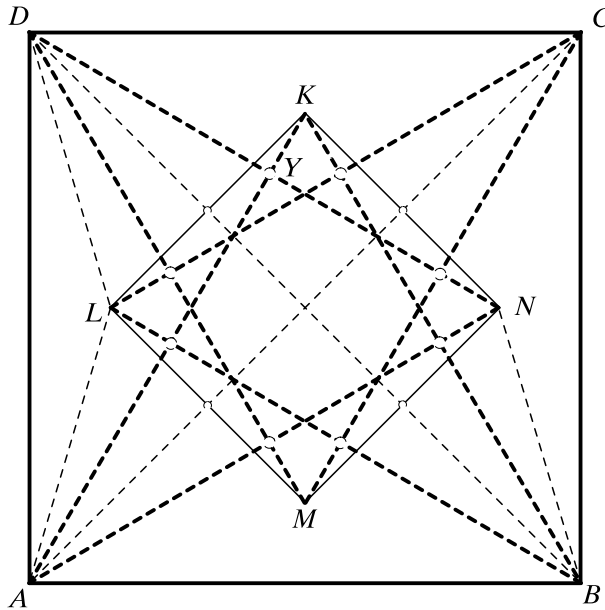
ami bizonyítandó volt.

1977.

1977/1. Az $ABCD$ négyzet oldalaira befelé megrajzoltuk az ABK , BCL , CDM és DAN egyenlő oldalú háromszögeket.

Bizonyítsuk be, hogy a KL , LM , MN , NK szakaszok felezőpontjai az AK , BK , BL , CL , CM , DM , DN és AN szakaszok felezőpontjaival együtt egy szabályos tizenkétszög csúcspontjai.

Megoldás. A vizsgált alakzaton nagyszámú szabályosságot, szimmetriát, szögösszefüggést fedezhetünk fel; ezek kombinációiból sokféle megoldást adhatunk a feladatra; e lehetőségek közül választunk egyet (1977/1.1. ábra).



77/1.1. ábra

Az ABK szabályos háromszögnek a BCL háromszög 90° -os elforgatottja, ezért BK és CL merőlegesek egymásra, sőt BK rajta van CL felező merőlegesén; metszéspontjuk, X , tehát CL felezőpontja; hasonlóan: AK és DN metszéspontja, Y , a DN felezési pontja. Jelölje LK felezőpontját Z , Z nyilván

rajta van a BD átlón is. Legyen a négyzet középpontja O . Az L és M pontok szimmetrikusak az AC átlóra, ezért LM felezőpontja, U , az AC -n van és LM merőleges AC -re.

A feladat állításának bizonyítására elegendő megmutatnunk, hogy ZOY és XOY egybevágó egyenlő szárú háromszögek (a tizenkétszög középponti háromszögei), mert a tizenkétszög többi középponti háromszögét úgy kaphatjuk meg, hogy e két háromszög valamelyikét a négyzet szimmetriatengelyeire tükrözzük. A $KLMN$ négyszög négyzet, mert az O körüli 90° -os elforgatás önmagába viszi át, ezért $ZO = UO$.

Ha a négyzetbe írt szabályos háromszög négyzeten belüli csúcsát (pl. L -et) a hozzá legközelebbi négyzetcsúcsokkal (A -val és D -vel) összekötjük, akkor a keletkezett LAD egyenlő szárú háromszög alapszögei 15° -osak; ez abból következik, hogy az ABL egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei 75° -osak.

Az ACL és BDN egybevágó háromszögekben $AL = BN$, az elsőben XO az AL -l párhuzamos középvonal, a másodikban pedig YO a BN -nel párhuzamos középvonal, ezért $XO = YO$ és mivel AL és BN az AD iránnyal (arra tükrösen) $15^\circ - 15^\circ$ -os szöget zárnak be, az XOY egyenlő szárú háromszög szárszöge 30° -os. Mivel $NBD \sphericalangle = 30^\circ$, a vele egyállású $YOZ \sphericalangle$ is 30° -os. Viszont $ZO = LU = AL/2$, mert az AUL olyan derékszögű háromszög, amelynek egyik szöge 30° -os és minthogy $YO = AL/2$, a ZOY és XOY egybevágó egyenlő szárú háromszögek; ezt kellett bizonyítanunk.

1977/2. Egy valós számokból álló véges sorozatban bármely 7 közvetlenül egymást követő tag összege negatív, míg bármely 11 közvetlenül egymást követő tag összege pozitív.

Állapítsuk meg egy ilyen sorozatban a tagok számának a maximumát.

1. megoldás. Bebizonyítjuk, hogy nem lehet a sorozatnak 17 vagy annál több tagja, 16 viszont lehet. Tegyük fel ugyanis, hogy van a sorozatnak 17 tagja, legyenek ezek: a_1, a_2, \dots, a_{17} ; rendezzük el ezt az alábbi minta szerint:

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_7 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_8 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \dots & a_9 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{17}. \end{array}$$

Táblázatunk bármely sorában negatív a tagok összege, bármely oszlopában azonban pozitív; ha tehát a táblázatban levő számokat soronként adjuk össze, negatív számot, ha oszloponként, akkor pozitív számot kapunk, ami lehetetlen, tehát nem lehet a sorozatnak 17 tagja.

Hogy viszont 16 lehet, azt a következő sorozat mutatja:

$$8, 8, -21, 8, 8, 8, -21, 8, 8, -21, 8, 8, 8, -21, 8, 8.$$

A sorozat tagszámának a maximuma tehát 16.

2. megoldás. Ennek a megoldásnak előnye, hogy a lehetséges maximális tagszámú sorozatra végtelen sok példa szerkesztését is lehetővé teszi.

Jelöljük a sorozat első i tagjának az összegét s_i -vel, egyszerűség kedvéért legyen $s_0 = 0$. A feladat feltételei ezzel azt jelentik, hogy

$$(1) \quad s_{i+7} - s_i < 0, \text{ azaz } s_i > s_{i+7} \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

és

$$(2) \quad s_i - s_{i-11} > 0, \text{ azaz } s_i > s_{i-11} \quad (i = 11, 12, \dots)$$

Ha a sorozatnak lenne 17 eleme, akkor e két egyenlőtlenség többszöri alkalmazásával a következő egyenlőtlenségláncot állíthatnánk elő:

$$(3) \quad \begin{array}{ccccccccccccccccccc} s_7 & & s_{14} & & s_3 & & s_{10} & & s_{17} & & s_6 & & s_{13} & & s_2 & & s_9 & & s_{16} & & s_5 & & s_{12} & & s_1 & & s_8 & & s_{15} & & s_4 & & s_{11} & & s_0 = 0, \end{array}$$

\downarrow

ez viszont ellentmondás, mert $s_7 < 0$.

Tételezzük fel most, hogy a sorozatnak csak 16 tagja van, és kezdjük el ezért az egyenlőtlenségláncot s_6 -tal ((3)-ban a nyíllal jelölt helyen), de folytassuk s_0 -tól tovább:

$$(4) \quad s_0 > s_7 > s_{14} > s_3 > s_{10}$$

Itt most a lánc szükségképpen megszakad, mert sem (1), sem (2) nem alkalmazható. Adjunk most az s_i -knek (3)-at és (4)-et kielégítő, egyébként tetszőleges, értéksorozatot; pl.: $12 > 11 > 10 > \dots$, s foglaljuk táblázatba ezeket az értékeket:

s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_{12}	s_{13}	s_{14}	s_{15}	s_{16}
5	10	-3	2	7	12	-1	4	9	-4	1	6	11	-2	3	8

Mivel $a_i = s_i - s_{i-1}$, ebből a táblázatból a sorozat összeállítható:

$$5, 5, -13, 5, 5, 5, -13, 5, 5, -13, 5, 5, 5, -13, 5, 5$$

Mínt hogy az s_i -k sorozata végtelen sokféle módon megadható, végtelen sok olyan 16-tagú sorozatot tudunk előállítani, amely a feladat feltételeinek megfelel.

3. megoldás. Tegyük fel, hogy a sorozatnak van 17 tagja; megmutatjuk, hogy ez a feltevés ellentmondásra vezet.

Válasszunk ki a sorozatban $11 - 7 = 4$ tetszőleges egymásutáni tagot. Mivel a sorozatnak van 17 tagja, van a sorozatnak 11 olyan tagja, amelynek a kiválasztott tagnégyes az első 4 vagy az utolsó négy tagja. Mivel a 4 tagot így kiegészítő 7 tag összege negatív, a 11 tagé pedig pozitív, kell, hogy a 4 tag összege pozitív legyen; ez azt jelenti, hogy a sorozat bármely 4 egymást követő tagjának összege pozitív.

Válasszunk most ki tetszőleges $7 - 4 = 3$ tagot. Van a sorozatnak 7 olyan tagja, amelynek ez a taghármas kezdő vagy utolsó 3 tagja. Mivel a 7 tag összege

negatív, a kiegészítő 4 tag összege pozitív, a kiválasztott 3 tag összege szükségképpen negatív; ez azt jelenti, hogy a sorozat bármely 3 egymást követő tagjának összege negatív.

Válasszunk most ki tetszőleges $4 - 3 = 1$ tagot. Ennek pozitívnak kell lennie, mert ha 3 taggal 4 tagú sorozatrészletté egészítjük ki, pozitív összeget kapunk, a 3 tag összege viszont negatív. Ez azt jelenti, hogy a sorozat tetszőleges tagja pozitív, nyilván ellentmond a feladat feltételeinek, tehát nem létezhet 17 tagú, a feltételeket kielégítő sorozat.

Hogy 16 tagú sorozat kielégítheti a feladat feltételeit, arra előző megoldásainkban már adtunk példákat.

Megjegyzések. 1. Az 1. megoldásban adott módszerrel megmutatható, hogy ha egy sorozatban n egymást követő tag mindig negatív, p egymást követő tag mindig pozitív, akkor a sorozatnak nem lehet $n + p - 1$ tagja.

2. Megfigyelhetjük, hogy a 3. megoldás módszere emlékeztet a legnagyobb közös osztót meghatározó euklidészi algoritmus lépéseire, lényegében ti. erről van szó. Ezzel a módszerrel bebizonyítható, hogy ha egy véges sorozatban n egymást követő tag összege mindig negatív, p egymást követő tagé mindig pozitív, akkor a sorozatnak nem lehet $n + p - (n, p)$ tagja, ahol (n, p) n és p legnagyobb közös osztóját jelenti. Ha n és p relatív prímek — mint a mi példánkban is — a sorozatnak nem lehet $n + p - 1$ tagja.

1977/3. Legyen n adott, 2-nél nagyobb természetes szám. Jelöljük V_n -nel az $1 + kn$ alakú számok halmazát, ahol $k = 1, 2, \dots$. Egy $m \in V_n$ számot V_n -ben felbonthatatlannak mondunk, ha nincsenek olyan $p, q \in V_n$ számok, amelyekre $pq = m$. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $r \in V_n$ szám, amely több mint egyféleképpen állítható elő V_n -ben felbonthatatlan számok szorzataként.

1. megoldás. A V_n -beli számokról néhány egyszerű megállapítást teszünk:

α) Az 1 nincs V_n -ben.

β) Két V_n -beli szám szorzata is V_n -hez tartozik: ha $k_1n + 1 \in V_n$ és $k_2n + 1 \in V_n$, akkor

$$(k_1n + 1)(k_2n + 1) = (k_1k_2n + k_1 + k_2)n + 1 \in V_n.$$

γ) $k_1n - 1$ és $k_2n - 1$ szorzata is V_n -ben van, ti.

$$(k_1n - 1)(k_2n - 1) = (k_1k_2n - k_1 - k_2)n + 1, \quad (n > 2).$$

A V_n -hez tartozó számok sorozata növekvő sorrendben így kezdődik:

$$n + 1, 2n + 1, 3n + 1, \dots, (n + 1)n + 1, (n + 2)n + 1 = (n + 1)^2.$$

Olyan V_n -beli számot kell keresnünk, amely legalább kétféle módon bontható fel V_n -ben felbonthatatlan számok szorzatára.

Legyen $a = n - 1$, $b = 2n - 1$. β , ill. γ alapján állíthatjuk, hogy a^2 , b^2 , ab , $(ab)^2$ V_n -beli számok. $(ab)^2$ két felbontása:

$$ab \cdot ab = a^2 \cdot b^2.$$

Ez a két felbontás különböző, mert pl. $a^2 = ab$ -ből $a = b$ következne, ami lehetetlen.

Be kell látni, hogy a^2 , b^2 , ab V_n -ben felbonthatatlanok.

a^2 felbonthatatlan, mert kisebb a V_n -ben felbontható legkisebb számnál, $(n + 1)^2$ -nél.

Ha $b^2 = (2n - 1)^2$ felbontható lenne, egyik tényezője csak $n + 1$ lehetne, mert különben mindkét tényezője legalább akkora lenne, mint a felbonthatatlan számok sorozatának második eleme, $2n + 1$, ami $(2n + 1)^2 > (2n - 1)^2$ miatt lehetetlen. Ha tehát b^2 felbontható, akkor csak

$$b^2 = (2n - 1)^2 = (n + 1)(cn + 1) \quad (c \text{ pozitív egész})$$

lehetséges, amiből

$$n = \frac{c + 5}{4 - c}.$$

Ez csak $c = 3$ esetén ad n -re pozitív egész értéket, amikor is $n = 8$. Ha tehát $n \neq 8$, b^2 felbonthatatlan.

Az $ab = (n - 1)(2n - 1)$ felbontásában nem lehet mindkét tényező $(n + 1)$ -nél nagyobb, mert $(2n + 1)^2 > (n - 1)(2n - 1)$, ezért, ha ab felbontható ez csak

$$(n - 1)(2n - 1) = (n + 1)(dn + 1)$$

alakban lehetséges, ahol d pozitív egész. Ebből:

$$n = \frac{d + 4}{2 - d},$$

ami csak $d = 1$, $n = 5$ esetben lehetséges. Ez azt jelenti, hogy ab felbonthatatlan, ha $n \neq 5$.

Feladatunkat megoldottuk abban az esetben, ha $n \neq 5$, $n \neq 8$. Megmutatjuk, hogy a feladat állítása ezekben az esetekben is igaz.

Ha $n = 5$, $3 \cdot 5 + 1 = 16$, $15 \cdot 5 + 1 = 76$, $72 \cdot 5 + 1 = 361$ V_5 -beli számok felbonthatatlanok, mert nincs két $5k + 1$ alakú tényezőjük, viszont

$$76^2 = 76 \cdot 76 = 16 \cdot 361,$$

tehát $76^2 \in V_5$ kétféle módon is felbontható.

Ha $n = 8$, $8 \cdot 8 + 1 = 65$, $3 \cdot 8 + 1 = 25$, $21 \cdot 8 + 1 = 169$ V_8 -beli számok felbonthatatlanok, mert nincs két $8k + 1$ alakú tényezőjük, viszont

$$65^2 = 65 \cdot 65 = 25 \cdot 169,$$

tehát $65^2 \in V_8$ kétféle módon is felbontható.

2. megoldás. A feladat eredetére mutat rá az alábbi megoldás; felhasznál azonban egy súlyos számelméleti tételt, nevezetesen L. Dirichlet-nek a tételét,

mely szerint az $an + b$ számtani sorozatban, ahol a, b egészek relatív prímek, n tetszőleges pozitív egész, végtelen sok prímszám van.

Ebből mindössze annyit akarunk felhasználni, hogy az $nk - 1$ alakú számok között ($k = 1, 2, \dots$) van három különböző prím:

$$p_1 = nq - 1, \quad p_2 = nr - 1, \quad p_3 = ns - 1,$$

ahol q, r, s pozitív egészek. Ezek egyike sincs V_n -ben mert akkor pl.

$$nq - 1 = nk + 1$$

következnék, amiből $n(q - k) = 2$, ami lehetetlen, hiszen $n > 2$.

p_1p_2, p_2p_3, p_3p_1 és p_3^2 elemei V_n -nek, azonban V_n -ben felbonthatatlanok, mivel prímosztóiuk nincsenek V_n -ben. $p_1p_2p_3^2 \in V_n$ és legalább kétféle módon felbontható:

$$(p_1p_3)(p_2p_3) = (p_1p_2)p_3^2.$$

E két felbontás különböző, mert ellenkező esetben pl. $p_1p_3 = p_3^2$, $p_1 = p_3$ teljesülne; ezzel állításunkat bizonyítottuk.

Megjegyzések. 1. A feladat kikötései közül az $n > 2$ szükséges, mert $n = 2$ esetben V_n a 3-nál nem kisebb páratlan számok halmaza; a felbonthatatlan számok itt prímek, s minden páratlan szám, ha felbontható két prímszám szorzatára, az csak egyféle módon lehetséges.

2. A feladat 2. megoldásához felhasznált Dirichlet-tétel a feladathoz képest valóban „nagyágyú”; felhasználását azonban a verseny zsűrije teljes értékű megoldásnak fogadta el. Feladatunk 3. megoldása az általános Dirichlet-tétel helyett annak csak egy viszonylag egyszerűen bizonyítható speciális esetét használja fel.

3. megoldás. Feladatunk megoldását három segédtételezre alapozzuk.

1. segédétel: Végtelen sok olyan prímszám van, amely nem $kn + 1$ alakú (n, k pozitív egészek, $n > 1$ rögzített szám).

Ha ugyanis csak véges sok ilyen prímszám lenne, legyenek ezek t_1, t_2, \dots, t_s , és képezzük az $U = nt_1t_2 \dots t_s - 1$ számot. U nem osztható a t_i -k egyikével sem, ezért csak $kn + 1$ alakú prímosztója lehet; azonban az ilyen prímek szorzata is $kn + 1$ alakú, U viszont nem ilyen; ezért kell, hogy végtelen sok olyan prímszám legyen, amely nem $kn + 1$ alakú.

2. segédétel: Van olyan a egész, amelyre $1 < a < n$, és végtelen sok $kn + a$ alakú prímszám létezik (k pozitív egész).

Az 1. segédétel szerint ugyanis végtelen sok $kn + r$ alakú prím létezik, amelyre $1 < r < n$. r lehetséges értékei $2, 3, \dots, n - 1$, ezért van közöttük olyan $r = a$, amelyre végtelen sok $kn + a$ alakú prím létezik. Jelöljük a $kn + a$ alakú prímek halmazát P -vel.

3. segédétel: Van olyan $\alpha \leq n$ pozitív egész kitevő, hogy az a^α hatvány $kn + 1$ alakú, ahol a a 2. segédételben értelmezett pozitív egész.

Ennek bizonyítására figyeljük meg, hogy az a, a^2, \dots, a^{n+1} hatványok között van kettő, amelyeknek n -nel való osztási maradéka egyenlő; legyenek ezek a^{α_1} és a^{α_2} ($\alpha_2 > \alpha_1$). De akkor $a^{\alpha_2} - a^{\alpha_1} = a^{\alpha_1}(a^{\alpha_2 - \alpha_1} - 1)$ osztható n -nel. Az a és n relatív prímek, különben P elemei mind oszthatók lennének a és n legnagyobb közös osztójával, tehát nem lehetnének prímek. Ebből következik, hogy $a^{\alpha_2 - \alpha_1} - 1$ osztható n -nel, ezért $\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha$ jelöléssel $a^\alpha - 1 = kn$ (k pozitív egész), tehát

$$(1) \quad a^\alpha = kn + 1.$$

α nagyobb 1-nél, mert $\alpha = 1$ esetén $a = kn + 1$ következne, ami $a < n$ miatt lehetetlen, tehát $\alpha \geq 2$. Válasszuk ki az (1) feltételnek eleget tevő α -k közül a legkisebbet, legyen ez u (előbbi megjegyzésünk szerint $u \geq 2$); válasszunk ki most P -ből u számú tetszőleges prímet, legyenek ezek p_1, p_2, \dots, p_u . A $p = p_1 p_2 \dots p_u$ szám $An + a^u$ alakú, ahol A pozitív egész; u választása miatt viszont az a^u hatvány $Bn + 1$ alakú (B pozitív egész), és így $p = Cn + 1$ (C pozitív egész), p tehát eleme V_n -nek.

A p egész V_n -ben felbonthatatlan, mert ha felbontható lenne, a p_1, p_2, \dots, p_u prímek közül néhánynak, mondjuk s -nek ($s < u$) a szorzata benne lenne V_n -ben, tehát $kn + 1$ alakú lenne; de mivel ezek szorzata $Dn + a^s$ alakú (D pozitív egész), ez azt jelentené, hogy a^s n -nel osztva 1-et adna maradékkal, ami $s < u$ miatt ellentmond u definíciójának. Ez azt jelenti, hogy P -ből tetszőlegesen kiválasztva u számú prímet, ezek szorzata benne van V_n -ben, de V_n -ben felbonthatatlan.

Végül válasszuk ki P -ből a p_1, p_2, \dots, p_u ; q_1, q_2, \dots, q_u prímeket. Ezek szorzata pl. a

$$\begin{aligned} p_1 p_2 \dots p_u q_1 q_2 \dots q_u &= (p_1 p_2 \dots p_u)(q_1 q_2 \dots q_u) = \\ &= (q_1 p_2 p_3 \dots p_u)(p_1 q_2 q_3 \dots q_u) \end{aligned}$$

egyenlőség alapján legalább kétféleképpen bontható fel V_n -ben felbonthatatlan számok szorzatára.

1977/4. Legyenek a, b ; A és B adott valós számok, továbbá legyen

$$(1) \quad f(x) = 1 - a \cos x - b \sin x - A \cos 2x - B \sin 2x.$$

Ismeretes, hogy x minden valós értéke esetén $f(x) \geq 0$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$(2) \quad a^2 + b^2 \leq 2, \quad A^2 + B^2 \leq 1.$$

Megoldás. Ha $a = b = A = B = 0$, akkor (2) nyilván teljesül. Tegyük fel, hogy a és b , ill. A és B közül legalább egy nem nulla. Ebben az esetben

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right) - \\ &\quad - \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos 2x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin 2x \right). \end{aligned}$$

Legyen α az $e\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ egységvektor,

2β pedig az $E\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$ egységvektor irányszöge. Ezekkel

$$f(x) = 1 - \sqrt{a^2+b^2} \cos(x-\alpha) - \sqrt{A^2+B^2} \cos 2(x-\beta),$$

ez akkor is fennáll, ha $a^2+b^2=0$, vagy $A^2+B^2=0$. Mivel $f(x) \geq 0$,

$$\begin{aligned} f(\beta) + f(\pi + \beta) &= 1 - \sqrt{a^2+b^2} \cos(\beta-\alpha) - \sqrt{A^2+B^2} + \\ &+ 1 + \sqrt{a^2+b^2} \cos(\beta-\alpha) - \sqrt{A^2+B^2} = 2(1 - \sqrt{A^2+B^2}) \geq 0, \end{aligned}$$

amiből

$$A^2 + B^2 \leq 1,$$

továbbá

$$\begin{aligned} f\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + f\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) &= 1 - \sqrt{a^2+b^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{A^2+B^2} \sin 2(\alpha - \beta) + \\ &+ 1 - \sqrt{a^2+b^2} \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{A^2+B^2} \sin 2(\alpha - \beta) = 2 - \sqrt{2} \sqrt{a^2+b^2} \geq 0, \end{aligned}$$

amiből

$$a^2 + b^2 \leq 2,$$

ezzel (2)-t bizonyítottuk.

Megjegyzés. A feladat állítása nem fordítható meg abban az értelemben, hogy (2)-ből nem következik $f(x) \geq 0$; pl. $a = \sqrt{2}$, $b = A = B = 0$ esetén $a^2 + b^2 \leq 2$, $A^2 + B^2 \leq 1$, de $f(0) = 1 - \sqrt{2} < 0$.

1977/5. Legyenek a és b pozitív egész számok. Ha $(a^2 + b^2)$ -et elosztjuk $(a + b)$ -vel, a hányados q , a maradék pedig r lesz.

Állapítsuk meg az összes olyan (a, b) számpárt, amelyre

$$(1) \quad q^2 + r = 1977.$$

Megoldás. A feladat feltétele szerint

$$(2) \quad a^2 + b^2 = (a + b)q + r, \quad \text{ahol} \quad 0 \leq r < a + b,$$

ebből

$$q + \frac{r}{a+b} = \frac{a^2+b^2}{a+b}.$$

$r < a + b$ miatt $\frac{r}{a+b} < 1$, és így, felhasználva a számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenséget:

$$q + 1 > \frac{a^2+b^2}{a+b} \geq \frac{a+b}{2},$$

amiből

$$(3) \quad 2(q+1) > a+b$$

adódik. (1)-ből

$$q^2 \leq 1977, \quad \text{tehát} \quad q \leq 44.$$

(3) alapján

$$r < a+b < 2 \cdot 45 = 90.$$

Másrészt (1)-ből

$$q^2 = 1977 - r > 1977 - 90 = 1887,$$

azaz

$$1887 < q^2 < 1977.$$

Mivel e két szám között csak $1936 = 44^2$ négyzetszám, $q = 44$ és így $r = 1977 - 1936 = 41$. Ezeket az adatokat (2)-be helyettesítve kapjuk, hogy

$$a^2 + b^2 = 44(a+b) + 41,$$

$$(a-22)^2 + (b-22)^2 = 1009.$$

A bal oldali négyzetszámok közül az egyik nem lehet kisebb 1009 felénél, tehát legalább 505, ezért szóba jövő értékei az 505 és 1009 közötti négyzetszámok:

$$529, \quad 576, \quad 625, \quad 676, \quad 729, \quad 784, \quad 841, \quad 900, \quad 961.$$

A végződéseket is figyelembe véve egyszerűen kapjuk, hogy közülük csak 784-et lehet négyzetszámmal 1009-re kiegészíteni, méghozzá $15^2 = 225$ -tel, tehát

$$\{|a-22|, |b-22|\} = \{28, 15\},$$

ebből a lehetséges (a, b) számpárok:

$$(7, 50), \quad (37, 50), \quad (50, 7), \quad (50, 37),$$

s ezek a kiszámított q, r értékekkel valóban kielégítik a feladat feltételeit.

1977/6. Legyen f olyan függvény, amely a pozitív egészek halmazán van értelmezve és függvényértékei is pozitív egészek. Minden pozitív egész n -re teljesül az

$$(1) \quad f(n+1) > f(f(n))$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n -re

$$f(n) = n.$$

1. megoldás. A feladat állítását teljes indukcióval bizonyítjuk. Először: megmutatjuk, hogy $f(1) = 1$. Ehhez mindenekelőtt bebizonyítjuk, hogy van olyan k_0 , amelyre $f(k_0) = 1$. Ha ti. ilyen nem léteznék, képezzük a következő sorozatot:

$$k_1 = f(k_0), \quad k_2 = f(k_1 - 1), \quad \dots, \quad k_i = f(k_{i-1} - 1), \quad \dots$$

Mivel feltételezésünk szerint $f(k_{i-1} - 1) = k_i \neq 1$, $k_i > 1$, $k_i - 1$ pozitív egész, ezért a sorozat létezik.

(1) miatt $f(k_i) > f(f(k_i - 1)) = f(k_{i+1})$, ezért létezik a pozitív egészeknek egy

$$f(k_0) > f(k_1) > \dots > f(k_i) > f(k_{i+1}) > \dots$$

szigorúan monoton csökkenő végtelen sorozata, ami lehetetlen.

Van tehát olyan k_0 pozitív egész, amelyre $f(k_0) = 1$. Azonban nem lehet, hogy $k_0 > 1$ legyen, mert akkor (1)-ből $k_0 - 1 \geq 1$ miatt

$$f(f(k_0 - 1)) < f(k_0) = 1$$

következnék, ami lehetetlen, mert f nem vehet fel 1-nél kisebb értéket, tehát

$$f(1) = 1.$$

Tegyük fel, hogy a feladat állítása igaz valamely k pozitív egészre minden olyan függvényre, amely kielégíti a feladat feltételeit, tehát pl. $f(k) = k$. Azt kell bizonyítanunk, hogy

$$f(k + 1) = k + 1.$$

Képezzük a

$$\varphi(n) = f(n + 1) - 1$$

függvényt. Megmutatjuk, hogy $\varphi(n)$ kielégíti a feladat feltételeit. Először is: (1)-ből következik, hogy $f(n + 1) > 1$, tehát $f(n + 1) - 1$ pozitív egész. Ezért — tekintettel (1)-re:

$$\varphi(\varphi(n)) = \varphi(f(n + 1) - 1) = f(f(n + 1)) - 1 < f(n + 2) - 1 = \varphi(n + 1),$$

ez azt jelenti, hogy $\varphi(n)$ eleget tesz a feladat (1) kikötésének, tehát az indukciós feltétel szerint

$$\varphi(k) = k,$$

azaz

$$\varphi(k) = f(k + 1) - 1 = k, \quad f(k + 1) = k + 1,$$

amit bizonyítanunk kellett.

2. megoldás. Bebizonyítjuk, hogy f szigorúan monoton növekvő. Osszuk be a pozitív egészeket két, közös elem nélküli halmazba, K -ba és M -be.

K azoknak a k pozitív egészeknek a halmaza, amelyekre

$$(2) \quad f(k) < k;$$

M azoknak az n pozitív egészeknek a halmaza, amelyekre

$$(3) \quad f(n) \geq n.$$

Először megmutatjuk, hogy a K halmaz üres. Ha ugyanis lenne eleme, válasszuk ki azt az m elemét, amelyre $f(m)$ a lehető legkisebb, K értelmezése szerint

$$(4) \quad f(m) < m, \quad \text{azaz} \quad f(m) \leq m - 1.$$

$m - 1$ pozitív, hiszen nem kisebb egy függvényértéknél, ezért $f(m - 1)$ létezik és (1) és (4) miatt

$$(5) \quad m > f(m) > f(f(m - 1)).$$

Ez azonban azt jelenti, hogy $f(m - 1)$ nem lehet K eleme, mert $f(f(m - 1))$ (5) miatt kisebb $f(m)$ -nél, de f K -beli elemeken nem vehet fel

$f(m)$ -nél kisebb értéket, ezért $f(m-1) \in M$. Ebből azonban (3) és (5) miatt

$$(6) \quad m > f(m) > f(f(m-1)) \geq f(m-1).$$

Ugyanilyen megfontolással következik, hogy $m-1$ sem lehet K -ban, hiszen $f(m-1) < f(m)$ és K elemeihez tartozó függvényértékek nem lehetnek kisebbek $f(m)$ -nél, tehát $m-1 \in M$ és így (3) alapján

$$f(m-1) \geq m-1,$$

s ezt (4)-gyel egybevetve kapjuk, hogy

$$f(m-1) \geq f(m).$$

Ez azonban ellentmond (6)-nak, tehát K -nak nem lehet eleme s így minden pozitív egész n -re (3) teljesül. Így tehát (1)-ből (3) alkalmazásával

$$f(n+1) > f(f(n)) \geq f(n),$$

azaz

$$f(n+1) > f(n)$$

következik, tehát f szigorúan monoton növekvő.

Ebből már következik, hogy (3)-ban az egyenlőség jele érvényes, mert ha valamilyen n -re $f(n) > n$ teljesülne, az azt jelentené, hogy $f(n) \geq n+1$, de akkor a monotonitás miatt

$$f(f(n)) \geq f(n+1)$$

állana fenn, ami ellentmond (1)-nek, tehát minden n -re

$$f(n) = n,$$

amit bizonyítanunk kellett.

1978.

1978/1. Az m és n természetes számokra $n > m > 1$. Az 1978^m és az 1978^n tízes számrendszerbeli alakjában az utolsó három jegy sorrendben is megegyezik. Keressük meg azt az m -et és n -et, amelyre $m+n$ a legkisebb.

Megoldás. 1978^n és 1978^m akkor és csakis akkor végződik ugyanarra a számhármásra, ha különbségük:

$$1978^n - 1978^m = 1978^m(1978^{n-m} - 1)$$

osztható 1000-rel. Minthogy $1000 = 8 \cdot 125$, a 8-cal és 125-tel való oszthatóságot kell vizsgálnunk.

A második tényező páratlan és 1978 2-nek csak első hatványával osztható, ezért m -nek legalább 3-nak kell lennie, hogy 1978^m 8-cal legyen osztható, tehát $m \geq 3$.

125-tel csak $1978^{n-m} - 1$ lehet osztható. Mivel 1978 hatványainak a végződéseire rendre 8, 4, 2, 6, 8, 4, ..., tehát 4-es periódust mutatnak és így csak

a 6-os végződés esetén lehet $1978^{n-m} - 1$ 5-tel osztható, vagyis akkor, ha $n - m = 4k$ alakú. Mivel 1978 125-ös maradéka -22 és $(-22)^4$ 125-ös maradéka 6, $1978^{4k} - 1$ akkor osztható 125-tel, ha $6^k - 1 = (1+5)^k - 1$ is osztható 125-tel.

A binomiális tétel alkalmazásával

$$(1+5)^k - 1 = 5k + 5^2 \frac{k(k-1)}{2} + \dots$$

a további tagok már oszthatók $5^3 = 125$ -tel, ezért

$$5k + 25 \frac{k(k-1)}{2} = \frac{5k}{2}(5k-3)$$

oszthatóságát kell vizsgálnunk. $5k - 3$ relatív prím 125-höz, $5k$ viszont akkor osztható 125-tel, ha k osztható 25-tel, és így értéke legalább 25, azaz $n - m = 4k \geq 100$. Mivel $m \geq 3$, $n + m = n - m + 2m \geq 106$. $n + m$ minimális értéke ezért 106, s ebben $m = 3$, $n = 103$.

1978/2. Egy gömb belsejében adott egy P pont. A gömb felületén úgy helyezkednek el az A , B , C pontok, hogy PA , PB , PC páronként merőlegesek egymásra. Legyen a PA , PB , PC által meghatározott téglatestnek P -vel szemközti csúcsa Q . Mi a Q pontok mértani helye?

Megoldás. Legyen az adott gömb sugara R , középpontja O , $OP = p$. Megmutatjuk, hogy a keresett mértani hely az O középpontú $\sqrt{3R^2 - 2p^2}$ sugarú gömb.

Legyenek O -ból az A , B , C , P , Q pontokba mutató vektorok rendre \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{p} , \mathbf{q} . Mivel $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ a téglatest testátlóvektora,

$$\mathbf{q} - \mathbf{p} = (\mathbf{a} - \mathbf{p}) + (\mathbf{b} - \mathbf{p}) + (\mathbf{c} - \mathbf{p}),$$

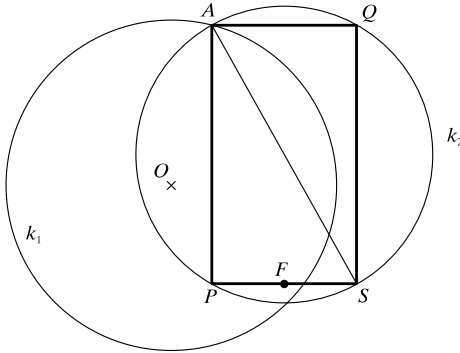
Ebből, mivel $(\mathbf{a} - \mathbf{p})$, $(\mathbf{b} - \mathbf{p})$, $(\mathbf{c} - \mathbf{p})$ páronként merőleges vektorok és $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2 = R^2$,

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^2 &= (\mathbf{p} + (\mathbf{a} - \mathbf{p}) + (\mathbf{b} - \mathbf{p}) + (\mathbf{c} - \mathbf{p}))^2 = \\ &= \mathbf{p}^2 + (\mathbf{a} - \mathbf{p})^2 + (\mathbf{b} - \mathbf{p})^2 + (\mathbf{c} - \mathbf{p})^2 + 2\mathbf{p}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} - 3\mathbf{p}) = 3R^2 - 2p^2, \end{aligned}$$

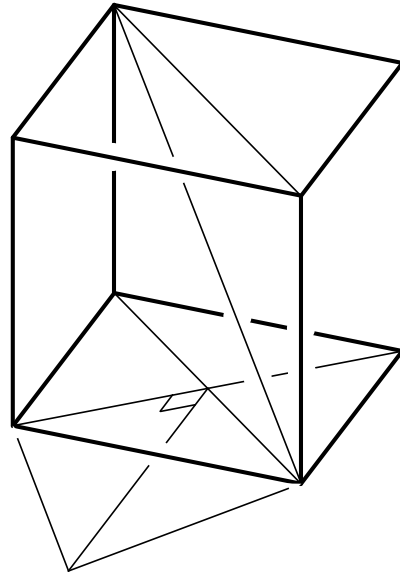
ezzel bizonyítottuk, hogy a Q pontok a megjelölt gömbön vannak.

Meg kell még mutatnunk, hogy ennek a gömbnek egy tetszőleges Q pontja lehet a megadott feltételek mellett téglatestcsúcs. Mivel egy Q -hoz elegendő egyetlen megfelelő téglatestet megadnunk, azt a téglatestet speciálisan választhatjuk.

Fektessünk a P , Q , O pontokon át síkot, ez az eredeti gömbtől egy k_1 kört, a PQ átmérőjű gömbtől egy k_2 kört metsz ki. k_1 és k_2 egyik metszéspontja legyen A . A PAQ derékszögű háromszöget egészítsük ki $PAQS$ téglalappá (1978/2.1a, b ábrák). Erre a téglalapra mint átlómetsetre viszont egy olyan négyzetalapú



78/2.1a ábra



78/2.1b ábra

egyenes hasábot építsünk rá, amelynek alpnégyzete a $PBSC$ négyzet, fedőlapján pedig A és Q szemközti csúcsok. PS felezőpontja legyen F , mivel a BC átló merőleges az átlómetszetre, azaz k_1 síkjára, az OFB háromszög derékszögű.

Állításunk bizonyítására elegendő megmutatnunk, hogy B és C rajta van az adott gömbön; mivel O rajta van BC felező merőleges síkján, elegendő megmutatnunk, hogy $OB = R$.

Felhasználjuk, hogy a tér tetszőleges M pontjának egy $XYZU$ téglalap csúcsaitól mért távolságaira $MX^2 + MZ^2 = MY^2 + MU^2$ áll fenn (ld. 1. megjegyzésünket). Jelöljük alakzatunk pontjainak O kezdőpontú helyvektorait a végpontjaiknak megfelelő kisbetűvel. Az $APSQ$ téglalpra és O -ra alkalmazva e tételt kapjuk, hogy

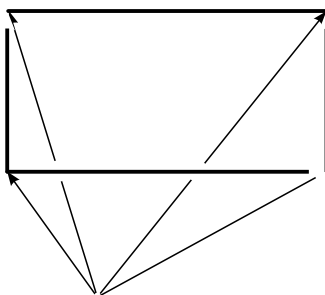
$$s^2 = p^2 + q^2 - a^2 = p^2 + 3R^2 - 2p^2 - R^2 = 2R^2 - p^2.$$

A $PBSC$ négyzetben $FB = \frac{PS}{2} = \frac{|s - p|}{2}$, viszont $|\vec{OF}| = \left| \frac{s + p}{2} \right|$, ezért az OFB derékszögű háromszögből

$$OB^2 = OF^2 + FB^2 = \left(\frac{s + p}{2} \right)^2 + \left(\frac{s - p}{2} \right)^2 = \frac{s^2 + p^2}{2} = \frac{2R^2 - p^2 + p^2}{2} = R^2,$$

B és C az adott gömbön vannak, a szerkesztett négyzetes hasáb tehát kielégíti a feladat feltételeit; ezzel állításunkat bizonyítottuk.

Megjegyzések. 1. A felhasznált téglalap-tétel vektorok segítségével könnyen bizonyítható; legyenek az M pontból az $XYZU$ téglalap csúcsaihoz mutató vektorok $x, x + a, x + a + b, x + b$, ahol a, b a téglalap oldalvektorai (1978/2.2. ábra).



78/2.2. ábra

Mivel $ab=0$,

$$x^2 + (x+a+b)^2 = 2x^2 + a^2 + b^2 + 2ax + 2bx,$$

$$(x+a)^2 + (x+b)^2 = 2x^2 + a^2 + b^2 + 2ax + 2bx,$$

ez pedig éppen azt jelenti, hogy $MX^2 + MZ^2 = MY^2 + MU^2$.

2. Feladatmegoldásunk második részében egy adott P ponthoz megadtunk olyan A, B, C pontokat, hogy PA, PB, PC páronként merőleges szakaszok. A helyzet az, hogy az A, B, C pontok által meghatározott körön végtelen sok olyan A', B', C' ponthármas adható meg, amely a megjelölt tulajdonsággal rendelkezik, pontosabban:

ha egy körkúpnak van három olyan alkotója, amelyek páronként merőlegesek egymásra, akkor végtelen sok van, sőt a kúp minden alkotója eleme ilyen alkotóhármasoknak. Az ilyen tulajdonságú kúpot egyenlő oldalú körkúpoknak nevezik [25].

3. A feladatnak megvan a síkbeli megfelelője is: ha P egy kör belső pontja és az A, B pontok úgy helyezkednek el a körön, hogy a PA, PB szakaszok merőlegesek egymásra, akkor a $PAQB$ téglalapok Q csúcsai az adott körrel egyező körön helyezkednek el.

Ha történetesen az adott kör egy ellipszis főköre, P az egyik fókusza, akkor a Q pontok köre az ellipszisnek ún. ortoptikus görbéje, ennek minden pontjából az ellipszis látószöge derékszög. (Ez pontosabban azt jelenti, hogy Q -ből az ellipszishez húzott két érintő merőleges egymásra.)

1978/3. A pozitív egész számok halmaza megegyezik az

$$F = \{f(1), f(2), \dots, f(n), \dots\} \quad \text{és } a$$

$$G = \{g(1), g(2), \dots, g(n), \dots\}$$

közös elem nélküli halmazok egyesítésével, ahol

$$f(1) < f(2) < \dots < f(n) < \dots \quad \text{és} \quad g(1) < g(2) < \dots < g(n) < \dots,$$

$$(1) \quad g(n) = f(f(n)) + 1 \quad \text{minden } n \geq 1\text{-re.}$$

Határozzuk meg $f(240)$ értékét.

1. megoldás. Elvben semmi akadályja nincs annak, hogy az f és g értékeit rendre kiszámítsuk és így jussunk el $f(240)$ értékéhez, ezt a hosszadalmas utat néhány észrevétellel alaposan megrövidíthetjük.

Számoljuk össze, hány egész szám van 1 és $g(n)$ között. $g(n)$ -et megelőzi $g(1), g(2), \dots, g(n-1)$ mindegyike (ez $n-1$ darab szám), továbbá $g(n) - 1 = f(f(n))$ miatt $f(n)$ darab f érték: $f(1), f(2), \dots, f(f(n))$, ezzel minden 1 és $g(n)$ közötti számot felsoroltunk, tehát

$$(2) \quad g(n) = f(n) + n.$$

Ezt (1)-gyel összevetve kapjuk, hogy

$$(3) \quad f(f(n)) = f(n) + n - 1.$$

G nem tartalmazhatja a számsor két szomszédos elemét, hiszen $g(n)$ -t a számsorban (1) miatt $f(f(n))$ előzi meg; ebből adódik, hogy $g(n)$ után $f(f(n) + 1)$ következik:

$$(4) \quad f(f(n) + 1) = f(f(n)) + 2.$$

Az (1)–(4) összefüggések most már meggyorsíthatják a függvényértékek előállítását. Az 1 csak az F halmazban lehet, mert (2) miatt $g(1) = f(1) + 1$, tehát $f(1) = 1$ és így $g(1) = 2$. (4) alapján

$$f(2) = f(f(1) + 1) = f(f(1)) + 2 = 3.$$

A következő értékeket (3) alapján képezzük:

$$f(3) = f(f(2)) = f(2) + 1 = 4,$$

$$f(4) = f(f(3)) = f(3) + 2 = 6,$$

$$f(6) = 9, f(9) = 14, f(14) = 22, f(22) = 35, f(35) = 56, f(56) = 90.$$

Alkalmazzuk most ismét (4)-et:

$$f(57) = f(f(35) + 1) = f(f(35)) + 2 = 92.$$

Ismét (3)-at alkalmazzuk:

$$f(92) = f(f(57)) = f(57) + 56 = 148,$$

$$f(148) = 239, f(239) = 386.$$

Végül (4) alapján

$$f(240) = f(f(148) + 1) = f(f(148)) + 2 = 388,$$

és ezzel választunk a feladat kérdésére.

2. megoldás. Ez a megoldás lényegesen bonyolultabb az előzőnél, rámutat azonban a feladat mélyebb összefüggéseire és kapcsolataira.

Bebizonyítjuk először, hogy a feladat kikötései az f és g függvényeket egyértelműen meghatározzák. Elegendő megmutatnunk, hogy f egyértelműen meghatározott, (2) alapján ebből már g egyértelmű meghatározottsága is következik.

Állításunkat teljes indukcióval bizonyítjuk. Az előző megoldásban láttuk, hogy $f(1) = 1$. Tegyük fel, hogy $f(n)$ értéke egyértelműen meghatározott minden olyan n -re, amelyek kisebbek egy k pozitív egész számnál. Jelöljük s -sel azt a legkisebb pozitív egészet, amely nincs az $f(1), f(2), \dots, f(k-1); g(1), g(2), \dots, g(k-1)$ számok között. $f(k) < s$ nem lehetséges, mert az s -nél kisebb egészek mind szerepelnek a felsorolt számok között; $f(k) > s$ sem lehetséges, mert ebben az esetben f szigorúan monoton növekedése miatt s nem tartozhatna az F halmazhoz, de a G halmazhoz sem, mert (2) miatt $g(k)$ is nagyobb s -nél, így a feladat kikötéseivel ellentétben sem F -hez, sem G -hez nem tartozna. Tehát szükségképpen $f(k) = s$, és így beláttuk, hogy f és g egyértelműen meghatározott.

Ezek szerint, ha sikerül előállítani egy olyan f, g függvénpárt, amely kielégíti a feladat feltételeit, akkor ez az egyetlen ilyen függvénpár lenne.

A keresett függvénpár előállításához felhasználjuk a következő tételt: ha α és β olyan pozitív irracionális számok, amelyekre

$$(5) \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$$

teljesül, akkor az

$$(6) \quad \{[\alpha], [2\alpha], \dots, [n\alpha], \dots\} \text{ és } \{[\beta], [2\beta], \dots, [n\beta], \dots\}$$

közös elem nélküli halmazok és a két halmaz az egyesítésben minden pozitív egész megtalálható pontosan egyszer [26].

E tételt abban az esetben használjuk fel, ha $1, \alpha, \beta$ egy mértani sorozat egymást követő elemei, tehát $\beta = \alpha^2$, ez (5) alapján azt jelenti, hogy α az

$$(7) \quad \alpha^2 - \alpha - 1 = 0$$

egyenlet pozitív gyöke: $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180\dots, \beta = \alpha^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = 2,6180\dots$

Mivel α és β 1-nél nagyobbak, a (6) alatti sorozatok szigorúan monoton növekednek és ezért kézenfekvő az

$$f(n) = [n\alpha], \quad g(n) = [n\alpha^2]$$

választásunk.

Hogy választásunk megfelelő, már csak (1) teljesülését kell igazolnunk, azaz, hogy

$$(8) \quad [n\alpha^2] = [[n\alpha]\alpha] + 1.$$

Mivel $[n\alpha] < n\alpha$ és így $[n\alpha]\alpha < n\alpha^2$, ezért

$$[[n\alpha]\alpha] \leq [n\alpha^2],$$

egyenlőség azonban nem állhat, mert (6) szerint a bal, ill. jobb oldali mennyiségek különböző halmazokhoz tartoznak, tehát

$$(9) \quad [[n\alpha]\alpha] < [n\alpha^2].$$

Az

$$n\alpha - [n\alpha] < 1 < \alpha$$

egyenlőtlenségből átrendezéssel $n\alpha < \alpha + [n\alpha]$ következik, ebből viszont a (7)-ből következő $\alpha^2 - \alpha = 1$ miatt kapjuk, hogy

$$n\alpha < \alpha + (\alpha^2 - \alpha)[n\alpha].$$

Ha ezt az egyenlőtlenséget α -val elosztjuk, majd átrendezzük, az

$$n + [n\alpha] < \alpha[n\alpha] + 1,$$

$$[n(1 + \alpha)] < \alpha[n\alpha] + 1,$$

egyenlőtlenséget kapjuk, vagy $1 + \alpha = \alpha^2$ helyettesítéssel:

$$[n\alpha^2] < [n\alpha]\alpha + 1,$$

ebből

$$[n\alpha^2] \leq [[n\alpha]\alpha] + 1.$$

Vegyük figyelembe még (9)-et:

$$[[n\alpha]\alpha] < [n\alpha^2] \leq [[n\alpha]\alpha] + 1.$$

Itt azonban a második helyen egyenlőségnek kell állnia, különben két szomszédos egész között lenne egy egész szám, ez éppen (8) teljesülését jelenti.

Eredményünk szerint

$$f(240) = [240\alpha] = [388,3281 \dots] = 388.$$

Megjegyzések. A lépésenként történő függvényérték meghatározásnak még sok lehetősége van. Megemlítjük a következőt:

Az $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ ($n > 1$) rekurzióval értelmezett Fibonacci sorozat és az $f(m)$ függvény között fennáll a következő kapcsolat:

$$(10) \quad f(a_n + 1) = a_{n+1} + 1. \quad (n > 1)$$

Mivel $f(1) = 1$, $f(2) = 3$, $f(3) = 4$, a kezdő értékekre (10) fennáll. A rekurziós definíció szerint (3) felhasználásával

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= f(a_{n+1} + 1) - 1 = f(f(a_{n+1})) - 1 = \\ &= f(a_n + 1) - 1 + a_n = a_{n+1} + a_n, \end{aligned}$$

tehát a kapcsolat valóban fennáll.

1978/4. Az ABC háromszögben $AB = AC$. Egy kör belülről érinti az ABC háromszög köré írt kört, továbbá az AB oldalt a P , az AC oldalt a Q pontban. Bizonyítsuk be, hogy a PQ szakasz felezőpontja az ABC háromszög beírt körének a középpontja.

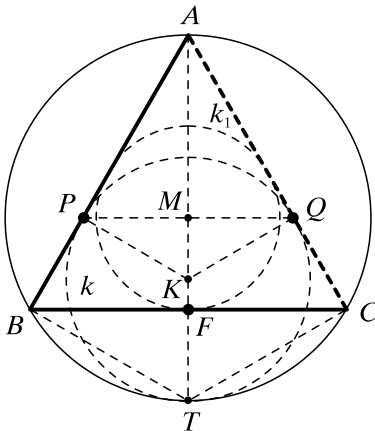
1. megoldás. Jelölje k a köré írt kört érintő, P és Q pontokon átmenő kört, k a köré írt kört T -ben érinti, ez nyilván rajta van a háromszög szimmetriatengelyén és így AT a köré írt kör átmérője.

Jelöljük M -mel PQ és AT metszéspontját, azt kell bizonyítanunk, hogy M a beírt kör középpontja, hiszen a szimmetria miatt M éppen felezőpontja PQ -nak (1978/4.1. ábra).

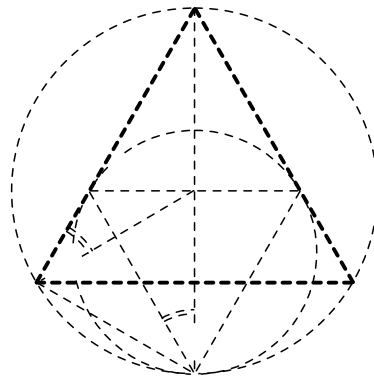
Thálész tételéből következik, hogy BT , ill. CT merőleges az AB , ill. AC szára. Legyen a k kör középpontja K , s így PK , ill. QK is merőleges az AB , ill. AC szára. Ebből következik, hogy az $ABTC$ és $APKQ$ deltoidok az A pontra nézve középpontosan hasonlóak, és így, ha F a BC oldal felezőpontja,

$$\frac{AT}{AF} = \frac{AK}{AM}.$$

Alkalmazzuk most a k körre $\frac{AT}{AF}$ arányú A középpontú kicsinyítést; ez az AB , AC egyeneseket érintő k kört az egyeneseket érintő körbe viszi át, s mivel T -nek F a képe, a képkör F -en is átmegy, tehát azonos a háromszögbe írt k_1 körrel, s ugyanakkor K -t M -be képezi le, tehát k_1 középpontja M , ezt kellett bizonyítanunk.



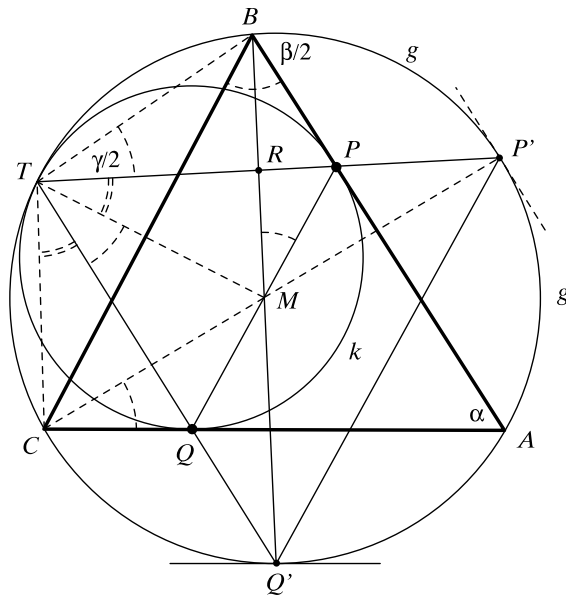
78/4.1. ábra



78/4.2. ábra

2. megoldás. Használjuk az 1. megoldás jelöléseit. Állításunk bizonyítására elegendő megmutatnunk, hogy BM felezi az ABC -et, mert akkor M két szögfelező metszéspontja, tehát a beírt kör középpontja (1978/4.2. ábra). A k körben $PTQ \sphericalangle = APQ \sphericalangle = \beta$ (azonos ívhez tartozó kerületi szögek), viszont $PBTM$ húrnégyszög, mert két szemkötti szöge derékszög, ezért a kerületi szögek tételéből $PBM \sphericalangle = PTM \sphericalangle$ következik, s mivel $PTM \sphericalangle = \frac{\beta}{2}$, ezért $PBM \sphericalangle$ is $\frac{\beta}{2}$ -vel egyenlő; viszont $PBC \sphericalangle = \beta$, ezért $MBC \sphericalangle$ szintén $\frac{\beta}{2}$ -vel egyenlő. Ez pedig azt jelenti, hogy BM szögfelező.

3. megoldás. Megmutatjuk, hogy a feladat állítása nemcsak egyenlő szárú háromszögre igaz, tehát nincs szükség az $AB = AC$ kikötésre.



78/4.3. ábra

Az AB , AC oldalakat és az ABC köré írt g kört érintő kör legyen k , a két kör érintési pontja T . T egyben a két kör hasonlósági pontja, ezért a Q , ill. P pontok hasonlósági megfelelői, a Q' , ill. P' pontok az AC , ill. AB ívek felezőpontjai, mivel g érintői ezekben a pontokban párhuzamosak a hasonlóságban nekik megfelelő AC , ill. AB érintőegyeneseikkel (1978/4.3. ábra).

Mivel az AB ívhez tartozó látószög γ , feléhez, a BP' ívhez $\frac{\gamma}{2}$ tartozik, ezért $\angle BTP' = \frac{\gamma}{2}$. Hasonló indoklással: $\angle Q'TC = \frac{\beta}{2}$. A BQ' szögfelező egy M pontban metszi a PQ szakaszt, mivel a $P'TQ'$ háromszögben a $P'Q'$ párhuzamos PQ -val és Q' , illetve a BQ' és TP' metszéspontja, R , a PQ egyenes különböző oldalán vannak.

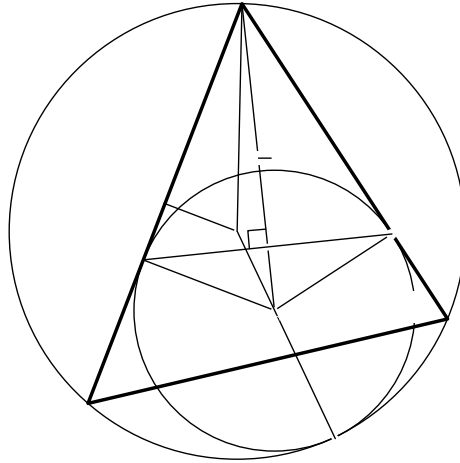
A PMB háromszög P -nél levő külső szöge $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, ezért $\angle PMB = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = \frac{\gamma}{2}$, a BP szakasz ezért a T és M pontokból ugyanakkora $\left(\frac{\gamma}{2}\right)$ szög alatt látszik, $PMTB$ ezért húrnégyszög és így $\angle PTM = \angle PBM = \frac{\beta}{2}$. Minthogy $\angle CTB$ az α kiegészítő szöge és így

$$\angle CTB = \beta + \gamma = \angle BTP' + \angle P'TM + \angle MTQ' + \angle Q'TC = \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{2} + \angle MTQ' + \frac{\beta}{2},$$

$\angle MTQ' = \frac{\gamma}{2}$. Ebből következik, hogy $\angle MTC = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = \angle MQA$, tehát $MTCQ$ húrnégyszög és így $\angle MTQ = \angle MCQ = \frac{\gamma}{2}$. Ez azt jelenti, hogy MC

a γ szög szögfelezője, M tehát két szögfelező metszéspontja, azaz az ABC -be írt kör középpontja. Mivel M így rajta van az egyenlő szárú PAQ háromszög A -ból induló szögfelezőn is, M felezi a PQ szakaszt. Feladatunk állítását ezzel bizonyítottuk.

4. megoldás. Ismert trigonometriai összefüggések felhasználásával viszonylag egyszerű megoldást adhatunk az általánosított feladatra.



78/4.4. ábra

A háromszög köré írt kört T -ben érintő k kör az AB , ill. AC oldalakat a P , ill. Q pontban érinti, a körülírt kör középpontja O , sugara R , a beírt kör sugara r , a k kör középpontja S , sugara ϱ (1978/4.4. ábra).

A kerületi szögek tételéből következik, hogy $\angle QAO = 90^\circ - \beta$ és így $|\angle OAS| = \omega = \left| \frac{\alpha}{2} - (90^\circ - \beta) \right| = \left| \frac{\beta - \gamma}{2} \right|$. (Ábránkban $\beta > \gamma$.)

Mivel O, S, T egy egyenesen vannak, $OS = R - \varrho$; az AQS derékszögű háromszögből $AS = \frac{\varrho}{\sin \frac{\alpha}{2}}$. Alkalmazzuk az AOS háromszögre a koszinusztételt:

$$\begin{aligned} OS^2 &= OA^2 + AS^2 - 2OA \cdot AS \cos \omega, \\ (R - \varrho)^2 &= R^2 + \frac{\varrho^2}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{2R\varrho}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cos \frac{\beta - \gamma}{2}. \end{aligned}$$

Ebből átalakítások után kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \varrho \cos^2 \frac{\alpha}{2} &= 2R \sin \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\beta - \gamma}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right) = \\ &= 2R \sin \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\beta - \gamma}{2} - \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \right) = 2R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

Ismert összefüggés szerint $4R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = r$, és így

$$(1) \quad \varrho = \frac{r}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Jelölje M az AS és PQ szakaszok metszéspontját (azaz PQ felezőpontját). Mivel a PMS derékszögű háromszögben $SPM \angle = \frac{\alpha}{2}$, $MS = \varrho \sin \frac{\alpha}{2}$, $MP = \varrho \cos \frac{\alpha}{2}$, az SPA derékszögű háromszögre alkalmazva a magasságra vonatkozó mértani-közép tételt kapjuk, hogy $MP^2 = AM \cdot MS$, azaz (1) felhasználásával:

$$AM = \frac{MP^2}{MS} = \frac{\varrho^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\varrho \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Mivel az A csúcs távolsága a beírt kör középpontjából $\frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}}$, M a beírt kör középpontja, amivel a feladat állítását bizonyítottuk.

Megjegyzések. 1. A feladat 3. megoldása lényegében azonos az 1969/4. feladat 2. megoldásával; ha ott a megoldás első részében a D és B pontokat azonosítjuk, a most bemutatott 3. megoldást kapjuk meg.

2. Az 1978/4.3. ábrát figyelmesen szemlélve rájöhettünk a feladatkör eredetére s egyben egy „nyilvánvaló” megoldására. Az ábráról a 3. megoldásban mondottak alapján lényegében azt kell bizonyítani, hogy P , Q és M egy egyenesen vannak. Ez viszont az ún. Pascal=tétel közvetlen következménye.

Pascal tétele a következőket mondja ki: legyen 1, 2, 3, 4, 5, 6 egy kúpszelet (tehát pl. kör) hat tetszőleges pontja. Akkor az 12 és 45 egyenesek metszéspontja, a 23 és 56 egyenesek metszéspontja és a 34 és 61 egyenesek metszéspontja egy egyenesen van (feltéve persze, hogy léteznek).

Az 1978/4.3. ábra alakzatán legyen $A=1$, $B=2$, $Q'=3$, $T=4$, $P'=5$, $C=6$, ekkor Pascal tétele szerint az AB és TP' metszéspontja: P , BQ' és $P'C$ metszéspontja: M , $Q'T$ és CA metszéspontja: Q egy egyenesen sorakozik, amit éppen bizonyítanunk kellett.

1978/5. Álljon az $\{a_k\}$ sorozat ($k=1, 2, \dots, n, \dots$) különböző pozitív egész számokból. Bizonyítsuk be, hogy minden n pozitív egészre

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Megoldás. Először egy segédételt bizonyítsunk be: legyenek x_1, x_2, \dots, x_n ; y_1, y_2, \dots, y_n olyan valós számok, amelyekre $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$, $y_1 \leq y_2 \leq$

$\leq \dots \leq y_n$, továbbá z_1, z_2, \dots, z_n az y_i -k valamilyen permutációja, akkor

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \sum_{i=1}^k x_i z_i.$$

Ha az y_i és z_i számok elrendezése ugyanaz, akkor (2)-ben nyilván az egyenlőség érvényes. Tegyük fel, hogy az y_i és z_i számok először a k -adik helyen különböznek, azaz $y_1 = z_1, y_2 = z_2, \dots, y_{k-1} = z_{k-1}$, de $y_k \neq z_k$ ($1 \leq k < n$), hanem $z_k = y_r$ és $y_k = z_s$, ahol r és s k -nál nagyobb sorszámok, tehát $r > k$ és $s > k$. Jelöléseink szerint

$$x_k z_k + x_s z_s = x_k y_r + x_s y_k.$$

Viszont $x_k y_r + x_s y_k \geq x_k y_k + x_s y_r$, mert ez egyenértékű az

$$(x_k - x_s)(y_k - y_r) \leq 0$$

egyenlőtlenséggel. Ebből már következik, hogy a $\sum x_i y_i$ alakú összeg, ahol az x_i -k csökkenően vannak elrendezve, akkor a legkisebb, ha az y_i -k viszont növekvőleg rendezettek; a fenti típusú összegek között ui. van legkisebb, hiszen véges sok van belőlük, és ez a legkisebb érték csak az y_i -k növekvő elrendezése mellett léphet fel, különben fenti megfontolásunk szerint az összeg még csökkenthető volna.

Segédteételünk alapján állításunkat a következő módon bizonyíthatjuk: legyen az a_k -k növekvő sorrendje egy adott tetszőleges n esetében

$$a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq \dots \leq a_{i_n}.$$

Viszont

$$\frac{1}{1^2} > \frac{1}{2^2} > \frac{1}{3^2} > \dots > \frac{1}{n^2},$$

ezért (2) alapján

$$(3) \quad \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^n \frac{a_{i_k}}{k^2}.$$

Mivel $a_{i_1} \geq 1, a_{i_2} \geq 2, \dots, a_{i_k} \geq k, \dots, a_{i_n} \geq n$, ezért (3)-ból következik, hogy

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k},$$

ami bizonyítandó volt.

Megjegyzések. 1. Segédteételünk az 1975/1. feladatban bizonyított megfelelőjével együtt így hangzik (ld. még erről a [35] kiegészítést):

A $\sum x_i y_i$ alakú összeg akkor a legnagyobb, ha az x_i -k és y_i -k azonos módon vannak rendezve és akkor a legkisebb, ha rendezésük ellentétes.

2. Feladatunk állításának következménye, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^2}$ sor divergens (végtelenhez tart), mert ugyanez áll a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ sorra is. Ez azonban már nem áll akkor, ha az a_k -k között csak véges sok különböző van, ha ui. közülük a a legnagyobb,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^2} &\leq a \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) < a \left(1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n-1)} \right) = \\ &= a \left(1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = a \left(2 - \frac{1}{n} \right) < 2a, \end{aligned}$$

tehát a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^2}$ sor minden részletösszege kisebb $2a$ -nál, ezért a sor konvergens és összege kisebb $2a$ -nál. Ha történetesen valamennyi a_k 1-gyel egyenlő, a sor összege ismert: $\sum_1^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} = 1,6449 \dots$

1978/6. Egy nemzetközi társaságnak 1978 tagja van 6 különböző országból. A tagokat 1-től 1978-ig számozták meg. Mutassuk meg, hogy van legalább egy olyan tag, akinek a sorszáma megegyezik két honfitársa sorszámának az összegevel, vagy kétszer akkora, mint egy honfitársa sorszáma.

1. megoldás. A feladat állítása egyenértékű a következővel: a társaságban található két, ugyanabból az országból való tudós, akik sorszámának a különbsége egy ugyanabból az országból való tudós sorszámával egyenlő.

Feltesszük, hogy az állítás nem igaz, ebből ellentmondásra fogunk jutni. Legyenek az országok: A, B, C, D, E és F . Az egyik országból – mondjuk A -ból – legalább 330 tudós van a társaságban, mert $6 \cdot 329 = 1974 < 1978$. Legyenek ezek sorszámai:

$$a_1 < a_2 < \dots < a_{330}.$$

Feltevésünk szerint az

$$(1) \quad a_2 - a_1, a_3 - a_1, \dots, a_{330} - a_1$$

sorszámmal rendelkező 329 tudós egyike sem lehet A -beli, hanem a többi 5 ország valamelyikéből való.

Mivel $5 \cdot 65 = 325 < 329$, valamelyik országból, — mondjuk B -ből — legalább 66 van az (1) alatti sorszámúak között, legyen ezek sorszáma

$$b_1 < b_2 < \dots < b_{66}.$$

Ekkor a

$$(2) \quad b_2 - b_1, b_3 - b_1, \dots, b_{66} - b_1$$

sorszámú 65 tudós egyike sem lehet B -beli, de A -beli sem, mert ha pl. $b_2 - b_1 = (a_k - a_1) - (a_j - a_1) = a_k - a_j$ A -beli lenne, ez ellentmondana az A -ra vonatkozó feltevésünknek.

Minthogy $4 \cdot 16 = 64 < 65$, a (2) alatt felsorolt tudósok között van 17, akik ugyanabból az országból, — mondjuk C -ből — valók. Legyen ezek sorszáma

$$c_1 < c_2 < \dots < c_{17}.$$

A

$$(3) \quad c_2 - c_1, c_3 - c_1, \dots, c_{17} - c_1$$

sorszámú 16 tudós egyike sem tartozhat c_1 -hez, de B -hez sem, mert akkor pl. $c_k - c_1 = (b_s - b_1) - (b_r - b_1) = b_s - b_r$ lenne, ami ellentmond a B -re tett kikötéseinknek, s hasonlóan A -hoz sem tartozhat.

Mivel $3 \cdot 5 = 15 < 16$, van legalább 6 tudós a (3) alatti sorszámúak között, akik A , B , C egyikéhez sem tartoznak, hanem — mondjuk D -hez. Legyen ezek sorszáma

$$d_1 < d_2 < \dots < d_6.$$

A

$$(4) \quad d_2 - d_1, d_3 - d_1, \dots, d_6 - d_1$$

sorszámú 5 tudós egyike sem tartozhat D -hez, s ugyanolyan indoklással, mint az előzőekben láttuk, A -hoz, B -hez és C -hez sem. Mivel $2 \cdot 2 = 4 < 6$, van legalább 3 tudós a (4) alattiak között, akik az E -vel jelölt országhoz tartoznak, ezek sorszámai:

$$e_1 < e_2 < e_3.$$

Az $e_2 - e_1$ és $e_3 - e_1$ sorszámú tudósok E , A , B , C , D egyikéhez sem tartoznak, tehát szükségképpen F -beliek:

$$f_1 = e_2 - e_1 \quad \text{és} \quad f_2 = e_3 - e_1.$$

Ez azonban azt jelenti, hogy az $f_1 - f_2$ sorszámú tudós egyik országhoz sem tartozhat, tehát a feladat állításának a tagadása ellentmondásra vezet; ezért a feladat állítása igaz.

2. megoldás. Feladatunknak most egy általánosabb, gráfelméleti átfogalmazását bizonyítjuk be.

Legyen

$$(5) \quad n_k = k! \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!} \right) + 1.$$

Ha egy n_k csúcsú teljes gráf éleit k színnel színezzük, akkor biztosan lesz a gráfban három egyszínű él, amely háromszöget alkot. A k színnel való színezést úgy értjük, hogy nem kell feltétlenül mind a k színnek résztvennie a színezésben.

Tételünket k szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk be. $k = 1$ esetén $n_1 = 3$; itt nyilvánvaló az egyszínű háromszög létezése. Tegyük fel, hogy az állításunk valamilyen k értékig igaz, azt kell bizonyítanunk, hogy $k + 1$ esetén is teljesül.

Előrebocsátjuk, hogy (5)-ből egyszerűen következik a

$$(6) \quad (k+1)(n_k - 1) = n_{k+1} - 2 < n_{k+1} - 1$$

összefüggés.

Válasszunk ki az n_{k+1} csúcsú, $k + 1$ színnel színezett teljes gráfból egy tet-szőleges P csúcsot; ebből $n_{k+1} - 1$ él indul ki, amelyek $k + 1$ színnel vannak színezve. Ezek között kell, hogy legyen n_k számú egyszínű él, hiszen (6) szerint $(n_k - 1)(k + 1)$ kisebb, mint a P -ből induló élek száma. Legyen a szóban forgó n_k számú él színe piros és végpontjaik egy n_k csúcsú G teljes gráfot alkotnak. Ha ennek élei között van piros színű, akkor az eredeti gráfban nyilván van piros háromszög.

Ha G -ben nincs piros él, akkor G olyan n_k csúcsú teljes gráf, amelynek élei k színnel vannak színezve, tehát az indukciós feltevés szerint van egyszínű háromszöge, amivel gráfelméleti tételünket bizonyítottuk.

Ez a gráfelméleti tétel természetesen érvényben marad akkor is, ha benne n_k csúcs helyett „legalább n_k csúcs” szerepel.

Az eredeti feladatot most már a következő módon oldhatjuk meg: rendel-jük hozzá minden tudóshoz egy 1978 csúcsú teljes gráf egyik csúcsát, a csú-csokat lássuk el a tudósok sorszámaival. Mind a hat országhoz rendeljünk hozzá egy színt, az i -vel, ill. j -vel számozott csúcs összekötő élet annak az országnak a színével színezzük, amelyhez az $|i - j|$ sorszámu tudós tartozik. Mivel $n_6 = 1958 < 1978$, van a gráfban egyszínű háromszög; legyenek az ezekhez tartozó sorszámozatok $i < j < k$. Ebben az esetben a $j - i$, $k - j$, $k - i$ sorszámu tudósok ugyanabból az országból valók és

$$(j - i) + (k - j) = k - i,$$

ahogy azt a feladat megkívánja. Ha $j - i = k - j$, akkor $k - i$ éppen kétszer ak-kora, mint $j - i$, tehát megfelel a feladat feltételeinek.

Megjegyzések. 1. A feladat 2. megoldásában megfogalmazott gráfelméleti tétel beletartozik a több feladatunkat érintő Ramsey-féle problémakörbe [13].

2. Az irodalomban az (5) jobb oldalán levő kifejezést $[ek!] + 1$ -gyel jelölik, ahol e a természetes logaritmus alapszáma (Euler-féle szám). Ennek jogosságát úgy láthatjuk be, hogy megmutatjuk:

$$(7) \quad ek! + 1 - n_k = ek! - (n_k - 1) < 1.$$

Mivel

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots,$$

$$\begin{aligned}
 ek! &= k! \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!} \right) + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \dots \\
 &= n_k - 1 + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \dots
 \end{aligned}$$

Ebből, ha $k > 1$,

$$\begin{aligned}
 ek! - (n_k - 1) &= \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \dots < \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} + \dots = \\
 &= \frac{1}{k+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{k+1}} = \frac{1}{k} < 1,
 \end{aligned}$$

s mivel (7) $k = 1$ esetben nyilvánvalóan teljesül, (7)-et minden n -re beláttuk.

1979.

1979/1. Legyenek p és q olyan pozitív egészek, amelyekre fennáll, hogy

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}.$$

Bizonyítsuk be, hogy p osztható 1979-cel.

Megoldás. Végezzük el a megadott összegre a következő átalakításokat:

$$\begin{aligned}
 \frac{p}{q} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1319} - \\
 &- 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{1318} \right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1319} - \\
 &- \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{659} \right) = \frac{1}{660} + \frac{1}{661} + \dots + \frac{1}{1319} = \\
 &= \left(\frac{1}{660} + \frac{1}{1319} \right) + \left(\frac{1}{661} + \frac{1}{1318} \right) + \dots + \left(\frac{1}{989} + \frac{1}{990} \right) = \\
 &= 1979 \left(\frac{1}{660 \cdot 1319} + \frac{1}{661 \cdot 1318} + \dots + \frac{1}{989 \cdot 990} \right).
 \end{aligned}$$

A zárójelben levő kifejezés közös nevezőre hozás után $\frac{a}{b}$ alakú, ahol a pozitív egész, $b = 660 \cdot 661 \cdot \dots \cdot 1319$. Mivel 1979 prímszám és b minden tényezője kisebb 1979-nél, b és 1979 relatív prímek. A $\frac{p}{q} = \frac{1979a}{b}$ -ből $pb = 1979aq$ következik, ezért 1979 kell, hogy osztója legyen p -nek.

Megjegyzés. A feladat minden további nélkül általánosítható a $3k+2$ alakú prímszámokra: ha

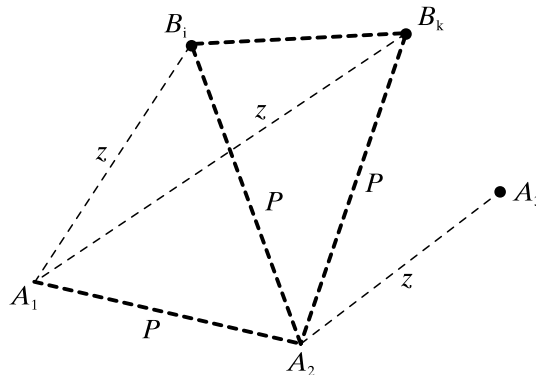
$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1},$$

akkor p osztható $3k+2$ -vel.

1979/2. Egy ötoldalú hasáb alaplapja az $A_1A_2A_3A_4A_5$, fedőlapja a $B_1B_2B_3B_4B_5$ ötszög. E két ötszög mindegyik oldalát, továbbá valamennyi A_iB_j szakaszt ($i, j = 1, 2, \dots, 5$) pirosra vagy zöldre színezzünk. Minden olyan háromszögnek, amelynek csúcsai egyúttal a hasáb csúcsai is és amelynek mindegyik oldala színezett, van két különböző színű oldala. Mutassuk meg, hogy ekkor az alaplapnak és a fedőlapnak összesen tíz oldala mind egyforma színű.

Megoldás. A feladatban szereplő színezett szakaszokat rövidség kedvéért élnek fogjuk nevezni. Először belátjuk, hogy az alap-, ill. fedőlapnak mind az öt éle azonos színű. Tegyük fel ugyanis, hogy pl. az alaplapon van két, különböző színű szomszédos él, az egyik zöld, a másik piros, és megmutatjuk, hogy ez ellentmondásra vezet.

Legyen a két él közös csúcsa A_2 , A_1A_2 piros, A_2A_3 pedig zöld (1979/2.1. ábra). Az A_2 -ből a fedőlaphoz vezető 5 él között van 3 azonos színű, pl. pi-



79/2.1. ábra

ros. Mivel egy ötszög három csúcsa közül kettő biztosan szomszédos, a 3 piros él közül kettő két szomszédos ötszögcúscshoz vezet, legyenek ezek B_i és B_k . Mivel minden háromszögben vannak különböző színű oldalak, A_1B_k és A_1B_i szükségképpen zöldek, de akkor a $B_iB_kA_1$ háromszögben B_iB_k -nak pirosnak kellene lennie, ami ellentmondás, mert így $A_2B_iB_k$ egyszínű háromszög lenne. Az alaplapon tehát minden él egyszínű, s mivel az alap- és fedőlap szimmetrikus szerepű, a fedőlap élei is azonos színűek.

Most már csak azt kell megmutatni, hogy az alap- és fedőlap azonos színű. Tegyük fel, hogy az alaplap piros. A pirosszínű A_1A_2 alapélnak legalább az

egyik végpontjába a fedőlap B_i csúcsából zöld él vezet; az A_1, A_2 csúcspárba tehát a fedőlap csúcsokból legalább 5 zöld él megy, ezért az egyikbe, mondjuk A_1 -be, három. Az A_1 -ből a fedőlaphoz vezető három zöld él közül kettő szomszédos csúcsban végződik, ezért ezek összekötő éle, tehát az egyik fedőlapél, piros. De akkor a bizonyítottak értelmében minden fedőlapél piros.

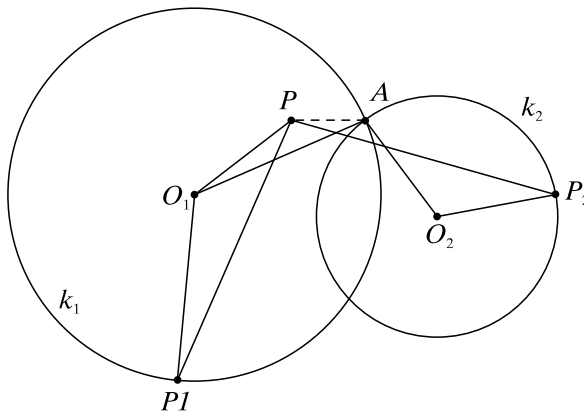
Megjegyzés. Az alap- és fedőlaphoz csak azt használtuk ki, hogy páratlan oldalszámú sokszögek, még az oldalszám egyezése sem volt szükséges feltétel. Lényegében tehát a következő gráfelméleti tételt bizonyítottuk:

Legyenek a G gráfban p és q olyan páratlan számú élekből álló körutak, hogy p két nem szomszédos csúcsát nem köti él össze és ugyanez igaz a q körútra is, viszont minden p -beli csúcsot él köt össze q minden csúcsával. Színezzük G éleit két színnel úgy, hogy ne legyen G -ben egyszínű háromszög; ekkor a p és q körutak minden éle azonos színű.

1979/3. Adott a síkon két egymást metsző körvonal, k_1 és k_2 ; jelölje A az egyik metszéspontjukat. Két tömegpont: P_1 és P_2 mozog k_1 -en, illetve k_2 -n állandó szögsebességgel ugyanabban a forgási irányban. Mozgásukat egy időben kezdik az A pontban és egy-egy körüljárás után ismét egyidejűleg érkeznek az A pontba.

Bizonyítsuk be, hogy van a síkban olyan rögzített P pont, amelyre a mozgás minden időpontjában érvényes a $PP_1 = PP_2$ egyenlőség.

1. megoldás. Legyen k_1 , illetve k_2 középpontja O_1 , illetve O_2 ; sugaraik r_1 , illetve r_2 . Néhány speciális eset vizsgálata könnyen kialakíthatja sejtésünket: válasszuk P -nek az A pont tükörképét az O_1O_2 felező merőlegesére (1979/3.1. ábra).

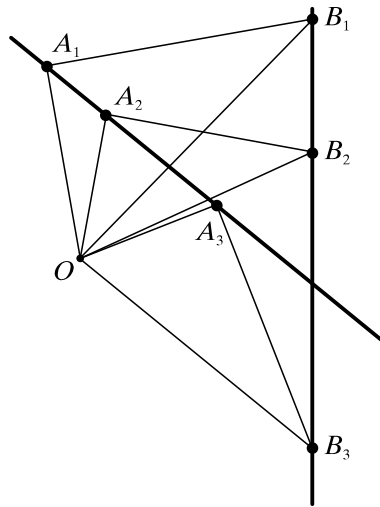


79/3.1. ábra

Legyen P_1 , ill. P_2 a mozgó pontok egy-egy helyzete, ez azt jelenti, hogy $AO_1P_1 \triangleleft = AO_2P_2 \triangleleft$. Mivel az AO_1P háromszög szimmetrikus a PO_2A háromszöggel, $PO_1A \triangleleft = PO_2A \triangleleft$ és így egyenlő szögek összegeként $PO_1P_1 \triangleleft = PO_2P_2 \triangleleft$, továbbá ugyancsak a szimmetria miatt $AO_1 = PO_2 = r_1$ és $AO_2 = PO_1 = r_2$. Ebből már következik, hogy a PO_1P_1 és PO_2P_2 háromszögek meg-egyeznek két-két oldalban és az ezek által közrezárt szögben, tehát egybevágók, és így $PP_1 = PP_2$, ami bizonyítandó volt.

Megjegyezzünk, hogy ez utóbbi két szakasz egyenlősége akkor is fennáll, ha P, O_1, P_1 , ill. P, O_2, P_2 egy-egy egyenesbe esnek, ekkor a szóban forgó szakaszok hossza $r_1 + r_2$ ill. $|r_1 - r_2|$.

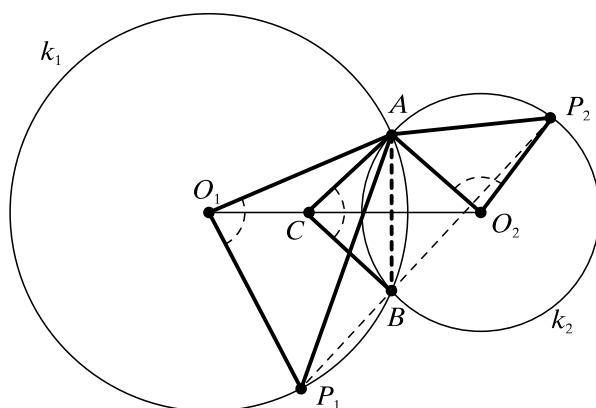
2. megoldás. Vizsgálatunknál a következő észrevételből indulunk ki: ha $OA_1B_1, OA_2B_2, OA_3B_3$ egyező körüljárású hasonló háromszögek és A_1, A_2, A_3 egy egyenesen vannak, akkor a B_1, B_2, B_3 pontok is egy egyenesen sorakoznak (1979/3.2. ábra). Ez egyszerűen abból következik, hogy az O középpontú OB_1/OA_1 arányú és A_1OB_1 szögű forgatva nyújtás az A_1, A_2, A_3 ponto-



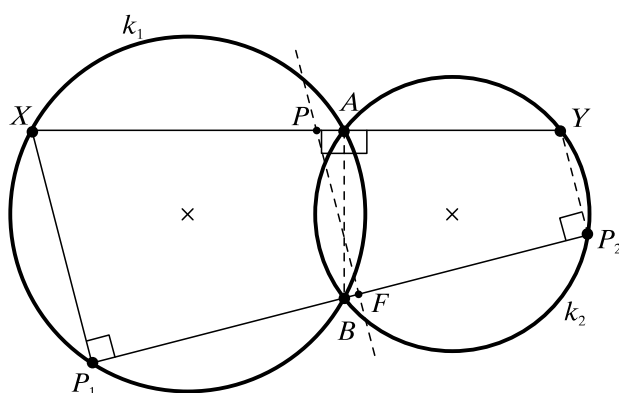
79/3.2. ábra

kat rendre a B_1, B_2, B_3 pontokba viszi át, s mivel a forgatva nyújtás egyenest egyenesre képez le, az A_1, A_2, A_3 pontokat tartalmazó egyenes a B_1, B_2, B_3 pontokat tartalmazó egyenesbe megy át. Ez igaz abban az esetben is, ha $O, A_1, B_1; O, A_2, B_2; O, A_3, B_3$ egy egyenesbe eső hasonló ponthármasok.

Tegyük most fel, hogy a P_1 és P_2 pontok körük középpontja körül α szöggel fordultak el ($0 < \alpha < 2\pi$) (1979/3.3. ábra), így tehát AO_1P_1, AO_2P_2 (esetleg egyetlen szakasszá fajuló) hasonló, egyező körüljárású egyenlő szárú háromszögek. Mivel az O_1O_2 egyenes az AB szakasz felező merőlegese, (B a két kör



79/3.3. ábra



79/3.4. ábra

második közös pontja) van rajta olyan C pont, hogy az ACB háromszög hasonló az AO_1P_1 háromszöghöz és vele egyező körüljárású.

Mivel így AO_1P_1 , AO_2P_2 és ACB egyező körüljárású hasonló háromszögek és O_1 , O_2 , C egy egyenesen vannak, ezért bevezető észrevételünk szerint P_1 , P_2 és B is mindig egy egyenesen van. A feladat bizonyításakor azt kell tehát megmutatnunk, hogy P_1P_2 felező merőlegese a mozgás minden helyzetében átmegy egy fix ponton. Állítsunk ezért merőlegest A -ban az AB egyenesre; ez a k_1 -et másodszor X -ben, k_2 -t Y -ben metszi (1979/3.4. ábra); legyen XY felezőpontja P , ez nyilván független a mozgó pontok helyzetétől.

Thalész tételéből következik, hogy k_1 -ben BX , k_2 -ben pedig BY átmérő, ezért az XP_1P_2Y derékszögű trapéz (esetleg hurkolt, vagy háromszöggé fajuló). P_1P_2 felező merőlegese a trapéz középvonala, tehát átmegy az XY szár P felezőpontján; ezt kellett bizonyítanunk.

Megjegyzés. A 2. megoldás alapvető észrevétele az a tény, hogy P_1 , P_2 és B egy egyenesen vannak; ezt egyszerű szögszámítással is bizonyíthatnánk. Hogy

mégis a forgatva nyújtást alkalmaztuk igazolására, annak az oka, hogy ennél a meg gondolásnál viszonylag kevés, a pontok helyzetétől függő diszkusszióra van szükség. A feladat állítása természetesen analitikus vagy trigonometriai módszerekkel is bizonyítható.

1979/4. Adott a π síkon egy P pont és a π síkon kívül egy Q pont. Határozzuk meg a π síknak valamennyi olyan R pontját, amelyre a

$$(1) \quad \frac{QP + PR}{QR}$$

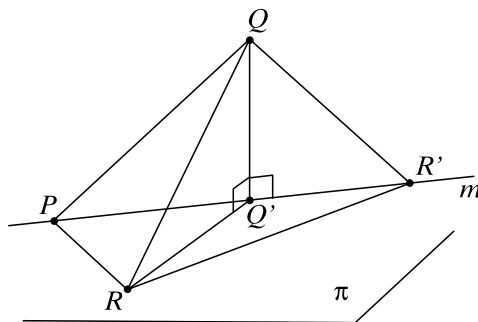
hányados értéke maximális.

Megoldás. Legyen a Q pont merőleges vetülete a π síkon Q' , és legyen m a PQ' egyenes; ha $P = Q'$, akkor m egyenesként a π sík tetszőleges, Q' -n átmenő egyenesét választjuk. Megmutatjuk, hogy ha R nincs rajta m -en, akkor van m -nek olyan R' pontja, amelyre

$$\frac{QP + PR}{QR} < \frac{QP + PR'}{QR'},$$

tehát minden m -en kívüli R ponthoz van m -nek olyan R' pontja, amelyre (1) nagyobb értéket ad.

Ha ui. R nincs rajta m -en, mérjük fel m -re Q' -ből kiindulva a P -t nem tartalmazó félegyenesre a $Q'R' = Q'R$ távolságot (1979/4.1. ábra). A $QQ'R$ és $QQ'R'$ háromszögek egybevágósága miatt $QR = QR'$, és a háromszög-



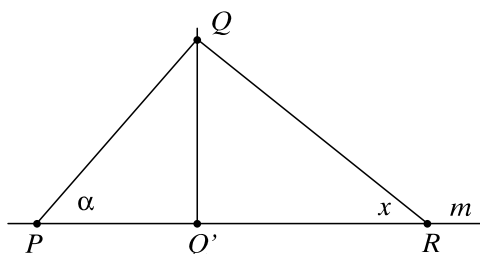
79/4.1. ábra

egyenlőtlenségből $PR < PQ' + Q'R = PQ' + Q'R' = PR'$ következik, ebből:

$$\frac{QP + PR}{QR} = \frac{QP + PR}{QR'} < \frac{QP + PR'}{QR'},$$

ez azt jelenti, hogy a maximumot adó R pontokat m -en kell keresnünk.

A továbbiakban ezért feltesszük, hogy R az m -en van (1979/4.2. ábra). Legyen $\angle QPR = \alpha$ (állandó) és $\angle QRP = x$, alkalmazzuk a szinusztételt a QPR



79/4.2. ábra

háromszögben:

$$\begin{aligned}\frac{QP + PR}{QR} &= \frac{QP}{QR} + \frac{PR}{QR} = \frac{\sin x}{\sin \alpha} + \frac{\sin(\alpha + x)}{\sin \alpha} = \\ &= \frac{1}{\sin \alpha} 2 \sin \frac{2x + \alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} \sin \left(x + \frac{\alpha}{2} \right).\end{aligned}$$

Kifejezésünk akkor a legnagyobb, ha $\sin \left(x + \frac{\alpha}{2} \right) = 1$, azaz $x + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ$, $x = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Ebből $\angle PQR = 180^\circ - (x + \alpha) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = x$, tehát PQR egyenlő szárú, $QP = RP$.

Megjegyezzük, hogy az m egyenesen két olyan R pont van, amelynek P -től mért távolsága QP -vel egyenlő. (1) számlálója mindkét szóbaeső R -re egyenlő, ha azonban $P \neq Q'$, QR ott kisebb (azaz (1) ott nagyobb), ahol QPR hegyesszög. A megoldást adó egyetlen R -et ebben az esetben tehát úgy kapjuk meg, hogy PQ -nak a π -n levő merőleges vetületét Q' -n túl meghosszabbítjuk úgy, hogy PQ -val legyen egyenlő, és a meghosszabbított szakasz végpontja R .

Ha $P = Q'$, gondolatmenetünk szerint a maximumot szolgáltató R pontok annak a π -n fekvő körnek a pontjai, amelynek a középpontja P és sugara PQ -vel egyenlő.

1979/5. Határozzuk meg az összes b valós számot, amelyhez léteznek a

$$(1) \quad \sum_{k=1}^5 kx_k = b, \quad \sum_{k=1}^5 k^3 x_k = b^2, \quad \sum_{k=1}^5 k^5 x_k = b^3$$

egyenleteket kielégítő x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 nemnegatív valós számok.

1. megoldás. (1) alapján

$$b^2 \sum_{k=1}^5 kx_k - 2b \sum_{k=1}^5 k^3 x_k + \sum_{k=1}^5 k^5 x_k = b^3 - 2b^3 + b^3 = 0,$$

azaz

$$0 = \sum_{k=1}^5 x_k (b^2 k - 2bk^3 + k^5) = \sum_{k=1}^5 k(b - k^2)^2 x_k.$$

Ezt az utóbbi eredményt írjuk ki részletesen:

$$(2) \quad (b-1)^2 x_1 + 2(b-4)^2 x_2 + 3(b-9)^2 x_3 + 4(b-16)^2 x_4 + 5(b-25)^2 x_5 = 0.$$

A bal oldali öt tag egyike sem negatív, ezért csak úgy lehet az összegük 0, ha minden tag 0. Ez akkor következik be, ha

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0, \quad b = 0,$$

vagy ha valamelyik $x_k \neq 0$, akkor — mondjuk — a k -adik tagban $b - k^2 = 0$, azaz $b = k^2$. Ebben az esetben viszont a többi tagban $b - k^2 \neq 0$, tehát szükségképpen $x_k = 0$. Foglaltuk táblázatba a meggondolásainkból származó megoldásokat:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1
0	2	0	0	0	4
0	0	3	0	0	9
0	0	0	4	0	16
0	0	0	0	5	25

Világos, hogy ezek az értékek kielégítik (1)-et.

2. megoldás. A Cauchy-féle egyenlőtlenséget alkalmazzuk, mely szerint, ha $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n$ tetszőleges valós számok, akkor

$$(3) \quad \sum_1^n a_k^2 \sum_1^n b_k^2 \geq \left(\sum_1^n a_k b_k \right)^2,$$

és egyenlőség akkor és csakis akkor állhat, ha van olyan t , hogy $a_k = t b_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) vagy pedig valamennyi $b_k = 0$ [22].

Legyen

$$a_k = \sqrt{k x_k}, \quad b_k = \sqrt{k^5 x_k},$$

ezzel (3) így alakul:

$$\sum_1^5 k x_k \cdot \sum_1^5 k^5 x_k \geq \left(\sum_1^5 k^3 x_k \right)^2,$$

azaz (1) miatt $b \cdot b^3 \geq b^4$, tehát (3)-ban az egyenlőség jel érvényes; ez azt jelenti, hogy vagy létezik olyan t , amelyre

$$(4) \quad \sqrt{k x_k} = t \sqrt{k^5 x_k}, \quad x_k (t^2 k^4 - 1) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, 5)$$

vagy pedig valamennyi $b_k = 0$, ami azt jelenti, hogy minden $x_k = 0$, amihez szükségképpen $b = 0$ tartozik.

Ha (4) teljesülése esetén valamelyik $x_i \neq 0$, akkor $t = \frac{1}{i^2}$, de akkor (4)-ből a többi x_k ($k \neq i$) nullával egyenlő. Ezeket (1)-be helyettesítve kapjuk, hogy

$$ix_i = b, \quad i^3 x_i = b^2, \quad i^5 x_i = b^3,$$

amiből $b = i^2$ és $x_i = i$ következik; b lehetséges értékei tehát 0, 1, 4, 9, 16 és 25; az itt kapott értékek kielégítik az egyenletrendszert.

1979/6. Legyen A és E egy szabályos nyolcszög két szemközti csúcsa. Egy béka az A csúcsból elindulva kezd ugrálni. A nyolcszög bármely csúcsából — az E -t kivéve — az egyik szomszédos csúcsba ugorhat. Ha az E csúcsba ér, akkor megáll és ott marad. Legyen a_n a pontosan n ugrásból álló különböző utak száma.

Bizonyítsuk be, hogy

$$a_{2n-1} = 0, \quad a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}} (x^{n-1} - y^{n-1}) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ahol $x = 2 + \sqrt{2}$ és $y = 2 - \sqrt{2}$.

Megjegyzés. Egy pontosan n ugrásból álló út a csúcsoknak olyan P_0, P_1, \dots, P_n sorozata, amely eleget tesz a következő feltételeknek:

I. $P_0 = A, P_n = E$;

II. minden olyan i -re, amely kielégíti a $0 \leq i \leq n-1$ feltételeket, P_i különbözik E -től.

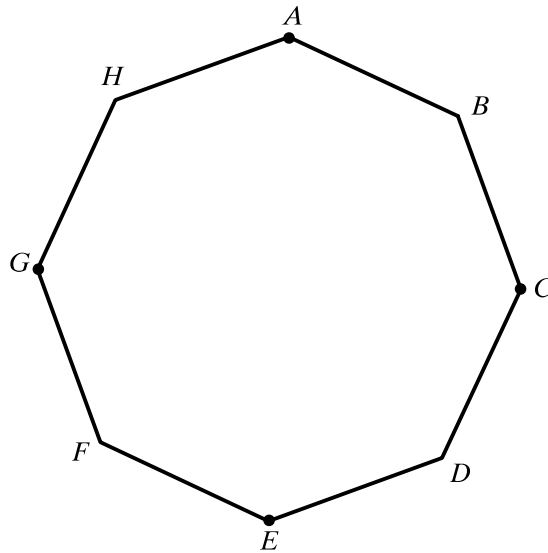
III. minden olyan i -re, amely kielégíti a $0 \leq i \leq n-1$ feltételeket, P_i és P_{i+1} szomszédos csúcsok.

Megoldás. A megjegyzés I–III. feltételei annak a bonyolultabb megfogalmazása, hogy a béka A -ból kiindulva az n -edik ugrással ér E -be, előbb azonban nem, és mindig csak szomszédos csúcsba ugorhat.

Jelölje az nyolcszög csúcsait rendre A, B, C, D, E, F, G, H (1979/6.1. ábra). A -ból B -be vagy H -ba csak páratlan számú ugrással lehet elérni, C -be és G -be ezért csak páros számúval, és így D -be és F -be páratlan számúval; következésképpen A -ból E -be csak páros számú ugrás vezet. Ezért $a_n = 0$, ha n páratlan.

A továbbiakban feltesszük, hogy n páros. Arra törekszünk, hogy a_n -et az n -nél rövidebb utak számával fejezzük ki. Nyilván $a_2 = 0$ és $a_4 = 2$, mert A -ból E -be legalább négy ugrás kell és ezt két irányban lehet megtenni. A következőkben feltesszük, hogy $n > 4$.

Jelölje b_n azoknak az n ugrásból álló utaknak a számát, amelyeken C -ből E -be lehet eljutni. A szimmetria miatt nyilván G -ből E -be is b_n számú út vezet.



79/6.1. ábra

Induljunk ki most abból, hogy két ugrás után a béka vagy az A pontban van (I. eset) vagy pedig a C , G pontok egyikében (II. eset). Az I. esetben A -ból E -be $2a_{n-2}$ számú út visz, mivel A -ból A -ba kétféleképpen lehet eljutni. A II. esetben C -ből és G -ből b_{n-2} út vezet E -be; e két eset összevetésével kapjuk, hogy

$$(1) \quad a_n = 2a_{n-2} + 2b_{n-2}.$$

Adjunk most meg valamilyen hasonló összefüggést b_n -re is. A C -ből induló két ugrás után a béka (folytatható úton) vagy A -ban, vagy C -ben van. A -ból E -be a_{n-2} darab, C -ből E -be viszont b_{n-2} darab $n-2$ hosszúságú út vezet, de C -ből C -be kétféleképpen lehet eljutni és így

$$(2) \quad b_n = a_{n-2} + 2b_{n-2}$$

(1) és (2) különbségéből átrendezés után kapjuk, hogy

$$b_n = a_n - a_{n-2},$$

amiből $b_{n-2} = a_{n-2} - a_{n-4}$ következik. Ezt (1)-be helyettesítve a_n -re rekurziós formulát kapunk:

$$(3) \quad a_n = 4a_{n-2} - 2a_{n-4}.$$

Végül azt kell megmutatnunk, hogy

$$(4) \quad a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}} (x^{n-1} - y^{n-1})$$

minden pozitív egész n -re kielégíti (3)-at. Ezt teljes indukcióval bizonyítjuk. $n=1$ -re $a_2=0$, $n=2$ -re $a_4=2$, megegyezésben előző eredményünkkel; tegyük fel, hogy (4) teljesül valamilyen $n-1$ -re, azt kell bizonyítanunk, hogy n -re is teljesül.

Vegyük észre, hogy $x + y = 4$ és $xy = 2$, tehát x és y a

$$(5) \quad z^2 - 4z + 2 = 0$$

egyenlet gyökei, amiből következik, hogy x és y kielégíti a

$$z^{n-1} = 4z^{n-2} - 2z^{n-3}$$

egyenletet. Ezt felhasználva:

$$\begin{aligned} a_{2n} &= 4a_{2(n-1)} - 2a_{2(n-2)} = \frac{4}{\sqrt{2}} (x^{n-2} - y^{n-2}) - \frac{2}{\sqrt{2}} (x^{n-3} - y^{n-3}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left((4x^{n-2} - 2x^{n-3}) - (4y^{n-2} - 2y^{n-3}) \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (x^{n-1} - y^{n-1}), \end{aligned}$$

amit bizonyítanunk kellett.

Megjegyzés. A versenyen szóba került a feladat nehezebb változatának a kitűzése, ez azt jelentette volna, hogy a „Bizonyítsuk be ...” szövegrész helyébe az „Adjuk meg a_n pontos értékét” követelmény került volna, tehát a (4) alatti értéket meg kellett volna határozni. A rekurzív sorozatok elméletének [27] egyszerű feladata (3)-ból (4) előállítás; több versenyző megoldása éppen azzal kezdődött, hogy (4)-ből észrevették, hogy (3)-nak teljesülnie kell és így láttak hozzá (3) bizonyításához.

1980.

Nem rendeztek Nemzetközi Matematikai Diákolimpiát.

1981.

1981/1. Legyen P egy adott ABC háromszög belső pontja. P -ből a BC , CA , AB egyenesekre állított merőlegesek talppontja rendre D , E , F . Határozzuk meg az összes olyan P pontot, amelyre a

$$(1) \quad \frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$$

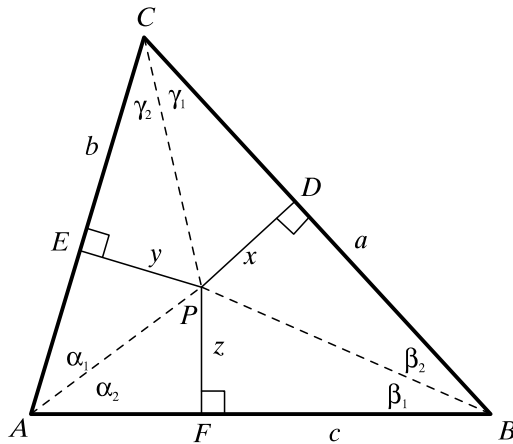
összeg a legkisebb.

1. megoldás. Az 1981/1.1. ábra jelöléseit használva legyen a háromszög területe T , az (1) összeget pedig jelölje S . Mivel ABC területe az APB , BPC , CPA háromszögek területének az összege,

$$2T = ax + by + cz,$$

$$S = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}.$$

S akkor minimális, ha $2ST$ is minimális, mivel T nem függ P választásától. Írjuk ki ezért részletesen a $2ST$ értékét és becslésénél használjuk fel, hogy egy



81/1.1. ábra

pozitív számnak és reciprokának az összege legalább 2.

$$\begin{aligned} 2ST &= \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \right) (ax + by + cz) = a^2 + b^2 + c^2 + ab \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + \\ &+ bc \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + ac \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = \\ &= (a + b + c)^2, \end{aligned}$$

és egyenlőség akkor és csakis akkor áll fenn, ha $x = y = z$, tehát P a beírt kör középpontja. Eredményünk szerint tehát S minimuma:

$$\min S = \frac{(a + b + c)^2}{2T},$$

és a minimumot adó pont a beírt kör középpontja.

2. megoldás. Használjuk az 1. megoldás jelöléseit. A P pontból induló merőlegesek, valamint P -t a háromszög csúcaival összekötő szakaszok hat derékszögű háromszöget zárnak közre. A PAF , illetve PBF háromszögekből $AF = z \operatorname{ctg} \alpha_2$, illetve $FB = z \operatorname{ctg} \beta_1$, ebből $AF + FB = c$ miatt

$$\frac{c}{z} = \operatorname{ctg} \alpha_2 + \operatorname{ctg} \beta_1.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{a}{x} &= \operatorname{ctg} \beta_2 + \operatorname{ctg} \gamma_1, \\ \frac{b}{y} &= \operatorname{ctg} \gamma_2 + \operatorname{ctg} \alpha_1. \end{aligned}$$

Az utóbbi három egyenlőség összegéből:

$$(2) \quad S = (\operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \alpha_2) + (\operatorname{ctg} \beta_1 + \operatorname{ctg} \beta_2) + (\operatorname{ctg} \gamma_1 + \operatorname{ctg} \gamma_2).$$

Vizsgáljuk most az első zárójeles kifejezés értékét; mivel $\alpha_2 = \alpha - \alpha_1$

$$(3) \quad \operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \alpha_2 = \frac{\cos \alpha_1}{\sin \alpha_1} + \frac{\cos(\alpha - \alpha_1)}{\sin(\alpha - \alpha_1)} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_1 \sin(\alpha - \alpha_1)}.$$

Mínthogy $\sin \alpha_1$ és $\sin(\alpha - \alpha_1)$ pozitív számok, $4xy \leq (x+y)^2$ alapján

$$\begin{aligned} \sin \alpha_1 \sin(\alpha - \alpha_1) &\leq \left(\frac{\sin \alpha_1 + \sin(\alpha - \alpha_1)}{2} \right)^2 = \\ &= \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha - 2\alpha_1}{2} \leq \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \end{aligned}$$

és egyenlőség akkor és csakis akkor áll, ha $\alpha = 2\alpha_1$, azaz PA szögfelező, ez (3)-ra azt jelenti, hogy

$$\operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \alpha_2 = \frac{\sin \alpha}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} = 2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Hasonló eredményt kaphatunk a másik két zárójeles kifejezésre is (2)-ben, ezzel tehát

$$S \geq 2 \left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \right),$$

és az egyenlőség akkor és csakis akkor teljesül, ha PA , PB , PC szögfelező, tehát P a beírt kör középpontja.

Megjegyzés. A 2. megoldásunkban a $c = z \operatorname{ctg} \alpha_2 + z \operatorname{ctg} \beta_1$ jellegű egyenlőség akkor is fennáll, ha pl. β_1 tompaszög, akkor a c oldalhossz két távolság különbségeként adódik, mivel $\operatorname{ctg} \beta_1 < 0$. (Hasonló a helyzet $\beta_1 = 90^\circ$ esetén is).

1981/2. Tekintsük a $H_n = \{1, 2, \dots, n\}$ halmaz összes r elemű részhalmazát, ahol $1 \leq r \leq n$. Vegyük e részhalmazok mindegyikéből a legkisebb elemet, és jelölje ezeknek a számtani közepét $F(n, r)$. Bizonyítsuk be, hogy

$$F(n, r) = \frac{n+1}{r+1}.$$

1. megoldás. Jelölje a H_n r -elemű részhalmazából vett legkisebb elemek összegét $S(n, r)$. Bebizonyítjuk, hogy ha $n > 1$, $r > 1$,

$$(1) \quad S(n+1, r) = S(n, r-1) + S(n, r).$$

Minden részhalmazban rendezzük az elemeket növekvő sorrendbe. H_{n+1} r -elemű részhalmazait két, közös elem nélküli csoportra oszthatjuk: az elsőben levők tartalmazzák (utolsó elemként) $n+1$ -et, a másodikban levők nem. Ha az elsőben levők utolsó elemeit elhagyjuk, akkor éppen H_n $r-1$ elemű részhalmazait kapjuk meg, a második csoport pedig azonos H_n r -elemű részhalmazával, tehát az első (azaz legkisebb) elemek összegére (1) valóban fennáll.

Könnyen észrevehetjük, hogy az (1) összefüggés lényegileg megegyezik a binomiális együtthatók közötti alapvető kapcsolattal. Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy

$$(2) \quad S(n, r) = \binom{n+1}{r+1}.$$

Ha $r = 1$, H_n -ből az $\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}$ részhalmazok választhatók ki, ezért

$$S(n, 1) = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2} = \binom{n+1}{r+1},$$

(2) tehát $r = 1$ esetén minden n -re igaz, s így $n = 1$ -re is. Igaz abban az esetben is, ha $n = 2$, $r = 2$, hiszen a $H_2 = \{1, 2\}$ halmazokból csak önmaga választható ki kételemű részhalmazként, tehát $S(2, 2) = 1$, egyezésben (2)-vel. Tegyük most fel, hogy (2) valamilyen n -ig $1 < r \leq n$ esetben igaz. (1) alapján ekkor a binomiális együttállók ismert összefüggését felhasználva kapjuk, hogy

$$(3) \quad S(n+1, r) = \binom{n+1}{r} + \binom{n+1}{r+1} = \binom{n+2}{r+1},$$

(2)-t tehát a megadott kikötések mellett bizonyítottuk.

Mivel H_n -ből $\binom{n}{r}$ darab r -elemű részhalmaz választható ki,

$$(4) \quad F(n, r) = \frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{(n+1)!}{(r+1)!(n-r)!} : \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n+1}{r+1},$$

s ezzel a feladat állítását bizonyítottuk.

2. megoldás. Jelölje H_n r elemű részhalmazaiából vett legkisebb elemek összegét $S(n, r)$. Képzeljük a részhalmazok elemeit nagyság szerint rendezettnek; ezek első elemei lehetnek: $1, 2, \dots, n - r + 1$.

A k pozitív egész akkor legkisebb eleme egy részhalmaznak, ha az elemeket a $k, k+1, \dots, n$ elemek közül választottuk ki, de úgy, hogy k -t mindenképpen kiválasztottuk, tehát k mellé $n - k$ elem közül $r - 1$ -et válogattunk. Az ilyen részhalmazok száma $\binom{n-k}{r-1}$. Ezek első elemeinek az összege $k \binom{n-k}{r-1}$, ezért

$$S(n, r) = \sum_{k=1}^{n-r+1} k \binom{n-k}{r-1}.$$

$$S(n, r) = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-2}{r-1} + \binom{n-3}{r-1} + \dots + \binom{r}{r-1} + \binom{r-1}{r-1} +$$

$$+ \binom{n-2}{r-1} + \binom{n-3}{r-1} + \dots + \binom{r}{r-1} + \binom{r-1}{r-1} +$$

$$+ \binom{n-3}{r-1} + \dots + \binom{r}{r-1} + \binom{r-1}{r-1} +$$

$$+ \dots \dots \dots +$$

$$+ \binom{r-1}{r-1}.$$
$$(5) \quad \sum_{i=1}^{n-k} \binom{n-i}{k} = \binom{n}{k+1}.$$

$$S(n, r) = \binom{n}{r} + \binom{n-1}{r} + \binom{n-2}{r} + \dots + \binom{r+1}{r} + \binom{r}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

Mivel a részhalmazok száma $\binom{n}{r}$, a számtani közép értéke (ld. az 1. megoldást):

$$F(n, r) = \frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{n+1}{r+1},$$

3. megoldás. Jelölje a H_n r elemű részhalmazainak a halmazát R_r , a $H'_n = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ halmaz $r+1$ elemű részhalmazainak a halmazát pedig R'_{r+1} .

Tegyük fel, hogy R_r egy elemében a legkisebb szám k . ($k = 1, 2, \dots, n - r + 1$); ha ehhez a kiválasztott halmazhoz hozzácsatoljuk a $0, 1, 2, \dots, k - 1$ számok valamelyikét, akkor R'_{r+1} egy elemét kapjuk, méghozzá R'_{r+1} -nek pontosan k elemét kaphatjuk meg így, hiszen k számot csatolhatunk hozzá. Így módon R'_{r+1} minden eleme megkapható R_r -beliből, méghozzá abból, amelyet az R'_{r+1} -beli részhalmaz legkisebb elemének elhagyásával kapunk, és nyilván minden R'_{r+1} -beli elem R_r -beli elemből pontosan egyféleképpen kapható meg. Ez azt jelenti, hogy R'_{r+1} elemeinek a száma az R_r -beli elemek legkisebb számainak az összegével egyenlő.

A feladat szerint R_r legkisebb elemeinek a számtani közepét kell meghatározni; gondolatmenetünk szerint

$$F(n, r) = \frac{R'_{r+1} \text{ elemeinek a száma}}{R_r \text{ elemeinek a száma}} = \binom{n+1}{r+1} : \binom{n}{r}$$

Ez a hányados (1) szerint éppen

$$F(n, r) = \frac{n+1}{r+1}.$$

Megjegyzés. 1. Megoldásunkban felhasználtuk a binomiális együtthatók (3) és (5) alatti tulajdonságait; ezek bizonyítása a [28] kiegészítésben megtalálható.

2. Meggondolásaink némi módosításával bizonyítható, hogy a szóban forgó részhalmazok legnagyobb elemeinek a számtani közepe

$$r \frac{n+1}{r+1}.$$

1981/3. Határozzuk meg $m^2 + n^2$ legnagyobb értékét, ha m és n olyan egész számokat jelölnek, amelyekre $m, n \in \{1, 2, \dots, 1981\}$ és

$$(1) \quad (n^2 - nm - m^2)^2 = 1.$$

Megoldás. Először m és n egymáshoz viszonyított nagyságrendjét vizsgáljuk meg. $m > n$ nem lehetséges, mert ebből $m^2 > n^2$, $n^2 - m^2 < -1$, $-nm < -1$, $n^2 - nm - m^2 < -2$ következne, ami ellentmond (1)-nek.

Ha $n = m$, (1) egyetlen megoldása $m = n = 1$.

Ha $m < n$, $n - m$ pozitív egész. Megmutatjuk, hogy ha (n, m) (1)-et kielégítő számpár, akkor $(m, n - m)$ is megoldása (1)-nek:

$$(m^2 - m(n - m) - (n - m)^2)^2 = (-(n^2 - nm - m^2))^2 = 1.$$

Ez tehát azt jelenti, hogy ha (n, m) megoldáspár, akkor szükségképpen $m < n$ és megoldáspár (n', m') is, ahol

$$(2) \quad \begin{aligned} n' &= m \\ m' &= n - m. \end{aligned}$$

Ez viszont azt is jelenti, hogy ha (n', m') megoldáspár, ahol $m' < n'$, akkor megoldás a (2) megfordításából kapott (n, m) számpár is, ahol

$$(3) \quad \begin{aligned} n &= m' + n' \\ m &= n' \end{aligned}$$

is. (3) következménye, hogy az (1, 1) megoldáspárból kiindulva végtelen sok megoldáspárt állíthatunk elő:

$$(4) \quad (1, 1), (2, 1), (3, 2), (5, 3), \dots, (1597, 987), (2584, 1597), \dots$$

Megmutatjuk, hogy (4) alatt felsoroltuk (1) összes megoldását. Ha ugyanis (n, m) megoldáspár; ha $m < n$, akkor (2) alapján található egy „kisebb” (n', m') megoldáspár. Egyszer azonban el kell érni az $n' = m'$ helyzethez, különben ez

az eljárás végtelenségig lenne folytatható; de ekkor éppen az $n' = m' = 1$ számpár áll elő, s mivel egy számpár az összes (2)-ből és (3)-ból adódó számpárt meghatározza, a (4) alatti megoldások (1) összes megoldását szolgáltatják.

Mivel a (4) sorban az (1597, 987) számpár az, amelyben 1981-nél nem nagyobb számok szerepelnek, $n^2 + m^2$ maximuma:

$$1597^2 + 987^2 = 3\,524\,578.$$

Megjegyzés. A (3) előállításából következik, hogy a megoldaspárokból előforduló számok az $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ rekurzióval értelmezett Fibonacci sorozat elemei.

$$(a_1, a_0), (a_2, a_1), (a_3, a_2), \dots, (a_n, a_{n-1}), \dots$$

1981/4. *Mely $n > 2$ esetén van n egymást követő pozitív egész számból álló olyan halmaz, amelynek legnagyobb eleme osztója a többi $n - 1$ elem legkisebb közös többszörösének?*

Mely 2-nél nagyobb egész számok esetén van pontosan egy olyan halmaz, amely a fenti tulajdonságú?

1. megoldás. Legyen először $n = 3$ és a három egymást követő pozitív egész: $s - 2$, $s - 1$, s . Mivel s és $s - 1$ relatív prímek, s csak úgy lehet osztója $(s - 2)(s - 1)$ -nek, ha $s - 2$ -nek is osztója, vagyis $s = 1$ vagy 2 , de akkor a fenti három szám nem lehet pozitív egész, ezért $n = 3$ -ra a kívánt halmaz nem létezik.

Legyen $n = 4$, és a 4 egymást követő szám: $s - 3$, $s - 2$, $s - 1$, s . Ha s osztója a másik három szám legkisebb közös többszörösének, akkor szorzatuknak is osztója, $s - 1$ -hez azonban relatív prím, ezért kell, hogy $(s - 3)(s - 2)$ -nek legyen osztója. Mivel

$$(s - 3)(s - 2) = s(s - 5) + 6,$$

kell, hogy s osztója legyen 6-nak; $s = 1, 2, 3$ azonban nem lehetséges, mert akkor a 4 szám között nulla is lenne, ezért csak $s = 6$ lehet. Ekkor a számnégyes: 3, 4, 5, 6, és 6 valóban osztója a többi legkisebb közös többszörösének, 60-nak. $n = 4$ -re tehát egyetlen megoldás létezik.

Legyen végül $n \geq 5$. Válasszuk s -et $s = (n - 1)(n - 2)$ -nek és legyen $k = \frac{s}{2}$. Megadunk két, egymást követő számokból álló szám n -est:

$$\alpha) s - n + 1, s - n + 2, \dots, s - 1, s;$$

$$\beta) k - n + 1, k - n + 2, \dots, k - 1, k.$$

A fenti számok pozitív egészek, hiszen $n \geq 5$ miatt $\alpha)$ esetén $s - n + 1 = (n - 1)(n - 2) - n + 1 = (n - 3)(n - 1) \geq 8$,

β) esetén pedig

$$k - n + 1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - n + 1 = \frac{n(n-5)}{2} + 2 \geq 2.$$

Mivel α) és β) n egymást követő egész, van közöttük $n-1$ -gyel és $n-2$ -vel osztható is, és $n-1$, $n-2$ relatív prímek, ezért legkisebb közös többszörösük is osztható $n-1$ -gyel és $n-2$ -vel, tehát szorzatukkal, s -sel, és annak felével, k -val is.

Összefoglalva: $n=3$ -ra a feladatnak nincs megoldása, $n=4$ esetén pontosan egy van, $n \geq 5$ esetén pedig legalább kettő.

2. megoldás. Jelölje az n egymást követő egész közül a legnagyobbat s .

Legyen $n=3$; a számaink ekkor: $s-2$, $s-1$, s . Ha p az s -nek prímosztója, akkor (mivel s és $s-1$ relatív prímek), p osztója $s-2$ -nek, tehát 2-nek is, azaz p csak 2 lehet. p nem szerepelhet s -ben 1-nél magasabb hatványon, mert 4 nem osztója $s-2$ -nek, tehát csak $s=2$ lenne lehetséges, $s-2=0$ miatt ez sem lehet; ezért $n=3$ esetén nincs megoldás.

Legyen $n=4$; akkor $s > 3$, számaink: $s-3$, $s-2$, $s-1$, s . Az s prímosztója vagy $s-2$ -t vagy $s-3$ -at osztja, ezért csak 2 vagy 3 lehet, és csak első hatványon szerepelhet, ezért s egyetlen lehetséges értéke $2 \cdot 3 = 6$. Ez meg is felel, mert a 3, 4, 5, 6 számnégyesben 6 osztója $3 \cdot 4 \cdot 5$ -nek.

Legyen most $n \geq 5$. Válasszuk ki azt a két szomszédos 2-hatványt, amely közé n esik, tehát r olyan pozitív egész, amelyre

$$2^r < n \leq 2^{r+1}$$

teljesül. Legyen a választásunk $s = 3 \cdot 2^r$ vagy $s = 5 \cdot 2^r$, tehát az n egymást követő egész:

$$(1) \quad s+1-n, \quad s+2-n, \quad \dots, \quad s-1, \quad s.$$

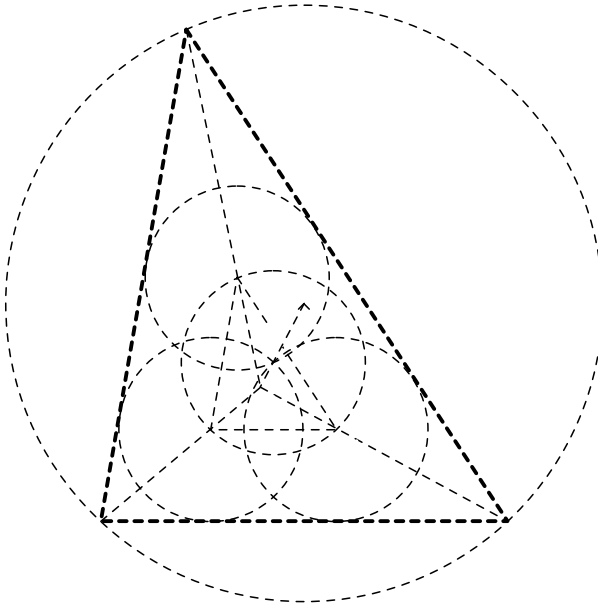
Mivel az első esetben $n \leq 2 \cdot 2^r < 3 \cdot 2^r = s$, $s-n > 0$, ezért $s+1-n$ pozitív egész és ugyanez a helyzet a második esetben is, az (1) felsorolás tehát pozitív egészekből áll.

Mivel $n > 2^r$ és $n > 3$, $s-2^r$ és $s-3$ is az (1) halmazban van, ha $s = 3 \cdot 2^r$, ezért az (1) alatti első $n-1$ szám legkisebb közös többszöröse osztható 2^r -rel és 3-mal is, s mivel 2^r és 3 relatív prímek, osztható $3 \cdot 2^r = s$ -sel is, s ugyanilyen megfontolással következik, hogy $n \geq 5$ miatt a legkisebb közös többes $5 \cdot 2^r = s$ -sel is osztható, ha választásunk szerint $s = 5 \cdot 2^r$.

Összefoglalva: a feladat megoldásainak a száma: $n=3$ esetén 0, $n=4$ esetén 1, $n \geq 5$ esetén legalább 2 megoldás van.

1981/5. Egy adott háromszög belsejében három egyenlő sugarú kör helyezkedik el és egy közös O pontjuk van. Mindegyik érinti a háromszög más-más oldalpárját. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög beírt körének középpontja, körülírt körének középpontja és O egy egyenesen vannak.

Megoldás. Legyenek az A, B, C háromszögcsúcsoktól induló oldalakat érintő körök középpontjai rendre A', B', C' . Mivel ezek a középpontok egyenlő távol vannak két-két oldaltól, rajta vannak a megfelelő csúcsokból induló szögfelezőkön és az $A'B'C'$ háromszög oldalai párhuzamosak az ABC megfelelő oldalával (1981/5.1. ábra). Következésképpen ABC és $A'B'C'$ középpontosan



81/5.1. ábra

hasonlók és a hasonlóság középpontja a beírt kör K középpontja.

O egyenlő távol van az A', B', C' csúcsoktól, ezért az $A'B'C'$ köré írt kör középpontja.

Az a K középpontú hasonlóság, amely az $A'B'C'$ háromszöget az ABC háromszögbe viszi át, az O pontot az ABC köré írt kör O^* középpontjába viszi át, ezért K, O, O^* egy egyenesen vannak, ezt kellett bizonyítani.

1981/6. Az $f(x, y)$ függvény minden nem negatív egész x, y esetén kielégíti az

- (1) $f(0, y) = y + 1,$
- (2) $f(x + 1, 0) = f(x, 1),$
- (3) $f(x + 1, y + 1) = f(x, f(x + 1, y))$

értékeket. Számítsuk ki $f(4, 1981)$ értékét.

Megoldás. Legyen y tetszőleges nemnegatív egész. Rendre az $f(1, y)$, $f(2, y)$, $f(3, y)$ értékek meghatározására törekszünk; egyszerűség kedvéért az egyenlőségjelek fölé írjuk, hogy egy-egy eredményt melyik azonosság alapján kapunk meg.

$$(4) \quad f(1, 0) \stackrel{(2)}{=} f(0, 1) \stackrel{(1)}{=} 2.$$

$$f(1, y+1) \stackrel{(3)}{=} f(0, f(1, y)) \stackrel{(1)}{=} f(1, y) + 1 \stackrel{(3)}{=} \\ \stackrel{(3)}{=} f(0, f(1, y-1)) + 1 \stackrel{(1)}{=} f(1, y-1) + 2,$$

tehát

$$f(1, y) = f(1, y-1) + 1.$$

Ennek a gondolatmenetnek az ismétlésével kapjuk, hogy

$$(5) \quad f(1, y) = f(1, 0) + y \stackrel{(4)}{=} f(0, 1) + y \stackrel{(4)}{=} y + 2.$$

Most $f(2, y)$ értékének a meghatározására térünk rá:

$$f(2, y) \stackrel{(3)}{=} f(1, f(2, y-1)) \stackrel{(5)}{=} f(2, y-1) + 2.$$

Ennek ismétlésével nyerjük, hogy

$$(6) \quad f(2, y) = f(2, 0) + 2y \stackrel{(2)}{=} f(1, 1) + 2y \stackrel{(5)}{=} 2y + 3.$$

Folytatjuk $f(3, y)$ értékének a kiszámításával:

$$f(3, y) \stackrel{(3)}{=} f(2, f(3, y-1)) \stackrel{(6)}{=} 2f(3, y-1) + 3.$$

Ezt ismételve kapjuk:

$$f(3, y) = 2(2f(3, y-2) + 3) + 3 = 2^2 f(3, y-2) + 3 + 2 \cdot 3 = \dots = \\ = 3 + 2 \cdot 3 + 2^2 \cdot 3 + \dots + 2^{y-1} \cdot 3 + 2^y f(3, 0) \stackrel{(2)}{=} \\ \stackrel{(2)}{=} 3(2^y - 1) + 2^y f(2, 1) \stackrel{(6)}{=} 3(2^y - 1) + 2^y \cdot 5,$$

$$(7) \quad f(3, y) = 2^{y+3} - 3.$$

Térjünk rá végül $f(4, y)$ értékének a meghatározására:

$$f(4, y) \stackrel{(3)}{=} f(3, f(4, y-1)) \stackrel{(7)}{=} 2^{f(4, y-1)+3} - 3 \stackrel{(7)}{=} \\ \stackrel{(7)}{=} 2^{(2^{f(4, y-2)+3}-3)+3} - 3 = 2^{2^{f(4, y-2)+3}} - 3.$$

Ezt a gondolatmenetet folytatva kapjuk, hogy

$$f(4, y) = 2^{2^{2^{\dots^{2^{f(4, 0)+3}}}}} - 3,$$

ahol a jobb oldalon alapként, ill. kitevőként összesen y számú 2-es szerepel. Mivel

$$f(4, 0) \stackrel{(2)}{=} f(3, 1) \stackrel{(7)}{=} 2^4 - 3 = 2^{2^2} - 3,$$

ezért

$$f(4, y) = 2^{2^{\dots^2}} - 3 \quad (y + 3 = 1984 \text{ kettessel}).$$

Megjegyzés. A feladat $f(x, y)$ függvénye ún. kétszeres rekurzív függvény. Rekurzív függvényeken olyan, nemnegatív egész számokon értelmezett és nemnegatív egész értékeket felvevő függvényeket értünk, amelyek bizonyos alapfüggvényekből kiindulva véges számú helyettesítéssel és rekurzióval épülnek fel.

A vizsgált $f(x, y)$ függvény a rekurzív függvények elméletének nevezetes példája. Bizonyos függvényosztályok vizsgálatának a céljára *W. Ackermann* vezette be 1928-ban, a feladatban szereplő alakja *Péter Rózsa*tól való (1934).

A rekurzív függvények fontos szerepet játszanak a matematika alapjaira vonatkozó vizsgálatokban.

1982.

1982/1. Az f függvény a pozitív egész n számokon van értelmezve, értékei nemnegatív egész számok. Minden n, m értékre

$$(1) \quad f(m+n) - f(m) - f(n) = 0 \quad \text{vagy} \quad 1,$$

$$(2) \quad f(2) = 0, \quad f(3) > 0,$$

$$(3) \quad f(9999) = 3333.$$

Meghatározandó $f(1982)$.

1. megoldás. Legyen (1)-ben $m = n = 1$, akkor

$$f(2) - 2f(1) = 0 \quad \text{vagy} \quad 1,$$

(2) miatt $2f(1) = 0$ vagy -1 , ebből csak $f(1) = 0$ lehetséges.

Ha viszont $m = 2, n = 1$, hasonló módon

$$f(3) - f(2) - f(1) = f(3) = 0 \quad \text{vagy} \quad 1,$$

(2) miatt csak $f(3) = 1$ lehetséges. Teljes indukcióval ennek felhasználásával megmutatjuk, hogy minden pozitív egész k -ra

$$(4) \quad f(3k) \geq k.$$

Tegyük fel, hogy (4) bizonyos k értékig teljesül. Legyen $m = 3k, n = 3$, akkor (1)-ből

$$f(3(k+1)) = f(3k+3) \geq f(3k) + f(3) \geq k+1,$$

(4) tehát minden k -ra teljesül. Ha ennek a meggondolásunknak az utolsó lépésénél $f(3k) > k$ teljesülne, akkor egyúttal $f(3(k+1)) > k+1$ is fennállna, ez azt jelenti, hogy ha valamilyen k_0 -ra (4)-ben $f(3k_0) > k_0$, akkor minden $k > k_0$ -ra is $f(3k) > k$. Ebből az észrevételünkéből következik, hogy ha $k < 3333$, $f(3k) > k$

nem állhat, mert akkor $f(3 \cdot 3333) > 3333$ következne, ami ellentmond (3)-nak; tehát $f(3 \cdot 1982) = 1982$. Ezért (1)-ből

$$1982 = f(3 \cdot 1982) = f(2 \cdot 1982 + 1982) \geq f(2 \cdot 1982) + f(1982).$$

Ugyancsak (1)-ből

$$f(1982 + 1982) \geq 2f(1982).$$

Ez utóbbi két eredmény összevetéséből:

$$(5) \quad 1982 \geq 3f(1982), \quad f(1982) \leq \frac{1982}{3} < 661.$$

Ismét (1)-ből

$$f(1982) = f(1980 + 2) \geq f(1980) + f(2) = f(3 \cdot 660) + 0 = 660,$$

tehát (5)-tel összevetve

$$660 \leq f(1982) < 661,$$

amiből

$$f(1982) = 660.$$

2. megoldás. Megmutatjuk, hogy $f(1982)$ értéke a (2) kikötések felhasználása nélkül is meghatározható. (1) ilyen formában is felírható:

$$(6) \quad f(m) + f(n) \leq f(m+n) \leq f(m) + f(n) + 1.$$

Teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy ha x, y pozitív egészek,

$$(7) \quad xf(y) \leq f(xy) \leq xf(y) + x - 1.$$

$x=1$ -re tetszőleges pozitív egész y mellett az állítás nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy $x-1$ -re (7) teljesül, azaz

$$(8) \quad (x-1)f(y) \leq f((x-1)y) \leq (x-1)f(y) + x - 2.$$

(6) alapján $m=(x-1)y$, $n=y$ szereposztással

$$(9) \quad f((x-1)y) + f(y) \leq f(xy) \leq f((x-1)y) + f(y) + 1.$$

(8) bal oldali egyenlőtlenségéből:

$$f((x-1)y) + f(y) \geq (x-1)f(y) + f(y) = xf(y).$$

(8) jobb oldali egyenlőtlenségéből:

$$f((x-1)y) + f(y) + 1 \leq (x-1)f(y) + f(y) + 1 + x - 2 = xf(y) + x - 1.$$

E két utóbbi eredményt (9)-cel összevetve éppen a bizonyítandó (7)-et kapjuk.

Alkalmazzuk most (7)-et $x=1982$, $y=9999$ helyettesítéssel, és jelölje $f(xy)$ -t P :

$$(10) \quad 1982 \cdot 3333 \leq P \leq 1982 \cdot 3333 + 1982$$

Legyen most $x=9999$ és $y=1982$ (7)-ben:

$$(11) \quad 9999 \cdot f(1982) \leq P \leq 9999 \cdot f(1982) + 9998$$

Vessük össze (10) bal oldalát (11) jobb oldalával, majd (10) jobb oldalát (11) bal oldalával; kapjuk, hogy

$$f(1982) \geq \frac{1982 \cdot 3333 - 9998}{9999} = 659,66 \dots,$$

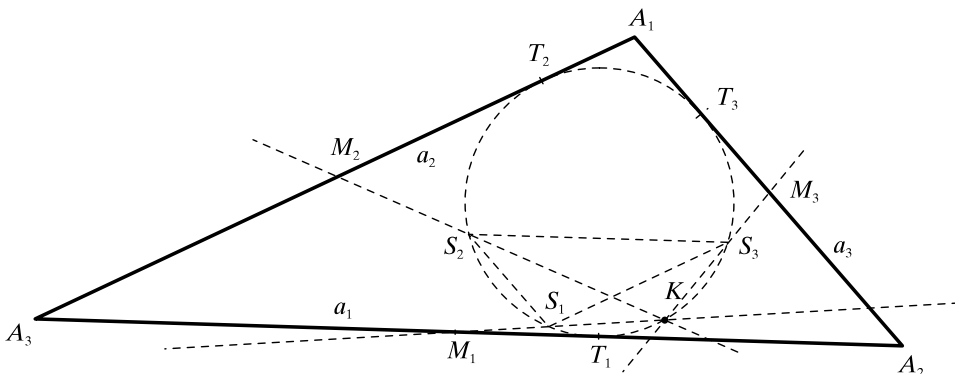
$$f(1982) \leq \frac{1982 \cdot 3333 + 1982}{9999} = 660,86 \dots$$

s mivel $f(1982)$ egész,

$$f(1982) = 660.$$

1982/2. Az $A_1A_2A_3$ háromszög nem egyenlő szárú. A_i -vel szemközti oldalát jelölje a_i , a_i felezőpontját M_i ($i = 1, 2, 3$). A beírt kör az a_i oldalt T_i -ben érinti, T_i tükörképe az A_i -hez tartozó belső szögfelezőre S_i . Bizonyítsuk be, hogy az M_1S_1 , M_2S_2 , M_3S_3 egyenesek egy ponton mennek át.

Megoldás. A feladat feltételei miatt a szóban forgó pontok mind különbözők; ha ui. pl. S_1 és S_2 egybeesnék, a beírt kör S_1 -et tartalmazó T_1T_2 ívének a középponti szöge kétszerese lenne az A_1 -hez, ill. A_2 -höz tartozó szögfelező szögének, $90^\circ + \frac{\gamma}{2}$ -nek, ami lehetetlenség (1982/2.1. ábra).



82/2.1. ábra

Mivel S_1 és T_1 , továbbá T_3 és T_2 tükrösek az A_1 -hez tartozó szögfelezőre, $T_1T_2 = S_1T_3$; hasonlóan: T_2 és S_2 , továbbá T_1 és T_3 is tükrösek az A_2 szögfelezőjére, $T_1T_2 = S_2T_3$; ennél fogva $S_1T_3 = S_2T_3$.

Ez azt jelenti, hogy az $S_1S_2T_3$ egyenlő szárú háromszög köré írt körének (azaz az $A_1A_2A_3$ -ba írt körnek) a T_3 -beli érintője párhuzamos az S_1S_2 oldalal, azaz A_1A_2 párhuzamos S_1S_2 -vel. De az M_1M_2 középvonal is párhuzamos A_1A_2 -vel, ezért S_1S_2 és M_1M_2 is párhuzamosak. Hasonló megfontolások érvényesek az S_2S_3 és M_2M_3 , ill. S_3S_1 és M_3M_1 szakaszokra. Ez azt jelenti, hogy az $S_1S_2S_3$ és $M_1M_2M_3$ háromszög oldalai páronként párhuzamosak, tehát a két háromszög hasonló.

Minthogy ebben az esetben $S_1S_2S_3$ köré írt köre kisebb az oldalfelező pontokon átmenő körnél, az $S_1S_2S_3$ háromszög is kisebb az $M_1M_2M_3$ háromszög-nél, így a két háromszög középpontosan hasonló, ezért az M_1S_1 , M_2S_2 , M_3S_3 egyenesek egy közös K hasonlósági ponton mennek át, ezt kellett bizonyítanunk.

Megjegyzés. A K középpontú, a feladatban alkalmazott hasonlóság a két háromszög köré írt körét, tehát $A_1A_2A_3$ beírt és Feuerbach-körét is egymásba viszi át. Mivel Feuerbach tétele szerint a beírt kör és a Feuerbach kör érintkezik, érintkezési pontjuk egyben hasonlósági középpontjuk is, ezért a feladatban szereplő K pont rajta van a háromszög beírt körén és Feuerbach körén is.

Ez a megfigyelésünk egy egyszerű szerkesztési módot ad a Feuerbach kör és a beírt kör érintkezési pontjának a szerkesztésére. (Meggondolásunkban feltehetjük, hogy $S_1S_2S_3$ és $M_1M_2M_3$ azonos irányításúak, ami helyzetük elemzésével bizonyítható.) Megjegyezzük, hogy a felismert összefüggések módot adnak a Feuerbach-tétel egy bizonyítására is.

1982/3. A pozitív számok $\{x_i\}$ sorozata nem növekvő és $x_0 = 1$.

Bizonyítandó, hogy minden ilyen sorozathoz van olyan $n \geq 1$, amelyre

$$(1) \quad S_n = \frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geq 3,999.$$

Adjunk meg egy ilyen sorozatot, amelyre minden n esetén

$$S_n = \frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} < 4.$$

1. megoldás. Mivel $(x_i - 2x_{i+1})^2 \geq 0$, azért $x_i^2 \geq 4x_ix_{i+1} - 4x_{i+1}^2$, és ebből

$$\frac{x_i^2}{x_{i+1}} \geq 4(x_i - x_{i+1}).$$

Alkalmazzuk ezt az (1) alatti összetre:

$$S_n = \frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geq 4(x_0 - x_1 + x_1 - x_2 + \dots + x_{n-1} - x_n) = 4(1 - x_n).$$

Ha x_n nullához tart, van olyan n , amelyre $x_n \leq \frac{1}{4000}$, és erre

$$S_n \geq 4 \left(1 - \frac{1}{4000} \right) = 3,999.$$

Ha viszont a sorozat határértéke nem nulla, hanem c , legyen $c > b > 0$, b -nél tehát a sorozat minden eleme nagyobb. Legyen $n \geq \frac{4}{b}$. Ekkor

$$S_n = \sum_{i=0}^n \frac{x_i^2}{x_{i+1}} > \sum_{i=0}^n \frac{x_ix_{i+1}}{x_{i+1}} = \sum_{i=0}^n x_i > nb \geq 4,$$

tehát az a) állítás ebben az esetben is igaz.

A b) részhez legyen $x_i = 2^{-i}$ ($i = 0, 1, \dots$). Ebben az esetben

$$\frac{x_i^2}{x_{i+1}} = \frac{2^{-2i}}{2^{-(i+1)}} = 2^{1-i},$$

és így

$$S_n = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Ezt végtelen mértani sorra bővítve sorösszegként 4-et kapunk, tehát az S véges összeg semmilyen n -re nem érheti el a 4-et.

2. megoldás. Vezessük be az

$$a_k = \frac{x_{k-1}}{x_k} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

jelölést; ezzel $a_k \geq 1$ és

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_1 a_2} + \dots + \frac{a_n}{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} = \\ &= a_1 + \frac{1}{a_1} \left(a_2 + \frac{1}{a_2} \left(a_3 + \dots + \frac{1}{a_{n-2}} \left(a_{n-1} + \frac{a_n}{a_{n-1}} \right) \dots \right) \right). \end{aligned}$$

Alkalmazzuk most rendre az $a_k + \frac{B}{a_k} \geq 2\sqrt{B}$ egyenlőtlenséget, ami a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenségből közvetlenül adódik, ha $B \geq 0$:

$$\begin{aligned} S_n &\geq 2\sqrt{a_2 + \frac{1}{a_2} \left(a_3 + \dots + \frac{1}{a_{n-2}} \left(a_{n-1} + \frac{a_n}{a_{n-1}} \right) \dots \right)} \geq \dots \geq \\ &\geq 2\sqrt{2\sqrt{\dots 2\sqrt{a_{n-1} + \frac{a_n}{a_{n-1}}}}} \geq \\ &\geq 2\sqrt{2\sqrt{\dots 2\sqrt{a_n}}} \geq 2\sqrt{2\sqrt{\dots \sqrt{2}}} = 2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}}. \end{aligned}$$

Mivel a kitevőben levő összeg végtelen mértani sorra bővítve 2-höz tart, S_n tet-szőlegesen megközelíti a 4-et, amivel az a) részt bizonyítottuk. (Megjegyezzük, hogy $n = 14$ esetén $S_{14} > 3,999$ már teljesül.)

A b) részre adandó válasza utalunk az 1. megoldásban foglaltakra.

1982/4. Bizonyítsuk be, hogy ha n olyan pozitív egész, amelyre az

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$$

egyenletnek van egész számokból álló (x, y) megoldása, akkor van legalább há-trom ilyen megoldása. Mutassuk meg, hogy az egyenletnek nincs egész megoldá-sa, ha $n = 2891$.

Megoldás. Mivel

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = (y - x)^3 - 3(y - x)x^2 - x^3,$$

ha egyenletünknek (x, y) megoldása, akkor megoldása az az (x_1, y_1) is, amelyre

$$(1) \quad \begin{aligned} x_1 &= -x + y, \\ y_1 &= -x. \end{aligned}$$

De akkor az (x_1, y_1) párral együtt megoldás az az (x_2, y_2) pár is, amelyre (1) alapján

$$\begin{aligned} x_2 &= -x_1 + y_1 = -y, \\ y_2 &= -x_1 = x - y. \end{aligned}$$

Az (x, y) pár nem lehet azonos az (x_1, y_1) párral, mert az azt jelentené, hogy $y = 2x$ és $y = -x$, amiből $x = y = 0$ következne; így tehát (x, y) -ből az (1) transzformációval (x, y) -től különböző számpárt kapunk. Mivel (x_1, y_1) -ből (x_2, y_2) -t és (x_2, y_2) -ből (x, y) -t kapjuk meg (1) felhasználásával, következik, hogy a három megoldaspár különböző, tehát ha van egy megoldás, akkor három is van.

Ha viszont $n = 2891$, az egyenletnek nem lehet egész megoldása. Ezt x és y 3-mal való oszthatóságának a vizsgálatával mutatjuk meg; 2891 3-mal és 9-cel való osztási maradéka 2, bebizonyítjuk, hogy az egyenlet bal oldalán ez nem léphet fel.

a) Ha x és y $3k$ alakú, a bal oldal osztható 3-mal.

b) Ha $x = 3k$, $y = 3k \pm 1$, a bal oldal 3-as maradéka ± 1 , ugyanez a helyzet $x = 3k \pm 1$, $y = 3k$ esetben.

c) Ha $x = 3k + 1$, $y = 3k - 1$ (vagy fordítva), $x + y$ osztható 3-mal és a bal oldal $(x + y)(x^2 - xy + y^2) - 3xy^2$ alakja miatt szintén osztható 3-mal.

d) Ha $x = 3k + 1$, $y = 3k + 1$, a bal oldal 9-es maradéka 8.

e) Ha $x = 3k - 1$, $y = 3k - 1$, a bal oldal 9-es maradéka 1.

Állításunkat ezzel bebizonyítottuk.

1982/5. Az $ABCDEF$ szabályos hatszög AC és CE átlóit a belső M , illetve N pont úgy osztja fel, hogy

$$(1) \quad \frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = r.$$

Határozzuk meg r -et, ha tudjuk, hogy B , M és N egy egyenesen fekszik.

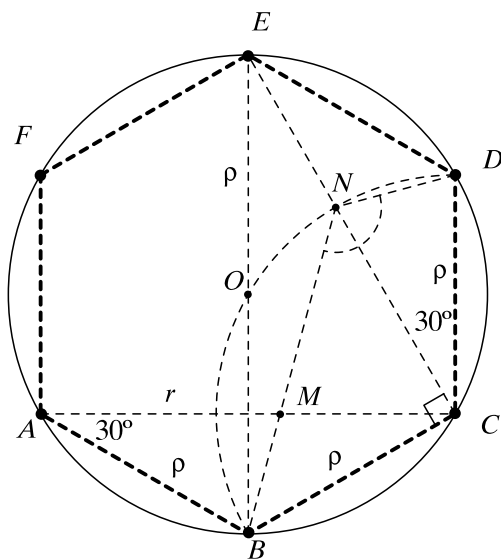
1. megoldás. Válasszuk egységnek a hatszög $AC = CE$ átlójának a hosszát. Az (1) feltétel ebben az esetben azt jelenti, hogy

$$AM = CN = r.$$

Ezzel a választással a szabályos hatszög oldala és köré írt körének a sugara: $\varrho = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (1982/5.1. ábra).

A BAC háromszöget a hatszög középpontja körüli 120° -os elforgatás a DCE háromszögbe, a BM szakaszt a DN szakaszba viszi át, ezért $\angle BND = 120^\circ$. Ez azt jelenti, hogy az N pontból a BD átló 120° -os szögben látszik, ugyanúgy, mint a hatszög O középpontjából. Mivel $\angle BCD = 120^\circ$, B , N és D rajta vannak a C középpontú $BC = CD = \varrho$ sugarú 120° -os látó-köríven, ezért

$$\varrho = CN = r = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

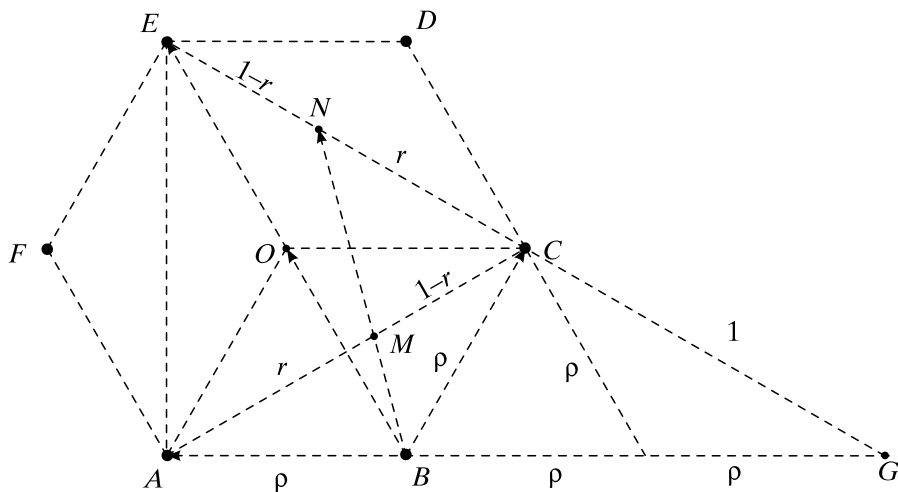


82/5.1. ábra

2. megoldás. Legyen a hatszög $AC = CE$ átlója 1, ekkor oldala: $\varrho = \frac{1}{\sqrt{3}}$, legyen továbbá az EC és AB egyenesek metszéspontja G . Ezzel a választással (1) az

$$AM = CN = r$$

alakba megy át (1982/5.2. ábra). Mivel az ACG háromszögben $\angle A = 30^\circ$; $\angle C =$



82/5.2. ábra

120° , következésképpen a $\angle G = 30^\circ$ -os, ezért a háromszög egyenlő szárú: $AC = CG = 1$, $AG = \sqrt{3} = 3\varrho$.

Alkalmazzuk az ACG háromszögre és a BM szelőre Menelaosz tételét [29]:

$$1 = \frac{AB}{BG} \cdot \frac{GN}{NC} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{\varrho}{2\varrho} \cdot \frac{1+r}{r} \cdot \frac{1-r}{r},$$

ebből

$$3r^2 = 1, \quad r = \frac{1}{\sqrt{3}} = \varrho.$$

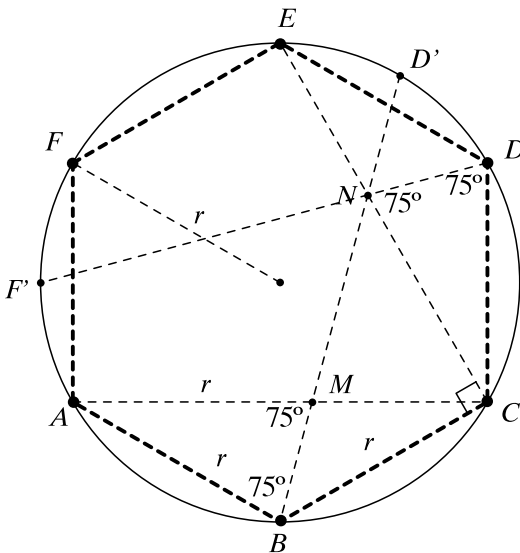
3. megoldás. Válasszuk origónak a hatszög B csúcsát, az egyes pontokhoz mutató helyvektorokat jelöljük a pontnak megfelelő vastag kisbetűvel (1982/5.2. ábra).

Mivel O helyvektora $\mathbf{a} + \mathbf{c}$, ezért $\mathbf{e} = 2(\mathbf{a} + \mathbf{c})$. A megadott arányok miatt

$$\mathbf{m} = (1-r)\mathbf{a} + r\mathbf{c}, \quad \mathbf{n} = (1-r)\mathbf{c} + r\mathbf{e} = 2r\mathbf{a} + (1+r)\mathbf{c}.$$

Minthogy \mathbf{m} és \mathbf{n} párhuzamos vektorok, valamilyen λ valós számmal $\mathbf{n} = \lambda\mathbf{m} = \lambda(1-r)\mathbf{a} + \lambda r\mathbf{c}$. Mivel \mathbf{n} -et csak egyféleképpen lehet felbontani \mathbf{a} -val, ill. \mathbf{c} -vel párhuzamos összetevőkre,

$$\lambda(1-r) = 2r, \quad \lambda r = 1+r, \quad \frac{1-r}{r} = \frac{2r}{1+r}, \quad 3r^2 = 1, \quad r = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$



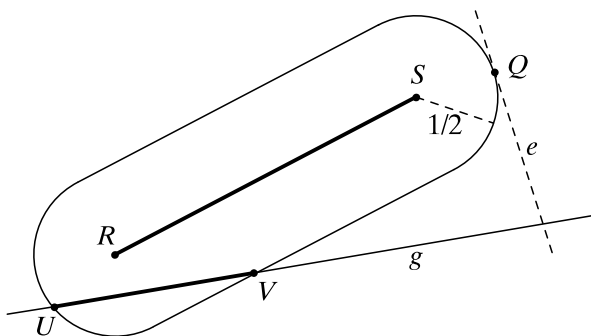
82/5.3. ábra

Megjegyzés. 1. A 3. megoldásból látszik, hogy a hatszög szabályos voltából nagyon keveset használtunk fel; a feladat eredménye igaz pl. minden olyan hatszögre, amely szabályos hatszögnek párhuzamos vetülete (ún. affin-szabályos hatszögek).

2. A feladat alakzata egy szabályos tizenkétszög átlóiból való; ennek csúcsai a hatszög köré írt kör oldalak fölötti íveinek a felezőpontjai; ez egyébként rámutat a feladat eredetére és más megoldási módra is ad ötletet (1982/5.3. ábra).

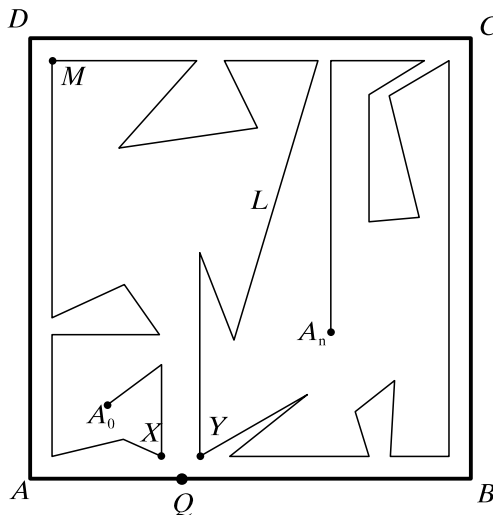
1982/6. Legyen S egy négyzet, amelynek oldalhosszúsága 100 és L egy S -ben fekvő, önmagát nem metsző töröttvonal, amely az $A_0A_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ szakaszból áll, ahol $A_0 \neq A_n$. Tegyük fel, hogy az S négyzet határának minden P pontjához van L -nek olyan pontja, amelynek P -től való távolsága nem nagyobb $1/2$ -nél. Bizonyítandó, hogy van L -en olyan X és Y pont, amelyeknek távolsága nem nagyobb 1-nél és L -nek X és Y közötti része legalább 198 hosszúságú.

Megoldás. Megoldásunkban felhasználjuk, hogy azok a pontok, amelyek egy RS szakasztól $\frac{1}{2}$ -nél nagyobb távolságra vannak, az RS szakasz köré szerkesztett „stadion” tartományon kívül helyezkednek el (l. az 1973/4. feladat megoldását), ezért egy g , ill. e egyenesnek azok a pontjai, amelyek az RS szakasztól $\frac{1}{2}$ -nél nem nagyobb távolságra vannak ennek a tartománynak és az egyenesnek a közös részén helyezkednek el, ami vagy egy zárt szakasz, vagy pedig egyetlen pont (1982/6.1. ábra).



82/6.1. ábra

Tegyük fel, hogy az L töröttvonalon A_0 -ból elindulva a négyzet csúcsai közül először az A csúcsot közelítjük meg $\frac{1}{2}$ -nél nem nagyobb távolságra, majd az L egy M pontjában B és D közül előbb a D csúcsot közelítjük meg úgy, hogy $DM \leq \frac{1}{2}$ legyen. Az M pont az L -et két részre osztja: az A_0M és az MA_n töröttvonalakra (1982/6.2. ábra).



82/6.2. ábra

Színezzük pirosra az AB négyzetoldalnak azokat a pontjait, amelyeknek az A_0M töröttvonalától mért távolsága nem nagyobb $1/2$ -nél. Ezek a piros részek zárt szakaszokból vagy különálló pontokból állanak (előzetes megjegyzésünk szerint), a szakaszok egymásba is nyúlhatnak.

Hasonlóan: színezzük zöldre az AB négyzetoldalnak azokat a pontjait, amelyeknek az MA_n töröttvonalától mért távolsága nem nagyobb $1/2$ -nél. Biztosan piros az A , biztosan zöld a B pont, mert az M definíciója szerint A -t az A_0M megközelíti, B -t viszont A_0M nem közelíti meg, tehát kell, hogy MA_n közelítse meg.

Színezési utasításunk és a feladat feltételei szerint AB minden pontja színezett, bizonyos pontok két színnel is lehetnek színezve, sőt, mivel az egyszínű részek zárt szakaszokat alkotnak, biztosan van AB -nek olyan Q pontja, amely piros is és zöld is.

Mivel Q piros, van az A_0M töröttvonalon olyan X pont, amelyre $QX \leq \frac{1}{2}$, s mivel Q zöld is, van az MA_n töröttvonalon olyan Y , amelyre $QY \leq \frac{1}{2}$, tehát a háromszögegyenlőtlenség miatt

$$XY \leq QX + QY \leq 1.$$

Az X, Y pontok AB -től, M pont CD -től mért távolsága nem nagyobb $1/2$ -nél, ezért $XM \geq 99$ és $MY \geq 99$, viszont

$$XM \leq XM \text{ töröttvonal}; \quad MY \leq MY \text{ töröttvonal},$$

tehát

$XY \text{ töröttvonal} = XM \text{ töröttvonal} + MY \text{ töröttvonal} \geq XM + MY \geq 198$,
ezt kellett bizonyítanunk.

1983.

1983/1. Határozzuk meg a pozitív valós számok halmazán értelmezett összes olyan pozitív értékű f függvényt, amely kielégíti a következő feltételeket:

$$(1) \quad f(xf(y)) = yf(x)$$

minden pozitív x, y számra;

$$(2) \quad f(x) \rightarrow 0, \quad \text{ha } x \rightarrow \infty.$$

Megoldás. Nevezzük az a pozitív számot az f fixpontjának, ha $f(a) = a$. f -nek van fixpontja, mert ha x tetszőleges pozitív szám, (1) szerint $xf(x) = f(xf(x))$, az $xf(x)$ szám tehát fixpont. Legyen b az f egy fixpontja, tehát

$$(3) \quad f(b) = b.$$

Megmutatjuk, hogy b^n (n pozitív egész) is fixpont. $n=1$ -re ez éppen (3)-at jelenti, tegyük fel, hogy $f(b^{n-1}) = b^{n-1}$; (1) miatt

$$f(b^n) = f(bf(b^{n-1})) = b^{n-1} \cdot f(b) = b^{n-1} \cdot b = b^n;$$

tehát b^n valóban fixpont. Ismét (1) alkalmazásával:

$$b = f(b) = f(1 \cdot b) = f(1 \cdot f(b)) = bf(1),$$

ebből $b > 0$ miatt

$$(4) \quad f(1) = 1$$

következik, 1 tehát fixpont. Ennek következménye, hogy

$$1 = f(1) = f\left(\frac{1}{b} \cdot b\right) = f\left(\frac{1}{b} \cdot f(b)\right) = bf\left(\frac{1}{b}\right),$$

$$f\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{1}{b},$$

tehát $\frac{1}{b}$ is fixpont, de akkor az előzmények szerint $\frac{1}{b^n}$ is az.

Ez azt jelenti, hogy f a

$$(5) \quad b, b^2, b^3, \dots, b^n, \dots \text{ helyeken a}$$

$$b, b^2, b^3, \dots, b^n, \dots \text{ értékeket}$$

veszi fel, és az

$$(6) \quad \frac{1}{b}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{b^3}, \dots, \frac{1}{b^n}, \dots \text{ helyeken a}$$

$$\frac{1}{b}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{b^3}, \dots, \frac{1}{b^n}, \dots \text{ értékeket.}$$

Ha $b > 1$, (5) ellentmond a (2) feltételnek; ha $b < 1$, (6) mond ellent (2)-nek, tehát csak $b = 1$ az egyetlen lehetséges fixpont és így minden pozitív x -re szükségképpen

$$xf(x) = 1, \quad \text{azaz} \quad f(x) = \frac{1}{x}.$$

$f(x) = \frac{1}{x}$ az egyetlen lehetséges megoldás, és ez valóban ki is elégíti a feladat feltételeit, hiszen

$$f(xf(y)) = f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y}{x} \quad \text{és} \quad yf(x) = y \cdot \frac{1}{x} = \frac{y}{x},$$

és ha

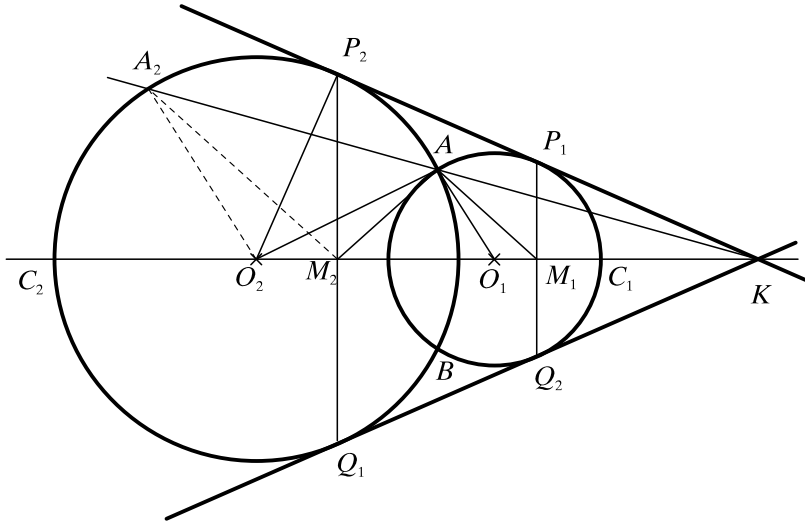
$$x \rightarrow \infty, \quad f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow 0.$$

1983/2. Az egy síkban fekvő O_1 középpontú C_1 és O_2 középpontú C_2 körök sugarai különbözők, de metszik egymást; egyik metszéspontjuk A . Közös érintőik C_1 -et P_1 -ben, illetve Q_1 -ben, C_2 -t P_2 -ben, illetve Q_2 -ben érintik. P_1Q_1 felezőpontja M_1 , P_2Q_2 felezőpontja M_2 . Bizonyítsuk be, hogy $O_1AO_2 \angle M_1AM_2 \angle$.

1. megoldás. A bizonyítandó állítás egyenértékű azzal, hogy

$$(1) \quad O_1 A M_1 \sphericalangle = O_2 A M_2 \sphericalangle,$$

ezt fogjuk bizonyítani. Legyen a közös érintők metszéspontja K , ez egyben a két kör külső hasonlósági pontja is (1983/2.1. ábra).



83/2.1. ábra

A K középpontú hasonlóság, ami C_1 -et C_2 -be viszi át, O_1 -nek O_2 -t, P_1 -nek, ill. Q_1 -nek P_2 -t, ill. Q_2 -t felelteti meg, ezért M_1 -nek M_2 a megfelelője; legyen továbbá A képe A_2 .

A hasonlóság szögtartó volta miatt $O_1 A M_1 \sphericalangle = O_2 A_2 M_2 \sphericalangle$, ezért elegendő lenne bizonyítani, hogy

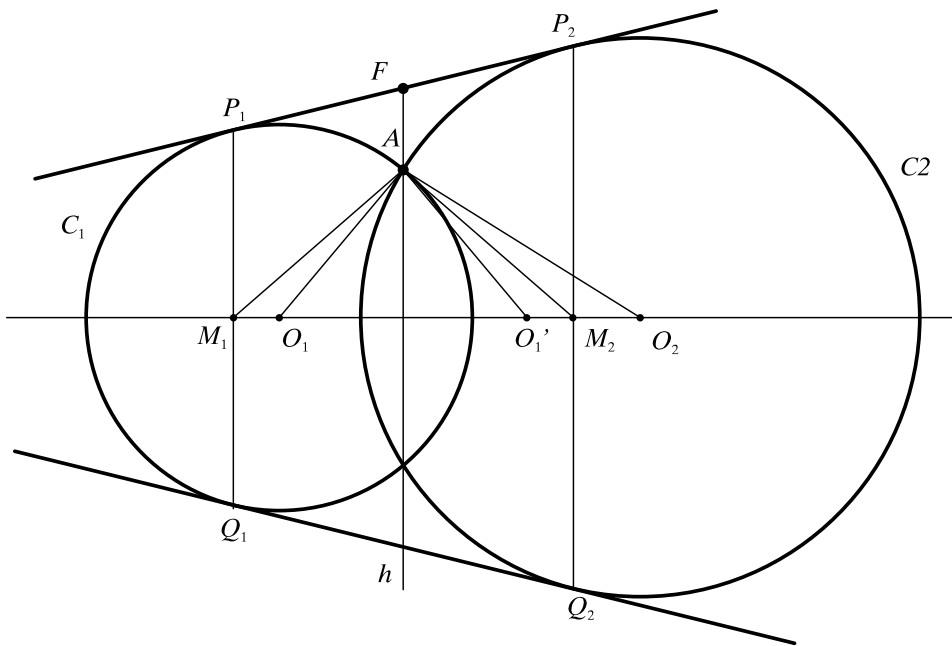
$$(2) \quad O_2 A M_2 \sphericalangle = O_2 A_2 M_2 \sphericalangle.$$

Ennek bizonyításánál vegyük észre, hogy K -nak C_2 -re vonatkozó hatványa $K P_2^2 = K A \cdot K A_2$. Viszont a $K P_2 O_2$ derékszögű háromszögre alkalmazva a befogótételt kapjuk, hogy $K P_2^2 = K M_2 \cdot K O_2$, ezért

$$K A \cdot K A_2 = K M_2 \cdot K O_2,$$

ez pedig azt jelenti, hogy az $A A_2 O_2 M_2$ pontok egy körön vannak, tehát az $M_2 O_2$ szakasz A -ból és A_2 -ből ugyanakkora szögben látszik, ez viszont azt jelenti, hogy (2) teljesül, tehát (1) is; ezzel a feladat állítását bizonyítottuk.

2. megoldás. Az 1. megoldáshoz hasonlóan most is arra törekszünk, hogy az (1) szögegyenlőséget bizonyítsuk. Messe C_1 és C_2 közös h húregyenese, azaz hatványvonala a $P_1 P_2$ szakaszt F -ben. F felezi a $P_1 P_2$ szakaszt, mert a két körre



83/2.2. ábra

vonatkozó hatványa megegyezik, ezért h középvonala a $P_1Q_1Q_2P_2$ szimmetrikus trapéznek, tehát felező merőlegese az M_1M_2 szakasznak (1983/2.2 ábra).

Legyen O_1 tükörképe h -ra O'_1 , a tükrözés miatt $O_1AM_1 \sphericalangle = O'_1AM_2 \sphericalangle$. (1) bizonyítására tehát azt kell megmutatnunk, hogy $O'_1AM_2 \sphericalangle = O_2AM_2 \sphericalangle$, vagyis hogy AM_2 az O'_1AO_2 háromszögben szögfelező. Ehhez elegendő kimutatni, hogy

$$(3) \quad \frac{AO_2}{AO'_1} = \frac{M_2O_2}{O'_1M_2}.$$

A C_1 -et C_2 -be átvivő hasonlóság aránya sugaraik arányával, azaz $\frac{AO_2}{AO_1}$ -gyel egyenlő; a tükrözés miatt azonban $AO_1 = AO'_1$, tehát a hasonlóság aránya $\frac{AO_2}{AO'_1}$. Minthogy a hasonlóság M_1O_1 -et M_2O_2 -be viszi át, és a szimmetria miatt $M_1O_1 = O'_1M_2$,

$$\frac{AO_2}{AO'_1} = \frac{M_2O_2}{M_1O_1} = \frac{M_2O_2}{O'_1M_2},$$

ezzel (3)-at és egyúttal a feladat állítását is bizonyítottuk.

1983/3. Legyenek a, b, c páronként relatív prím pozitív egész számok. Mutassuk meg, hogy

$$2abc - ab - bc - ca$$

az a legnagyobb egész szám, amely nem írható fel

$$(1) \quad xbc + yca + zab$$

alakban, ahol x, y, z nemnegatív egész számokat jelölnek.

1. megoldás. Vezessük be az $S = 2abc - ab - bc - ca$ jelölést. Megmutatjuk először, hogy S nem írható fel a kívánt alakban. Ha ugyanis

$$2abc - ab - bc - ca = xbc + yca + zab,$$

akkor ebből

$$(2) \quad 2abc = (x+1)bc + (y+1)ca + (z+1)ab$$

következnék. Mivel a bal oldal osztható a -val, kell, hogy a jobb oldal is osztható legyen, de ehhez szükséges, hogy a osztója legyen $x+1$ -nek, azaz valamilyen pozitív egész a' -vel $x+1 = aa'$ teljesüljön. Hasonlóan, kell, hogy pozitív egész b' -vel és c' -vel

$$y+1 = bb', \quad z+1 = cc'$$

fennálljon; ezeket az értékeket (2)-be helyettesítve, majd abc -vel egyszerűsítve kapjuk, hogy

$$2 = a' + b' + c',$$

ami lehetetlen, hiszen 2 nem áll elő három pozitív egész összegeként.

(2) alapján most már elegendő megmutatnunk, hogy ha k tetszőleges pozitív egész, akkor van olyan x, y, z pozitív egész, amelyekkel teljesül:

$$2abc + k = xbc + yca + zab.$$

Tekintsük most azokat az (x, y, z) számhármassokat, amelyek elemeire

$$(3) \quad 1 \leq x \leq a, \quad 1 \leq y \leq b, \quad 1 \leq z \leq c$$

ezen száma abc . Az ezekkel képzett (1) alakú számhármassok H halmazában abc elem van, közülük bármely kettőnek abc -vel való osztási maradéka különböző. Ha ugyanis egy (x_1, y_1, z_1) és egy (x_2, y_2, z_2) számhármassal képzett H -beli számnak ugyanaz lenne a maradéka, különbségük:

$$(x_1 - x_2)bc + (y_1 - y_2)ca + (z_1 - z_2)ab$$

a, b, c relatív prím volta miatt osztható lenne a -val, b -vel és c -vel, ami (3) miatt csak $x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2$ esetben lenne lehetséges.

H -ban tehát minden abc -vel való osztási maradék előfordul. Legyen (x, y, z) most a (3) feltételnek eleget tevő olyan számhármassal, amellyel képzett (1) alak osztási maradéka ugyanaz, mint k -é, ebben az esetben $k - (xbc + yca + zab)$ osztható abc -vel, de akkor $k - (xbc + yca + zab) + 2abc$ is osztható abc -vel, tehát van

olyan n egész szám, hogy

$$k - (xbc + yca + zab) + 2abc = nabc,$$

azaz

$$(4) \quad 2abc + k = nabc + xbc + yca + zab.$$

A (3) alatti x, y, z értékekkel

$$xbc + yca + zab \leq 3abc,$$

ezért (4)-ből

$$k \leq nabc - 2abc + 3abc = (n+1)abc,$$

ez viszont $k > 0$ miatt azt jelenti, hogy $n \geq 0$. (4)-et így írhatjuk át:

$$2abc + k = (na + x)bc + yca + zab,$$

azaz $na + x = x'$, y, z pozitív egészekkel valóban előállítottuk $2abc + k$ -t a kívánt alakban.

2. megoldás. $S = 2abc - ab - bc - ca$ nem írható fel $xbc + yca + zab$ alakban. Ha ui. felírható lenne, akkor

$$xbc + yca + zab = 2abc - ab - bc - ca,$$

$$(5) \quad (x+1)bc + (y+1)ca + (z+1)ab = 2abc$$

teljesülne. Mivel pl. bc és a relatív prímek, a osztója $x+1$ -nek, ezért $a \leq x+1$; hasonlóan $b \leq y+1$ és $c \leq z+1$, amiből

$$2abc = (x+1)bc + (y+1)ca + (z+1)ab \geq 3abc$$

következnék, ami lehetetlen.

Megmutatjuk viszont, hogy ha k' tetszőleges pozitív egész, van olyan x, y, z pozitív egész számhármasság, amelyre

$$(6) \quad xbc + yca + zab = 2abc + k'$$

fennáll, ez (5) alapján elegendő a feladat állításának a bizonyítására; vagy ami ehhez elegendő: bebizonyítjuk, hogy ha $k > 2abc$ pozitív egész, akkor előállítható

$$(7) \quad xbc + yca + zab = k$$

alakban, ahol x, y, z pozitív egészek.

Induljunk ki abból, hogy a

$$bc, 2bc, 3bc, \dots, (a-1)bc, abc$$

számok a -val való osztási maradéka mind különböző, mivel közülük egyik kettő különbsége sem osztható a -val. Ezért teljes maradékrendszer alkotnak és így egyikük, pl. x_1bc ugyanabba a maradékosztályba tartozik mod a , mint k , tehát

$$x_1bc \equiv k \pmod{a}, \quad 1 \leq x_1 \leq a.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy léteznek olyan y_1, z_1 egészek, amelyekre

$$y_1ca \equiv k \pmod{b}, \quad 1 \leq y_1 \leq b,$$

$$z_1 ab \equiv k \pmod{c} \quad 1 \leq z_1 \leq b.$$

Ez azt eredményezi, hogy pl.

$$(x_1 bc - k) + y_1 ca + z_1 ab = x_1 bc + y_1 ca + z_1 ab - k$$

osztható a -val, és hasonlóan b -vel és c -vel is; mivel pedig ezek páronként relatív prímelek, abc -vel is osztható, tehát

$$s = x_1 bc + y_1 ca + z_1 ab \equiv k \pmod{abc}.$$

Ez azt is jelenti, hogy s -nek és k -nak tehát $s - 1$ -nek és $k - 1$ -nek is ugyanaz az osztási maradéka mod abc , azaz

$$(8) \quad k - 1 = q \cdot abc + r,$$

$$(9) \quad s - 1 = q' \cdot abc + r \quad (0 \leq r < abc),$$

ahol $k > 2abc$ miatt $q \geq 2$ és az x_1, y_1, z_1 számokra tett nagyságrendi kikötések miatt $s \leq 3abc$, és így $q' \leq 2$.

(8) és (9) különbségéből adódik, hogy

$$k - s = (q - q')abc, \quad (q - q' \geq 0)$$

$$k = s + (q - q')abc = (x_1 + (q - q')a)bc + y_1 ca + z_1 ab,$$

ami azt jelenti, hogy $x = x_1 + (q - q')a$, $y = y_1$, $z = z_1$ választással éppen a bizonyítandó (7)-et kapjuk.

Megjegyzés. Az alkalmazott módszerekkel bizonyítható, hogy ha a_1, a_2, \dots, a_n páronként relatív prím pozitív egészek és $s = a_1 a_2 \dots a_n$, akkor az a legnagyobb szám, amely nem állítható elő nemnegatív x_1, x_2, \dots, x_k egészekkel

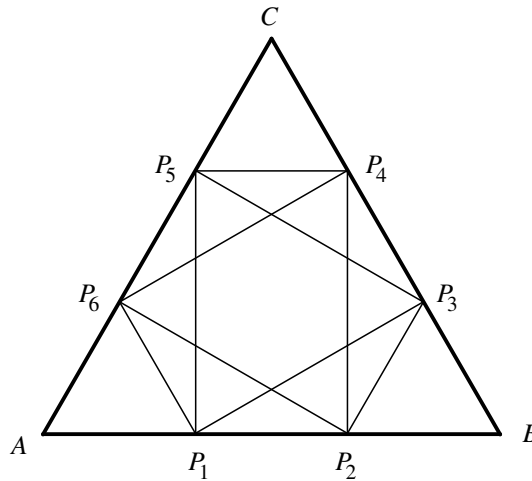
$$x_1 \frac{s}{a_1} + x_2 \frac{s}{a_2} + \dots + x_n \frac{s}{a_n}$$

alakban;

$$(n - 1)s - \left(\frac{s}{a_1} + \frac{s}{a_2} + \dots + \frac{s}{a_n} \right).$$

1983/4. Legyen E egy ABC egyenlő oldalú háromszög oldalain levő pontoknak a halmaza. Igaz-e, hogy bármilyen módon osztjuk is fel E -t két diszjunkt részhalmazra, ezeknek a részhalmazoknak legalább az egyikében van három olyan pont, amelyek egy derékszögű háromszög csúcsai?

Megoldás. Megmutatjuk, hogy a feladat kérdésére a válasz igenlő. Legyenek az AB, BC, CA oldalak harmadolópontjai az A, B, C körüljárási iránynak megfelelően rendre $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$; ezek egy szabályos hatszög csúcsai. Az E halmazból csak a háromszög és a hatszög összesen 9 csúcsával foglalkozunk; megmutatjuk, hogy ezeket sem lehet két diszjunkt halmazba osztani úgy, hogy ne legyen legalább az egyikben derékszögű háromszög (1983/4.1. ábra).



83/4.1. ábra

Egyszerűség kedvéért az egyik pontthalmaz pontjait pirosnak, a másikat zöldnek mondjuk. Mivel A , B , C közül legalább kettő egyszínű, feltehetjük, hogy A és B piros. Az AB oldalon levő P_1 és P_2 összes lehetséges színezéseit végignézve megmutatjuk, hogy az a feltevés, hogy nincs egyszínű derékszögű háromszög, ellentmondásra vezet.

1. P_1 és P_2 piros. P_3 -nak és P_6 -nak zöldnek kell lennie, különben a P_1P_2B vagy P_2P_6A háromszögek pirosak lennének. P_5 is zöld az AP_1P_5 háromszög miatt, de akkor $P_3P_5P_6$ zöld háromszög; ezzel ellentmondásra jutottunk.

2. P_1 és P_2 zöld. P_4 -nek és P_5 -nek pirosnak kell lennie a $P_2P_1P_5$, ill. $P_1P_2P_4$ háromszögek miatt; P_6 és P_3 zöld a BP_4P_6 és AP_5P_3 háromszögek miatt; de így $P_3P_5P_6$ piros háromszög, ez ismét ellentmondás.

3. P_1 piros, P_2 zöld (vagy fordítva). Ebben az esetben P_3 -nak és P_5 -nek zöldnek kell lennie a P_1P_3B , ill. az AP_1P_5 háromszögek miatt; de így a $P_2P_3P_5$ háromszög zöld lett, amivel szintén ellentmondásra jutottunk.

Ezzel bizonyítottuk, hogy mindig van egyszínű, azaz azonos halmazba tartozó derékszögű háromszög.

1983/5. Kiválasztható-e a 10^5 -nél nem nagyobb pozitív egész számok halmazából 1983 különböző szám úgy, hogy közülük semelyik három se legyen valamely számtani sorozat három egymás utáni eleme?

1. megoldás. A feladat kérdésére a válasz igenlő. Válasszuk ki a $10^5 = 100\,000$ -nél nem nagyobb pozitív egészek közül azokat, amelyek hármasszámrendszerbeli alakjában csak a 0-s és 1-es számjegyek fordulnak elő. Mivel $3^{10} < 10^5 < 3^{11}$, a szóban forgó hármasszámrendszerbeli számok legfeljebb 11-jegyűek; közülük a legnagyobb $11\,111\,111\,111_3 = 88\,573_{10}$. Ezeknek a számoknak a száma $2^{11} - 1 = 2047$, ti. a csupa nulla nem tartozik közéjük.

Megmutatjuk, hogy az így kiválasztott 2047 szám nem tartalmaz háromtagú számtani sorozatot. Ha ugyanis x , y és z egy számtani sorozat három egymást követő eleme, akkor $x + z = 2y$. Ha most x , y és z a kiválasztottak közül lenne, $2y$ hármas számrendszerbeli alakja csak 0-kból és 2-esekből állana. Viszont x és z összege csak akkor állhatna csak nullákból és kettesekből, ha azonos helyiértékű jegyeik egyenlők, azaz $x = z$, ami lehetetlen; a kiválasztott 2047 szám tehát nem tartalmaz háromtagú számtani sorozatot, ezért közülük bármely 1983 sem.

2. megoldás. Képezzünk egy halmazsorozatot a következő módon: legyen $H_1 = \{1, 2\}$, a H_{n+1} halmazt a következő módon értelmezzük: először megalakítjuk az S_n halmazt úgy, hogy H_n minden eleméhez hozzáadunk 3^n -t, tehát $p_l. S_2 = \{4, 5\}$, és definíció szerint

$$(1) \quad H_{n+1} = H_n \cup S_n.$$

Tehát:

$$H_2 = \{1, 2; 4, 5\}, \quad H_3 = \{1, 2, 4, 5; 10, 11, 13, 14\}.$$

Ezek szerint H_n elemszáma 2^n . H_n legnagyobb eleme $\frac{3^n + 1}{2}$, ezt most teljes indukcióval bizonyítjuk be. H_1 legnagyobb eleme $\frac{3+1}{2} = 2$; tegyük fel, hogy

H_{n-1} legnagyobb eleme $\frac{3^{n-1} + 1}{2}$, ebből H_n legnagyobb eleme

$$\frac{3^{n-1} + 1}{2} + 3^{n-1} = \frac{3^n + 1}{2}.$$

Ebből következik, hogy H_n elemei az $\left[1, \frac{3^n + 1}{2}\right]$ intervallumból, S_n elemei pedig a $\left[3^n + 1, \frac{3^{n+1} + 1}{2}\right]$ intervallumból vannak.

Teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy a H_i halmazok nem tartalmaznak háromtagú számtani sorozatot. A H_1 , H_2 halmazokra ez nyilvánvalóan teljesül, tegyük fel, hogy H_n -re is igaz. Nézzük most a $H_{n+1} = H_n \cup S_n$ halmazt; azt kell megmutatnunk, hogy ha ennek $x < y < z$ három eleme, $x + z = 2y$ nem lehetséges, ez ui. annak a feltétele, hogy x , y , z egy számtani sorozat három egymást követő eleme legyen.

Ha x és z H_n -ből van, akkor az állítás az indukciós feltétel miatt igaz. Ha x és z az S_n -ből van, akkor valamilyen x' és z' H_n -beli elemekkel

$$x = x' + 3^n, \quad z = z' + 3^n$$

és így

$$y = \frac{x + z}{2} = \frac{x' + z'}{2} + 3^n,$$

ez azonban nincs benne H_n -ben, mert nagyobb H_n legnagyobb eleménél, de nincs benne S_n -ben sem, mert akkor $\frac{x' + z'}{2}$ -nek H_n -ben kellene lennie, ami az indukciós feltevés szerint nem teljesül, y tehát nincs benne H_{n+1} -ben.

Végül, ha $x \in H_n$ és $z \in S_n$, akkor $x \geq 1$, $z \geq 3^n + 1$, és így

$$y = \frac{x+z}{2} \geq \frac{3^n + 1 + 1}{2} > \frac{3^n + 1}{2},$$

tehát nincs H_n -ben, mert nagyobb annak legnagyobb eleménél, és

$$y = \frac{x+z}{2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{3^n + 1}{2} + \frac{3^{n+1} + 1}{2} \right) = \frac{1}{2} (2 \cdot 3^n + 1) < 3^n + 1,$$

tehát nincs S_n -ben sem mert kisebb annak legkisebb eleménél; ezzel bizonyítottuk, hogy y nem lehet H_{n+1} eleme, H_{n+1} tehát nem tartalmazhat háromtagú számtani sorozatot.

Általánosságban bizonyítottuk tehát, hogy a $\frac{3^n + 1}{2}$ -nél nem nagyobb pozitív egészek közül kiválasztható 2^n szám úgy, hogy azok nem tartalmazzák egy számtani sorozat három egymást követő elemét.

$n = 11$ -re ez az eredmény azt jelenti, hogy a 88 574-nél nem nagyobb pozitív egészek közül kiválasztható 2048 úgy, hogy azok nem tartalmazzanak háromtagú számtani sorozatot, ezzel feladatunk kérdésére is igenlő választ adtunk.

1983/6. Jelölje a , b , c egy háromszög három oldalának a hosszát. Bizonyítsuk be, hogy

$$(1) \quad a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0.$$

1. megoldás. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$x = -a + b + c, \quad y = a - b + c, \quad z = a + b - c,$$

x , y , z tehát azoknak a szakaszoknak a kétszeres hossza, amelyekre a beírt kör érintési pontjai a háromszög oldalait osztják. Ezekből

$$a = \frac{y+z}{2}, \quad b = \frac{z+x}{2}, \quad c = \frac{x+y}{2}.$$

Helyettesítsük ezeket (1)-be, majd szorozzuk meg 16-tal az egyenlőtlenség mindkét oldalát:

$$(y+z)^2(z+x)(y-x) + (z+x)^2(x+y)(z-y) + (x+y)^2(y+z)(x-z) \geq 0.$$

A szorzások elvégzése és rendezés után ebből a következő, az eredetivel egyenértékű egyenlőtlenséget kapjuk:

$$(2) \quad x^3z + y^3x + z^2y \geq x^2yz + y^2zx + z^2xy,$$

ebből:

$$\begin{aligned} x^3z + y^3x + z^3y - x^2yz - y^2zx - z^2xy &= \\ = zx(x-y)^2 + xy(y-z)^2 + yz(z-x)^2 &\geq 0, \end{aligned}$$

az egyenlőtlenség teljesülése a benne szereplő tagok nemnegatív volta miatt nyilvánvaló.

Egyenlőség akkor és csak akkor állhat $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ miatt, ha $x = y = z$, azaz $a = b = c$, tehát a háromszög szabályos.

2. megoldás. Mindkét oldal polinomá alakításával beláthatjuk a következő egyenlőség teljesülését:

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) = a(b+c-a)(b-c)^2 + b(a+b-c)(a-b)(a-c).$$

Mivel (1) bal oldala az $a \rightarrow b$, $b \rightarrow c$, $c \rightarrow a$ ciklikus cserével önmagába megy át, feltehetjük, hogy a , b , c között nincs a -nál nagyobb, de ekkor az egyenlőség jobb oldalán minden tényező és így minden tag nemnegatív; ezzel egyenlőtlenségünket bebizonyítottuk.

Megjegyzések. 1. (1) fennállhat akkor is, ha a , b , c nem lehetnek egy háromszög oldalai, pl. az $a = 1$, $b = 3$, $c = 5$ esetben.

2. A (2) alak más átalakítás felhasználásával más módokon is bizonyítható. Pl. (2) mindkét oldalát xyz -vel elosztva kapjuk, hogy

$$(3) \quad \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq x + y + z.$$

Alkalmazhatjuk a Cauchy-féle egyenlőtlenséget az $\left(\frac{x}{\sqrt{y}}, \frac{y}{\sqrt{z}}, \frac{z}{\sqrt{x}}\right)$ és $(\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z})$ számhármásokra:

$$(x + y + z)^2 = \left(\frac{x}{\sqrt{y}}\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt{z}}\sqrt{z} + \frac{z}{\sqrt{x}}\sqrt{x}\right)^2 \leq \left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x}\right)(x + y + z),$$

amiből $(x + y + z)$ -vel való osztás után a bizonyítandó (3)-at kapjuk.

1984.

1984/1. Legyenek x , y és z olyan nemnegatív számok, amelyekre

$$(1) \quad x + y + z = 1$$

fennáll. Bizonyítandó, hogy

$$(2) \quad 0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}.$$

1. megoldás. A bal oldali egyenlőtlenség bizonyításánál vegyük figyelembe, hogy (1)-ből $0 \leq x, y, z \leq 1$ következik, és így

$$xy + yz + zx - 2xyz = xy(1 - z) + yz(1 - x) + zx \geq 0,$$

hiszen a háromtagú összeg minden tagja nemnegatív.

A jobb oldali egyenlőtlenség igazolására vezessük be az

$$x = a + \frac{1}{3}, \quad y = b + \frac{1}{3}, \quad z = c + \frac{1}{3}$$

jelöléseket, ezekből (1) miatt (3) $a + b + c = 0$, $-\frac{1}{3} \leq a, b, c \leq \frac{2}{3}$

következik. Végezzük el a megadott helyettesítéseket; $b + c = -a$ miatt kapjuk,

(4)

$$xy + yz + zx - 2xyz = \frac{7}{27} + \frac{1}{3}(ab + bc + ca - 6abc) = \frac{7}{27} + \frac{1}{3}(bc - a^2 - 6abc).$$

Mivel eredeti kifejezésünk a, b, c -ben szimmetrikus, ezért feltehetjük, hogy $a \leq b \leq c$, (3) miatt azonban a, b, c mindegyike nem lehet pozitív vagy negatív, ezért két eset lehetséges:

$$\alpha) \quad a \leq b \leq 0 \leq c, \text{ vagy } \beta) \quad -\frac{1}{3} \leq a \leq 0 \leq b \leq c.$$

(2) teljesüléséhez azt kell bizonyítanunk, hogy (4)-ben a zárójeles kifejezés nempozitív. Az α) esetben a zárójelben minden tag nempozitív, tehát (2) teljesül.

A β) esetben a zárójelen belüli kifejezést célszerűen átalakítjuk:

$$bc - a^2 - 6abc = bc - (b + c)^2 - 6abc = -(b - c)^2 - 3bc(1 + 2a).$$

Mivel ebben az esetben $1 + 2a > 0$, $bc \geq 0$, a vizsgált kifejezés nem lehet pozitív, (2) tehát ebben az esetben is fennáll.

2. megoldás. (1) miatt x, y, z mindegyike nem lehet $\frac{1}{3}$ -nál nagyobb, ezért feltehetjük, hogy $x \leq \frac{1}{3}$ és így $1 - 2x > 0$, ennél fogva

$$xy + yz + zx - 2xyz = xy + yz(1 - 2x) + zx \geq 0,$$

amivel (2) bal oldalát bizonyítottuk.

A jobb oldal bizonyítására válasszuk ketté a következő két esetet:

$$\alpha) \quad x, y, z \text{ között van } \frac{1}{2}\text{-nél nem kisebb; pl. } z \geq \frac{1}{2}, \beta) \quad 0 \leq x, y, z \leq \frac{1}{2}.$$

Az α) esetben figyelembe véve, hogy $x + y = 1 - z$,

$$\begin{aligned} xy + yz + zx - 2xyz &= z(x + y) + xy(1 - 2z) = \\ &= z(1 - z) + xy(1 - 2z) \leq z(1 - z) \leq \frac{1}{4} < \frac{7}{27}. \end{aligned}$$

A β) esetben végezzük el a következő helyettesítéseket:

$$a = 1 - 2x, \quad b = 1 - 2y, \quad x = 1 - 2z.$$

Ezekkel az értékekkel

$$(5) \quad a, b, c \geq 0, \quad a + b + c = 1.$$

A helyettesítéssel nyert alak (5) figyelembe vételével:

$$(6) \quad xy + yz + zx - 2xyz = \frac{1 + abc}{4}.$$

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján

$$abc \leq \left(\frac{a + b + c}{3} \right)^3 = \frac{1}{27},$$

ezért (6)-ból

$$xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{\frac{28}{27}}{4} = \frac{7}{27},$$

és ezzel (2)-t minden esetben bizonyítottuk.

3. megoldás. A feladatban x, y, z ún. elemi szimmetrikus függvényei szerepelnek, ez adja az ötletet a következő megoldáshoz. Tekintsük a következő $f(t)$ harmadfokú polinomot:

$$(7) \quad f(t) = (t - x)(t - y)(t - z) = t^3 - t^2(x + y + z) + t(xy + yz + zx) - xyz.$$

Ebből (1) figyelembe vételével

$$2f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + (xy + yz + zx) - 2xyz,$$

$$xy + yz + zx - 2xyz = 2f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}.$$

A feladat szerint azt kell bizonyítanunk, hogy

$$0 \leq 2f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} \leq \frac{7}{27},$$

azaz

$$(8) \quad -\frac{1}{8} \leq f\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{216}.$$

Feltehetjük, hogy $x \geq y \geq z \geq 0$.

Válasszuk az x, y, z értékeket úgy, hogy $x \geq \frac{1}{2}, y \leq \frac{1}{2}, z \leq \frac{1}{2}$ teljesüljön.

Ekkor (7)-ből $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq 0$,

$$-f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2} - y\right) \left(\frac{1}{2} - z\right).$$

A számtani–mértani közép közötti egyenlőtlenség alkalmazásával $x \leq 1$ miatt

$$-f\left(\frac{1}{2}\right) \leq \left(\frac{x - y - z + \frac{1}{2}}{3}\right)^3 = \left(\frac{2x - \frac{1}{2}}{3}\right)^3 \leq \frac{1}{8}, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) \geq -\frac{1}{8}.$$

Ha viszont a változók értékeit úgy választjuk, hogy $x \leq \frac{1}{2}$ és így $y \leq \frac{1}{2}, z \leq \frac{1}{2}$ teljesüljön, akkor az előző módszerrel kapjuk:

$$0 \leq f\left(\frac{1}{2}\right) \leq \left(\frac{1}{2} - x\right) \left(\frac{1}{2} - y\right) \left(\frac{1}{2} - z\right) \leq \left(\frac{\frac{3}{2} - (x + y + z)}{3}\right)^3 = \frac{1}{216},$$

s ezzel (8)-at és így a feladat állítását bizonyítottuk.

1984/2. Adjunk meg olyan pozitív egész számokból álló a, b számpárt, amely eleget tesz a következő feltételeknek:

- (1) $ab(a+b)$ nem osztható 7-tel;
- (2) $(a+b)^7 - a^7 - b^7$ osztható 7^7 -nel.

1. megoldás. Mivel $(a+b)^7$ is és $a^7 + b^7$ is osztható $(a+b)$ -vel, nyilvánvaló, hogy a (2) alatti kifejezés osztható $(a+b)$ -vel, ezért $(a+b)^7$ -t a binomiális tétel alapján kifejtve és a kiemeléseket elvégezve kapjuk, hogy

$$(3) \quad (a+b)^7 - a^7 - b^7 = 7ab(a+b)(a^2 + ab + b^2)^2.$$

Mivel $ab(a+b)$ nem osztható 7-tel, ha a, b eleget tesz a feladat feltételeinek, ezért $(a^2 + ab + b^2)^2$ osztható 7^6 -nal, azaz $a^2 + ab + b^2$ osztható $7^3 = 343$ -mal.

Egy a feltételt kielégítő a, b számpárt úgy próbálunk választani, hogy $b = 1$ legyen, azaz valamilyen k egészszel

$$(4) \quad a^2 + a + 1 = 343k, \quad \text{azaz} \quad a^2 + a + (1 - 343k) = 0$$

teljesüljön. Ehhez szükséges, hogy az a -ban másodfokú egyenlet diszkriminánsa teljes négyzet legyen, azaz

$$1 - 4(1 - 343k) = 1372k - 3$$

négyzetszám legyen; ez már $k = 1$ -re is teljesül, mert $1369 = 37^2$. Ezzel a (4) egyenlet és megoldása:

$$a^2 + a - 342 = 0, \quad a = 18, \quad b = 1,$$

az $(a, b) = (18, 1)$ pár tehát kielégíti a feladat feltételeit, hiszen $18 \cdot 1 \cdot 19$ nem osztható 7-tel.

2. megoldás. Az előző megoldást más módon fejezve be, megkaphatjuk az összes olyan a, b számpárt, amelyek kielégítik a feladat feltételeit; mint láttuk, olyan a, b párt kell megadni, amelyekre $a^2 + ab + b^2$ osztható 343-mal, de $a, b, a + b$ nem osztható 7-tel. Induljunk ki a

$$18(a^2 + ab + b^2) = 343ab + (a - 18b)(18a - b)$$

azonosságból. 18 és 343 relatív prímek; $a - 18b$ és $18a - b$ közül csak az egyik lehet osztható 7-tel, különben a különbségük: $17(a + b)$ is osztható lenne 7-tel; ezért $a^2 + ab + b^2$ két esetben lehet osztható 343-mal:

A) $a = 18b + 343k,$

ahol b 7-tel nem osztható pozitív egész, k pedig olyan egész, amelyre $18b + 343k$ pozitív;

B) $b = 18a + 343k,$

ahol a 7-tel nem osztható pozitív egész, k pedig olyan egész, amelyre $18a + 343k$ pozitív.

Nyilvánvaló, hogy $a + b$ egyik esetben sem osztható 7-tel, hiszen

$$a + b = 19b + 343k, \quad \text{ill.} \quad a + b = 19a + 343k.$$

Az A) és B) alatti értékek tehát feladatunk összes megoldását megadják (Kós Géza megoldásából).

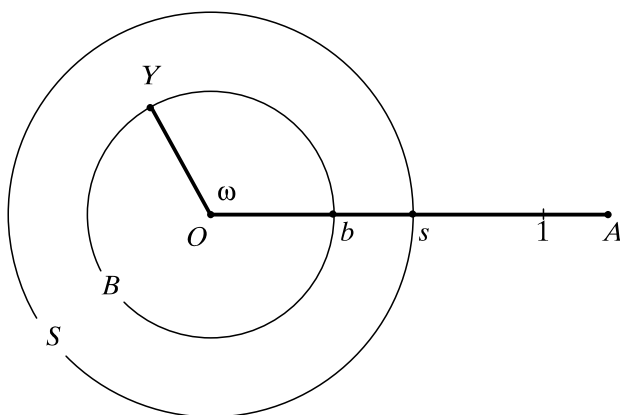
1984/3. Adott a síkon két különböző pont: O és A . Jelentse $\omega(X)$ a sík minden $X \neq O$ pontjára nézve az AOX pozitív forgásirányban mért ívmértékét ($0 \leq \omega(X) < 2\pi$). Jelölje továbbá $C(X)$ azt a körvonalat, amelynek középpontja O , sugarának hossza pedig $OX + \frac{\omega(X)}{OX}$. Legyen adva véges sok szín, és színezzük ki a sík minden pontját ezek egyikével. Bizonyítsuk be, hogy van olyan Y pont, amelyre $\omega(Y) > 0$, és amelynek színe előfordul a $C(Y)$ körvonalon.

Megoldás. Tekintsük az O középpontú 1-nél kisebb sugarú körök végteleen halmazát. Tegyük fel, hogy a sík pontjait n színnel színeztük, minden színt jelöljünk meg az $\{1, 2, \dots, n\}$ számok valamelyikével. Minden körhöz rendeljük hozzá azoknak a színeknek (azaz számoknak) a halmazát, amely színek a kör pontjainak a színezésénél szerepelnek. Mivel ilyen színhalmaz (azaz az $1, 2, \dots, n$ számoknak egy részhalmaza) csak véges sok van, van két kör, amelyeken ugyanazok a színek szerepelnek. Legyenek ezek az O középpontú b sugarú B kör és az O középpontú s sugarú S kör és legyen $b < s < 1$ (1984/3.1. ábra).

Jelöljük ki a B körön olyan Y pontot, amelyhez tartozó $\omega(Y)$ mértékre $\omega(Y) = b(s - b)$ áll fenn. Ilyen Y van, hiszen $0 < b(s - b) < 1 < 2\pi$. Mivel

$$s = b + \frac{\omega(Y)}{b},$$

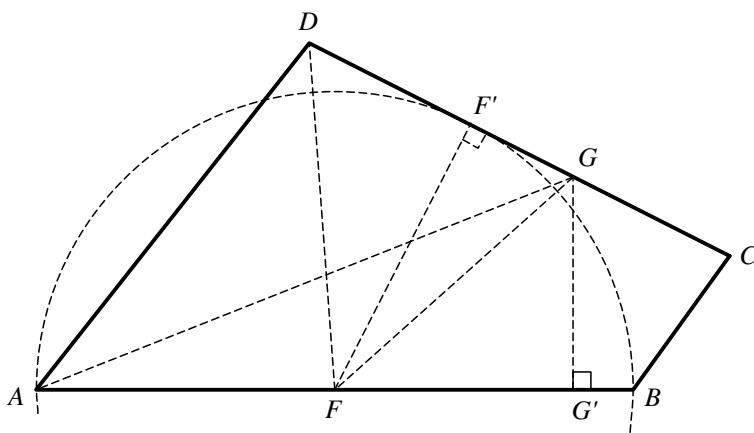
az S kör azonos $C(Y)$ -nal, s mivel S -en és B -n ugyanazok a színek vannak, Y színe megtalálható $C(Y) = S$ színei között. Ezt kellett bizonyítanunk.



84/3.1. ábra

1984/4. Legyen az $ABCD$ konvex négyszögben a CD egyenes érintője az AB átmérőjű körnek. Bizonyítsuk be, hogy az AB egyenes akkor és csakis akkor érinti a CD átmérőjű kört, ha a BC és AD egyenesek párhuzamosak.

Megoldás. Az AB oldal felezőpontját jelölje F , a CD oldalét G ; F -ből a CD egyenesre emelt merőleges talppontja F' , G -ből az AB -re emelt merőlegesé G' (1984/4.1. ábra). A feltétel szerint $AF = FB = FF'$, ebből



84/4.1. ábra

$$\frac{AF}{FF'} = 1.$$

A CD fölé szerkesztett kör sugara $CG = GD$, ez akkor és csakis akkor érinti az AB oldalegyenest, ha $GG' = GD$, azaz

$$\frac{GD}{GG'} = 1,$$

amit úgy fogalmazhatunk, hogy a CD fölé szerkesztett kör akkor és csakis akkor érinti AB -t, ha

$$(1) \quad \frac{AF}{FF'} = \frac{GD}{GG'}, \quad \text{azaz} \quad \frac{AF \cdot GG'}{2} = \frac{GD \cdot FF'}{2}$$

Ez azt jelenti, hogy az AFG és DFG háromszögek egyenlő területűek. Mivel a két háromszögnek FG közös oldala, a területegyenlőségből és $ABCD$ konvex voltából következik, hogy A és D ugyanolyan távol vannak FG -től (FG -nek ugyanazon az oldalán) tehát AD és FG párhuzamosak. FG az $ABCD$ négyszög középvonala és a középvonal csak trapéz esetén lehet az egyik oldallal párhuzamos, ennél fogva (1) akkor és csakis akkor állhat fenn, ha $ABCD$ trapéz, azaz AD párhuzamos BC -vel; amivel állításunkat bizonyítottuk.

1984/5. Egy síkbeli konvex n -szög ($n > 3$) kerülete p , összes átlója hosszának az összege d . Bizonyítsuk be, hogy

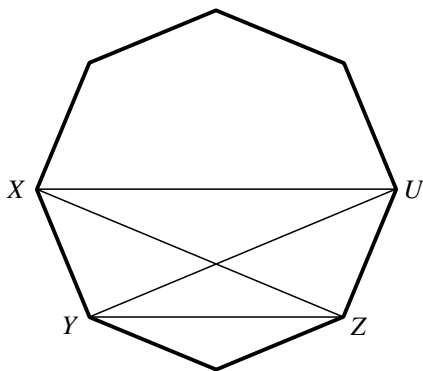
$$(1) \quad n - 3 < \frac{2d}{p} < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - 2.$$

Megoldás. Először az egyenlőtlenség bal oldalát bizonyítjuk. Ez egyenértékű a

$$2d > (n - 3)p$$

állítással.

Válasszuk ki a sokszög két tetszőleges nem szomszédos oldalát, legyenek ezek XY és ZU úgy, hogy $XYZU$ konvex négyszög legyen (1984/5.1. ábra). A háromszögegyenlőtlenségből következik, hogy az XZ és YU átlók összege



84/5.1. ábra

nagyobb a két szemközti oldal: XY és ZU összegénél.

$$(2) \quad XZ + YU > XY + ZU.$$

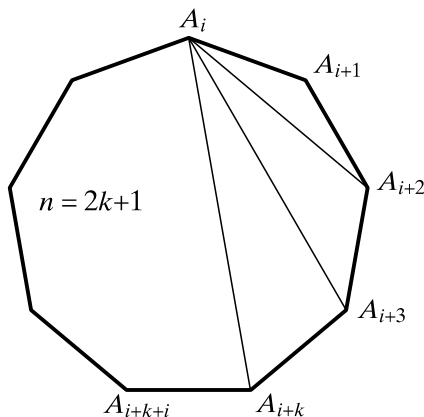
Egy XZ átló két konvex négyszögnek lehet az átlója, mert a végpontjából minden nem szemközti oldalpár az XZ egyenes két oldalán kétféleképpen vehető

fel. Ha tehát az előbbi négyszögválasztást minden módon elvégezzük, és a (2) típusú egyenlőtlenségeket összegezzük, a bal oldalon $2d$ -t kapunk. Egy XY oldalhoz a szemközti négyszögoldalt $n - 3$ féleképpen választhatjuk meg, mert szemközti oldalanként nem jön számításba maga XY és két szomszédja. Minden XY oldalhoz tehát $n - 3$ konvex négyszög választható ki, de minden négyszög így n -szer választódik ki, ha a kiválasztást minden oldalhoz elvégezzük, ezért a különböző négyszögek szám $n - 3$; ezek oldalai között a sokszög kerülete tehát $n - 3$ -szor fordul elő, ezért a (2) típusú egyenlőtlenségek összegezésével kapjuk, hogy

$$2d > (n - 3)p,$$

ezzel (1) bal oldalát bizonyítottuk.

Egyenlőtlenségünk jobb oldalának a bizonyításánál legyen először $n = 2k + 1$. A sokszög egy átlójának a hosszát felülről az átló két végpontját összekötő sokszögvonal hosszával becsüljük, azzal a sokszögvonallrésszel, amely a két lehetőség közül a kevesebb sokszögoldalt tartalmazza. Így pl. az $A_1 A_2 \dots A_n$ sokszögrészt az A_i csúcsból induló átlókkal a következő módon becsüljük (1984/5.2. ábra) ($A_{n+1} \equiv A_1$):



84/5.2. ábra

$$A_i A_{i+2} < A_i A_{i+1} + A_{i+1} A_{i+2}$$

$$A_i A_{i+3} < A_i A_{i+1} + A_{i+1} A_{i+2} + A_{i+2} A_{i+3}$$

$$(3) \quad \vdots$$

$$A_i A_{i+k-1} < A_i A_{i+1} + \dots + A_{i+k-2} A_{i+k-1}$$

$$A_i A_{i+k} < A_i A_{i+1} + \dots + A_{i+k-1} A_{i+k}$$

Végezzük el a becsléssorozatot minden csúcsra, majd összegezzük a kapott egyenlőtlenségeket. A bal oldalon minden átló pontosan egyszer fordul elő, ezért

a bal oldali összeg d . A jobb oldalon minden csúcsnál

$$2 + 3 + \dots + k = \frac{1}{2}(k-1)(k+2) = \frac{1}{2}(k(k+1) - 2)$$

oldal szerepel, tehát az összegzésben $\frac{n}{2}(k(k+1) - 2)$ oldal. Mivel minden oldal ugyanannyiszor fordul elő – hiszen ebben az összegzésben egyetlen oldal sem játszott kitüntetett szerepet – és n -n oldalból álló együttesek éppen a kerületet jelenti, a jobb oldalon

$$\frac{p}{2}(k(k+1) - 2)$$

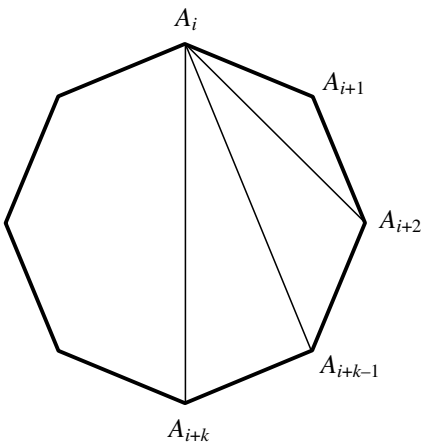
áll, azaz

$$(4) \quad d < \frac{p}{2}(k(k+1) - 2).$$

Mivel $\frac{n}{2} = k + \frac{1}{2}$, $\left[\frac{n}{2}\right] = k$; továbbá $\frac{n+1}{2} = k+1$ és így $\left[\frac{n+1}{2}\right] = k+1$, (4) így írható:

$$\frac{2d}{p} < \left[\frac{n}{2}\right] \left[\frac{n+1}{2}\right] - 2,$$

ezzel páratlan n -re tehát (1)-et bizonyítottuk.



84/5.3. ábra

Ha $n = 2k$, a (3) becsléssorozatban az utolsó sort elhagyjuk, összegezésben azonban figyelembe vesszük a „leghosszabb”, azaz a k darab szemközti csúcspárt összekötő az $A_i A_{i+k}$ átlókra biztosan teljesülő

$$A_i A_{i+k} < \frac{p}{2} \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

becsléseket (1984/5.3. ábra). Összegezésnél tehát a bal oldalon az átlók összegét: d -t kapjuk meg. A jobb oldalon egy csúcsnál

$$2 + 3 + \dots + k - 1 = \frac{1}{2}(k-2)(k+1)$$

oldal szerepel; előző megfontolásunk szerint ez a sokszög p kerületének éppen az $\frac{1}{2}(k-2)(k+1)$ -szerese; figyelembe véve még az összegzésnél az $A_i A_{i+k}$

becsléséből eredő $\frac{kp}{2}$ összeget, kapjuk, hogy

$$d < \frac{p}{2}(k + (k-2)(k+1)) = \frac{p}{2}(k^2 - 2).$$

Mínt hogy $n = 2k$ esetén $k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$, így $k^2 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$, egyenlőtlenségünk

$$\frac{2d}{p} < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - 2$$

alakba írható, ezzel (1)-et minden $n > 3$ -ra igazoltuk.

1984/6. Legyenek a, b, c, d olyan páratlan egész számok, amelyekre

$$(1) \quad 0 < a < b < c < d,$$

$$(2) \quad ad = bc,$$

$$(3) \quad a + d = 2^k, \quad b + c = 2^m$$

teljesül, ahol k és m alkalmas egész számok. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $a = 1$.

Megoldás. Megoldásunk lényege, hogy k és m függvényében előállítjuk az (1)–(3) feltételeket kielégítő a, b, c, d egészeket. Először megmutatjuk, hogy $k > m$. Ez azért igaz, mert $c = \frac{ad}{b}$ miatt

$$2^k - 2^m = (a + d) - (b + c) = (b - a) \left(\frac{d}{b} - 1 \right) > 0.$$

Helyettesítsük most (2)-be a (3)-ból kifejezett d és c értékeket:

$$a(2^k - a) = b(2^m - b),$$

$$2^m b - 2^k a = b^2 - a^2 = (b + a)(b - a).$$

Ez azt jelenti, hogy 2^m osztója $(b + a)(b - a)$ -nak. $b + a$ és $b - a$ párosak, de nem lehet, hogy mindkettő osztható legyen 4-gyel, összegük $(2b)$ ugyanis 2-nek csak az első hatványával osztható; ezért $a - b$ és $a + b$ közül az egyik 2-vel, a másik 2^{m-1} -gyel osztható. Mivel

$$b - a < b < \frac{b + c}{2} = 2^{m-1}$$

és

$$(4) \quad b + a < b + c = 2^m,$$

$b - a$ 2-nek csak az első hatványával osztható, következésképpen $b + a$ osztható 2^{m-1} -gyel. $b + a = r \cdot 2^{m-1}$ (r pozitív egész), de (4) miatt $r < 2$, tehát $r = 1$, így

$$(5) \quad b + a = 2^{m-1}.$$

Továbbá:

$$(6) \quad c - a = (b + c) - (b + a) = 2^m - 2^{m-1} = 2^{m-1}.$$

Az a és b , valamint a és c számok relatív prímek, mert páratlanok és ha lenne közös osztójuk, az (5), ill. (6) miatt 2^{m-1} -nek is osztója lenne. Viszont

(2)-ből az következik, hogy a osztója bc -nek; ezért ez csak úgy lehetséges, hogy

$$(7) \quad a = 1.$$

A feladat állítását ezzel bizonyítottuk. (5), (6) és (2) szerint (7)-ből

$$(8) \quad b = 2^{m-1} - 1, \quad c = 2^{m-1} + 1, \quad d = bc = 2^{2(m-1)} - 1,$$

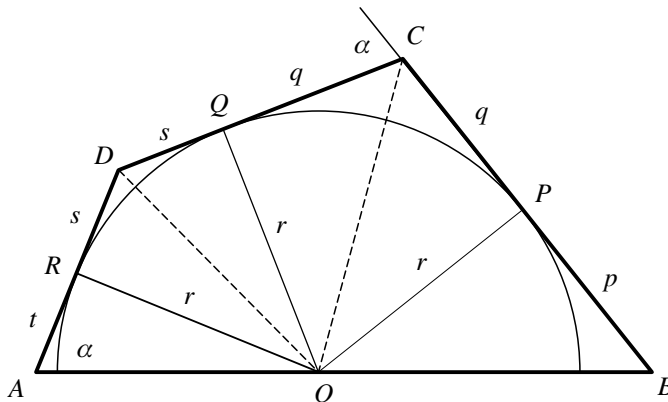
az utóbbi (3)-mal csak akkor egyeztethető össze, ha $k = 2(m - 1)$. Könnyen beláthatjuk, hogy a (8) alatti mennyiségek (és csakis azok) elégítik ki feladatunk feltételeit, ha $m > 2$ egész szám.

1985.

1985/1. Egy kör, amelynek középpontja az $ABCD$ konvex négyszög AB oldalán van, érinti a másik három oldalt. Mutassuk meg, hogy ha $ABCD$ húrnégyszög, akkor

$$AD + BC = AB.$$

1. megoldás. Legyen az érintőkör középpontja O , sugara r , a BC , CD , DA oldal érintési pontjai rendre P , Q , R ; az érintőszakaszok hossza: $BP = p$, $PC = CQ = q$, $QD = DR = s$, $RA = t$ (1985/1.1a. ábra). E jelölésekkel azt kell



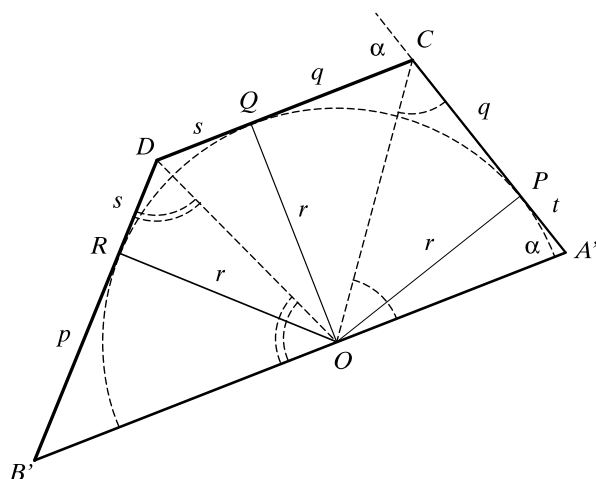
85/1.1a. ábra

bizonyítanunk, hogy

$$AB = p + q + t + s.$$

Mivel $ABCD$ húrnégyszög, a $BAD \angle = \alpha$ megegyezik a C -nél levő külső szöggel.

Vágjuk le a négyszögből az AOR , BOP derékszögű háromszögeket, és cseréljük fel a helyzetüket, a négyszög többi részét változatlanul hagyva, így egy $A'CDB'$ négyszöget kapunk, ezt szintén érinti három oldalán az O középpontú



85/1.1b. ábra

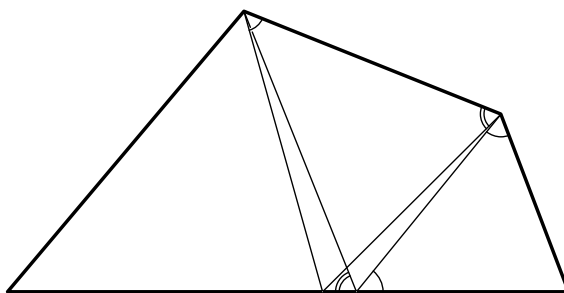
r sugarú kör. $A'CDB'$ trapéz, mert A' -nél és C -nél levő szögeinek összege 180° (1985/1.1b. ábra).

Ebből következik, hogy $\angle OCA' = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, hiszen $PCQO$ deltoid és így OC szögfelező. Ez viszont azt eredményezi, hogy $\angle A'OC = 180^\circ - \alpha - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, ez azt jelenti, hogy $A'O$ egyenlő szárú, tehát $OA' = t + q$. Ezzel azonos módon bizonyíthatjuk, hogy $OB' = p + s$, ezért

$$AB = A'B' = A'O + OB' = t + q + p + s,$$

amit bizonyítanunk kellett.

2. megoldás. Legyen az érintőkör középpontja O , a CDO háromszög k körülírt köre az AB oldalt másodszor egy P pontban metszi. P az AB -nek belső



85/1.2. ábra

pontja (1. megjegyzésünket); ha $P = O$, AB érinti O -ban a CDO kört (1985/1.2.

ábra). Mivel az O középpontú kör érinti az AD , DC , BC oldalakat, OD , ill. OC felezik a D -nél, ill. C -nél levő szöget. Legyen $A\angle = \alpha$, $B\angle = \beta$.

Tegyük fel, hogy P az OB félegyenesen van. Mivel $OPCD$ húrnégyszög, $BPC\angle = ODC\angle = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$, ezért a PBC háromszögben $PCB\angle = 180^\circ - \beta - \left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$, tehát PCB egyenlő szárú, $PB = BC$ (ha $O = P$, a kerületi szögek tétele szerint $BPC\angle = ODC\angle = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$).

Mivel a k kör azonos ívéhez tartozó kerületi szögek,

$$APD\angle = OPD\angle = OCD\angle = 90^\circ - \frac{\alpha}{2},$$

ennélfogva $ADP\angle = 180^\circ - \alpha - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, ezért PAD egyenlő szárú, $AP = AD$, e két eredményt összesítve kapjuk a bizonyítandót:

$$AB = AP + PB = AD + BC.$$

3. megoldás. Használjuk az 1985/1.1a ábra jelöléseit. Mivel OC , ill. OD felezik a négyszög C -nél, ill. D -nél levő szögét, $QCP\angle = 180^\circ - \alpha$, azért $OCP\angle = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ és így az OPC derékszögű háromszögben $q = r \operatorname{ctg} \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. Az ARO derékszögű háromszögből $t = r \operatorname{ctg} \alpha$, $AO = \frac{r}{\sin \alpha}$; ebből

$$t + q = r \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \alpha \right).$$

Mivel

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\sin \alpha},$$

$$t + q = \frac{r}{\sin \alpha} = AO.$$

PC és RD , ill. AR és BP szerepcseréjével az előző bizonyítás a

$$p + s = OB$$

eredményt adja. E két eredmény összegezése éppen a bizonyítandót adja.

Megjegyzés. A 2. megoldásban az $ABCD$ körülírt körének és a k körnek C és D két közös pontja, ezért k -nak az O -t tartalmazó íve vagy teljesen a körülírt körön belül, vagy azon kívül van. Mivel O ezen belül van, k teljes íve az $ABCD$ köré írt körön belül van, ezért P is belső pontja AB -nek.

1985/2. Legyen n pozitív egész, k pedig egy rögzített, n -hez relatív prím egész ($1 \leq k \leq n-1$), és legyen az M halmaz $M = \{1, 2, \dots, n-1\}$. M elemeit fehérre és kékre színezzük a következők figyelembe vételével:

minden $i \in M$ -re i és $n-i$ egyszínűek,

minden $i \in M$ -re, amelyre $i \neq k$, i és $|k-i|$ egyszínűek.

Bizonyítandó, hogy M minden eleme ugyanolyan színű.

Megoldás. Vezessük be a következő jelöléseket: ha a és b egyszínűek, azt így jelöljük: $a \sim b$. Megoldásunk lényege a következő két segédítél bizonyítása:

α) ha $a \equiv b \pmod{k}$, akkor $a \sim b$ [30];

β) létezik olyan b_1, b_2, \dots, b_k szám k -as, amelynek tagjai teljes maradék-rendszert alkotnak mod k és amelyre $b_i \sim b_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, k-1$).

E két segédítélből már következik a feladat állítása. β) azt jelenti, hogy az összes b_i azonos színű, viszont M minden eleme egy maradékosztályba tartozik valamelyik b_i -vel, tehát mind azonos színű.

Feltesszük, hogy $k > 1$, mert $k = 1$ esetén (b) miatt $i \sim |k-i| = i-1$, tehát M bármely két szomszédos eleme azonos színű és így ez M minden elemére is igaz.

α) Legyen $a = sk + r$ ($0 < r \leq k$). (b) miatt $r \sim r+k$, hiszen $r+k \sim |k-(r+k)| = r$;

$$r \sim r+k \sim r+2k \sim \dots \sim r+sk = a,$$

ez tehát azt jelenti, hogy az r -rel mod k egy maradékosztályba tartozó számok azonos színűek.

β) Képezzük az

$$n, 2n, 3n, \dots, kn$$

számokat, és a maradékukat mod k :

$$b_1, b_2, b_3, \dots, b_k,$$

tehát $1 \leq b_i \leq k$ ($i = 1, 2, \dots, k$), itt b_k nyilván k -val egyenlő. A b_i -k teljes maradékrendszert alkotnak mod k , ha ti. lenne közöttük kettő, mondjuk b_i és b_j ($b_i > b_j$), amelyek egy maradékosztályba tartoznának, akkor különbségükre

$$b_i - b_j \equiv (i-j)n \equiv 0 \pmod{k}$$

teljesülne, ami lehetetlen, mert k relatív prím n -hez és nem lehet osztója $i-j$ -nek sem, hiszen $i-j < k$.

Legyen most $1 \leq i \leq k-1$. (b) miatt $b_i \sim |k-b_i|$, s mivel $k-b_i > 0$, $b_i \sim k-b_i$. (a) miatt

$$k-b_i \sim n-(k-b_i) = n-k+b_i.$$

Viszont

$$n-k+b_i \equiv n+b_i \equiv n+in = n(i+1) \equiv b_{i+1},$$

azaz $b_i \sim n-k+b_i \sim b_{i+1}$, $b_i \sim b_{i+1}$, és ezzel a feladat állítását bizonyítottuk.

1985/3. Minden egész együtthatós $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k$ polinomban jelöljük $\omega(P)$ -vel a páratlan együtthatók számát. Legyen továbbá $Q_i(x) = (1+x)^i$, ahol $i = 0, 1, 2, \dots$

Bizonyítsuk be, hogy ha i_1, i_2, \dots, i_n olyan egész számok, amelyek kielégítik a $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n$ feltételt, akkor

$$(1) \quad \omega(Q_{i_1} + Q_{i_2} + \dots + Q_{i_n}) \geq \omega(Q_{i_1}).$$

Megoldás. Két segédtevételeből indulunk ki:

1. Ha $0 < k < 2^m$ ($m \geq 1$ egész), akkor a $\binom{2^m}{k}$ binomiális együttható páros.

A binomiális együtthatók definíciójából közvetlenül következik a

$$k \binom{2^m}{k} = 2^m \binom{2^m-1}{k-1}$$

azonosság; ez $k < 2^m$ miatt azt jelenti, hogy $\binom{2^m}{k}$ osztható 2-vel, azaz páros.

2. Ha $P(x)$ tetszőleges olyan egész együtthatós n -edfokú polinom, amelyre $n < 2^m$ ($m \geq 1$ egész), akkor

$$(2) \quad \omega(P \cdot Q_{2^m}) = 2\omega(P).$$

Az 1. segédtevétele szerint ugyanis

$$(3) \quad Q_{2^m}(x) = (1+x)^{2^m} = 1 + x^{2^m} + R(x),$$

ahol $R(x)$ $2^m - 1$ -edfokú polinom, amelynek minden együtthatója páros, ezért

$$P(x)Q_{2^m}(x) = P(x) + x^{2^m}P(x) + P(x)R(x).$$

Az összegben $P(x)$ -nek és $x^{2^m}P(x)$ -nek nincs azonos fokszámú tagja, együtthatók viszont azonosak, $P(x)R(x)$ minden együtthatója páros, ezért (2) valóban fennáll.

A feladat állítását i_n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha $i_n = 0$ vagy $i_n = 1$, az állítás nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy (1) teljesül, ha $i_n < 2^m$, ahol m pozitív egész. Ebből az indukciós feltevésből kiindulva mutatjuk meg, hogy teljesül akkor is, ha $2^m \leq i_n < 2^{m+1}$; ez nyilván elegendő a feladat tételének a bizonyításához.

A bizonyításnál két esetet különböztetünk meg. Tegyük fel először, hogy az i_1, i_2, \dots, i_n kitevők 2^m és 2^{m+1} közé esnek, azaz

$$2^m \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k < 2^{m+1}, \quad (m \geq 1).$$

Ebben az esetben

$$Q_{i_1} + Q_{i_2} + \dots + Q_{i_k} = Q_{2^m} (Q_{i_1-2^m} + \dots + Q_{i_n-2^m}).$$

Mivel $i_n - 2^m < 2^m$, hiszen $i_n < 2 \cdot 2^m = 2^{m+1}$, ezért az indukciós feltevés szerint

$$\begin{aligned}\omega(Q_{i_1-2} + \dots + Q_{i_n-2^m}) &\geq \omega(Q_{i_1-2^n}), \\ \omega(Q_{2^m}(Q_{i_1-2^m} + \dots + Q_{i_n-2^m})) &= 2\omega(Q_{i_1-2^m} + \dots + Q_{i_n-2^m}) \geq \\ &\geq 2\omega(Q_{i_1-2^m}) = \omega(Q_{2^m}Q_{i_1-2^m}) = \omega(Q_{i_1}),\end{aligned}$$

amivel állításunkat erre az esetre igazoltuk.

Második esetként tegyük fel, hogy az i_1, i_2, \dots, i_n kitevőkre

$$i_1 < \dots < i_{r-1} < 2^m \leq i_r < \dots < i_n < 2^{m+1}, \quad (1 < q \leq n)$$

teljesül. Az indukciós feltevés természetesen változatlanul az, hogy (1) minden olyan i_n esetén igaz, amely $i_n < 2^m$, tehát

$$(4) \quad \omega(Q_{i_1} + Q_{i_2} + Q_{i_{r-1}}) \geq \omega(Q_{i_1}).$$

Legyen

$$Q_{i_1} + Q_{i_2} + \dots + Q_{i_{r-1}} = a_0 + a_1 + \dots + a_{2^m-1}x^{2^m-1},$$

felhasználjuk, hogy

$$\begin{aligned}Q_{i_r} + Q_{i_r+1} + \dots + Q_{i_n} &= Q_{2^m}(Q_{i_r-2^m} + \dots + Q_{i_n-2^m}) = \\ &= (1 + x^{2^m} + R(x))(Q_{i_r-2^m} + \dots + Q_{i_n-2^m});\end{aligned}$$

legyen továbbá az utolsó zárójelbeli polinom:

$$b_0 + b_1x + \dots + b_{2^m-1}x^{2^m-1},$$

ahol az a_i -k és b_i -k egész számok. Ezek figyelembe vételével

$$(5) \quad Q_{i_1} + \dots + Q_{i_{r-1}} + Q_{i_r} + \dots + Q_{i_n} =$$

$$(I) \quad = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2^m-1}x^{2^m-1} +$$

$$(II) \quad + b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_{2^m-1}x^{2^m-1} +$$

$$(III) \quad + b_0x^{2^m} + b_1x^{2^m+1} + b_2x^{2^m+2} + \dots + b_{2^m-1}x^{2^{m+1}-1} + R'(x),$$

ahol $R'(x)$ minden együtthatója páros. Ebből az összefüggésből kiolvasható, hogy

$$\begin{aligned}(6) \quad \omega(Q_{i_1} + \dots + Q_{i_{r-1}} + Q_{i_r} + \dots + Q_{i_n}) &\geq \omega(Q_{i_1} + \dots + Q_{i_{r-1}}) = \\ &= \omega(a_0 + a_1x + \dots + a_{2^m-1}x^{2^m-1}),\end{aligned}$$

az (5) három sorában levő polinomot jelölje röviden I., II. és III., akkor ha valamilyen i -re a_i és b_i is páros, (5)-ben nem változik I.-hez képest a páratlan együtthatók száma; ha a_i páratlan, b_i páros, mivel $a_i + b_i$ páratlan, a páratlan együtthatók száma I.-hez képest változatlan; ha a_i páros, b_i páratlan, (5)-ben növekszik a páratlan együtthatók száma; végül ha a_i és b_i páratlan, akkor $a_i + b_i$

(6)-ból viszont a (4) indukciós feltétel alapján erre az esetre is következik (1), amivel a feladat tételét bebizonyítottuk.

Megjegyzés. A feladat tartalmának szemléletes megfogalmazását adhatjuk a Pascal háromszög segítségével. Az 1985/3.1. ábrán a Pascal háromszöget (sorait

$i =$										
0		1								
1		1	1							
2		1	0	1						
3		1	1	1	1					
2^2		1	0	0	0	1				
5		1	1	0	0	1	1			
6		1	0	1	0	1	0	1		
7		1	1	1	1	1	1	1	1	
2^3		1	0	0	0	0	0	0	0	1

85/3.1. ábra

„balra tolvá”) úgy adtuk meg, hogy a megfelelő binomiális együtthatónak a 2-es maradékát írtuk be az együttható helyére, így az 1-esek az i -edik sorban az $(1+x)^i$ polinom páratlan, a 0-k a páros együtthatóit jelölik. A polinomok összeadásának a háromszögben a megfelelő sorokbeli számok oszloponkénti összeadása felel meg; egy-egy oszlop összegének itt is a kettes maradékát kell vennünk.

Ezekkel a megjegyzésekkel feladatunk úgy fogalmazható, hogy a Pascal háromszög n sorát összeadva az összegben az 1-esek száma legalább annyi, mint az összeadandók első sorában.

1985/4. Az M halmaz 1985 különböző pozitív egészből áll, amelyek egyikek sincs 26-nál nagyobb prímosztója. Bizonyítsuk be, hogy M -nek van négy olyan eleme, amelyeknek szorzata egyenlő egy egész szám negyedik hatványával.

Megoldás. Az M elemeinek prímosztói

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23

lehetnek, tehát 9 különböző prímszám. Írjuk fel M elemeit

$$2^{p_1} \cdot 3^{p_2} \cdot 5^{p_3} \cdot \dots \cdot 23^{p_9}$$

alakban. Rendeljünk most hozzá minden ilyen számhoz egy a (p_1, p_2, \dots, p_9) számkilencesnek megfelelő számkilencset úgy, hogy p_i helyébe 1-et írunk, ha p_i páratlan és 0-t, ha páros. Az ilyen rendezett 0–1 számkilencesek maximális száma $2^9 = 512$, ezért minden 513 számkilences között kell két egyenlőnek lennie. Válasszunk ki két olyan M -beli számot, amelyhez tartozó 9-esek egyenlők, legyenek ezek $a_{1,1}$ és $a_{1,2}$; $a_{1,1}a_{1,2}$ négyzetszám, mert minden prímtenyezőjük páros kitevővel szerepel a szorzatban, ezért $\sqrt{a_{1,1}a_{1,2}}$ egész.

A maradék 1983 számból hasonló tulajdonságú két számot választunk ki, legyenek ezek $a_{2,1}$, $a_{2,2}$, tehát $\sqrt{a_{2,1}a_{2,2}}$ is egész. Ezt folytatva kapjuk a következő, egészekből álló halmazt:

$$(1) \quad \sqrt{a_{1,1}a_{1,2}}, \sqrt{a_{2,1}a_{2,2}}, \sqrt{a_{3,1}a_{3,2}}, \dots, \sqrt{a_{513,1}a_{513,2}}.$$

(Még az utolsó pár kiválasztására is volt lehetőségünk, hiszen azt $1985 - 2 \cdot 512 = 961$ szám közül választottuk ki.)

Az (1)-ben felsorolt 513 egésznek összességében legfeljebb 9 prímosztója lehet, s így az előzőek szerint van közöttük kettő, amelyekhez ugyanaz a 0–1 számokból álló számkilences tartozik, legyenek ezek $\sqrt{a_{i,1}a_{i,2}}$, $\sqrt{a_{j,1}a_{j,2}}$. Ezek szorzata négyzetszám, tehát

$$\sqrt{a_{i,1}a_{i,2}} \cdot \sqrt{a_{j,1}a_{j,2}} = b^2 \quad (b \text{ egész})$$

$$\text{és így} \quad a_{i,1}a_{i,2}a_{j,1}a_{j,2} = b^4,$$

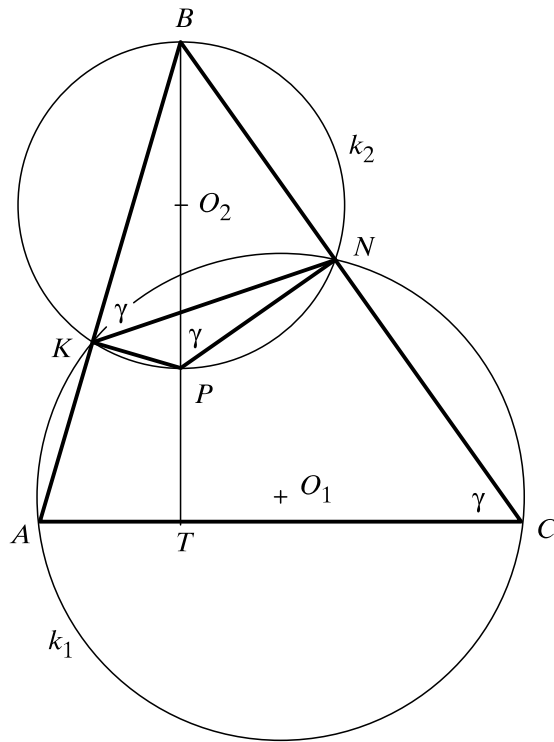
ezt kellett bizonyítanunk.

Megjegyzés. Ezt a kiválasztást már $2 \cdot 512 + 513 = 1537$ különböző egészből is el lehet végezni.

1985/5. Az O_1 középpontú k_1 kör átmegy az ABC háromszög A és C csúcán, továbbá még egyszer metszi az AB , illetve BC oldalakat az egymástól különböző K , illetve N pontokban. Legyen k_2 a KBN háromszög köré írt kör, ezt az ABC köré írt k kör pontosan két különböző pontban metszi: B -ben és M -ben. Bizonyítsuk be, hogy $O_1MB \angle = 90^\circ$.

Előzetes megjegyzés: az ABC háromszögben $AB \neq BC$, mert akkor a szimmetria miatt $B = M$ lenne, holott ezek különbözők.

1. megoldás. Az ABC köré írt k kör középpontja O , sugara R , a BKN köré írt k_2 köré O_2 , ill. r (1985/5.1. ábra). Először megmutatjuk, hogy BO_2 merőleges AC -re.



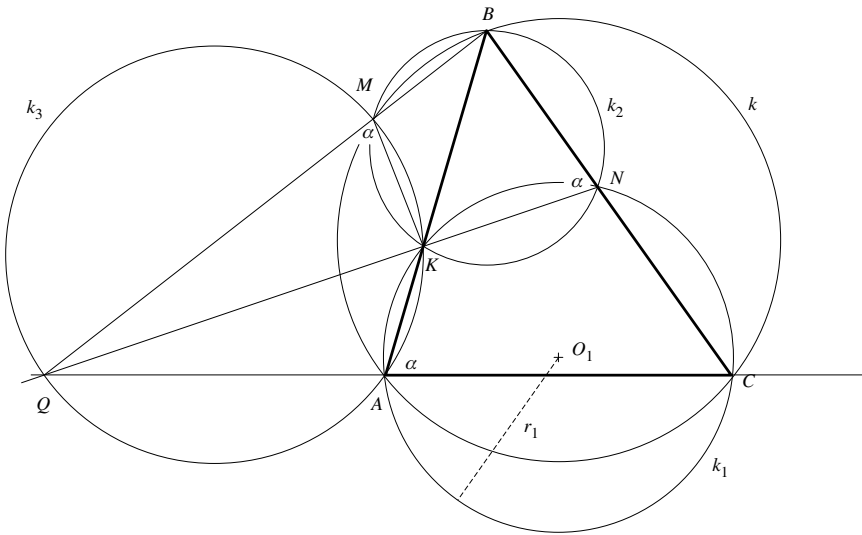
85/5.1. ábra

Messe a BO_2 egyenes k_2 -t másodszor P -ben, az AC egyenest T -ben. Mivel $ACNK$ húrnégyszög, $BKN\angle = \gamma$ és mert vele egy ívhez tartozó kerületi szög, $BP\angle = \gamma$, ez viszont azt jelenti, hogy $TCNP$ négyszög is húrnégyszög, és mivel Thálész tétele miatt $BNP\angle$ derékszög, ezért a $TCNP$ húrnégyszögben a vele szemkölti $PTC\angle = BTC\angle$ is derékszög. (Ábránkat úgy betűztük, hogy γ hegyesszög legyen, akkor alakzatunk szögei az ábrának megfelelő módon helyezkednek el.)

Mivel $BKN\angle = \gamma$, a B pontban KN -nel húzott e párhuzamos AB -vel γ szöget zár be, ezért a kerületi szögek tétele értelmében a k körnek érintője, és így az érintési pontba húzott OB sugár merőleges rá. Mivel e párhuzamos KN -nel, OB a KN egyenesre is merőleges. O_1O_2 is merőleges köreik közös húrjára, KN -re, ezért $OB \parallel O_1O_2$. OO_1 merőleges köreik közös húrjára, AC -re (1985/5.2. ábra).

Viszont BO_2 is merőleges AC -re, ezért az OBO_2O_1 négyszög szemkölti oldali párhuzamosok, tehát paralelogramma, következésképpen $OB = O_1O_2 = R$ és $OO_1 = BO_2 = r$. Mivel O_2P is párhuzamos és egyenlő OO_1 -gyel, ezért OO_1PO_2 is paralelogramma.

Jelölje O_1P másodszori metszéspontját k_2 -vel M' . Az O_1OO_2M' négyszögben O_1M' és OO_2 párhuzamosok, $O_1M' > OO_2$, $OO_1 = O_2M' = r$, ezért



85/5.3. ábra

Megjegyzések. 1. A 2. megoldás utolsó lépésében a következő, gyakran alkalmazott összefüggést használtuk fel: ha M az AB egyenes egy pontja és P tetszőleges pont, akkor PM akkor és csakis akkor merőleges AB -re, ha

$$(3) \quad AM^2 - BM^2 = AP^2 - BP^2.$$

Ez abból következik, hogy

$$\begin{aligned} AP^2 - BP^2 &= \overrightarrow{AP}^2 - \overrightarrow{BP}^2 = (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MP})^2 - (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MP})^2 = \\ &= \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 + 2\overrightarrow{MP} \cdot (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}) = AM^2 - BM^2 + 2\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy (3) akkor és csakis akkor teljesül, ha $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, azaz ha PM merőleges AB -re.

2. A feladat tételének érdekes kapcsolata van a kúpszeletek elméletével; állításának átfogalmazása: ha a parabola érinti az $ACNK$ húrnégyszög oldal-egyeneseit, akkor M fókusza rajta van a négyszög szemközti oldalainak a B , ill. Q metszéspontját összekötő egyenesen, és a húrnégyszög középpontját a fókusszal összekötő egyenes merőleges BQ -ra. Bővebbet ennek háttéréről a [36] kiegészítésünkben.

1985/6. Minden x_1 valós számmal állítsuk elő az x_1, x_2, \dots, x_n sorozatot, amelyben

$$(1) \quad x_{n+1} = x_n \left(x_n + \frac{1}{n} \right)$$

minden 1-nél nem kisebb n természetes számra.

Bizonyítsuk be, hogy ekkor x_1 -nek pontosan egy olyan értéke van, amelyre a

$$0 < x_n < x_{n+1} < 1$$

egyenlőtlenség-lánc minden pozitív egész n -re teljesül.

Megoldás. Megmutatjuk, hogy ha olyan x_1 létezik, akkor legfeljebb egy létezik. A feltételek szerint az $\{x_i\}$ sorozat szigorúan monoton növekvő és korlátos, tehát van egy x határértéke, (1)-ből következik, hogy ez eleget tesz az

$$x = x \left(x + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right) \\ x = x^2$$

egyenletnek, tehát $x = 1$.

Tegyük most fel, hogy létezik a feltételeket kielégítő két kezdőtag, x_1 és y_1 , ahol $x_1 < y_1$. Teljes indukcióval igazoljuk, hogy $x_n < y_n$, minden pozitív egész n -re. Az indukciós feltevés szerint $x_{n-1} < y_{n-1}$.

$$(2) \quad y_n - x_n = y_{n-1}^2 + \frac{y_{n-1}}{n-1} - x_{n-1}^2 - \frac{x_{n-1}}{n-1} = \\ = (y_{n-1} - x_{n-1}) \left(x_{n-1} + y_{n-1} + \frac{1}{n-1} \right) > 0.$$

A sorozatok konvergenciája miatt egy bizonyos N indextől kezdve már x_n és y_n nagyobbak lesznek $\frac{3}{4}$ -nél, ezért (2)-ből

$$y_n - x_n > \frac{3}{2}(y_{n-1} - x_{n-1}) \\ y_{n+1} - x_{n+1} > \frac{3}{2}(y_n - x_n) > \left(\frac{3}{2}\right)^2 (y_{n-1} - x_{n-1}) \\ \vdots \\ y_{n+k} - x_{n+k} > \left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} (y_{n-1} - x_{n-1}).$$

Mivel $y_{n-1} - x_{n-1}$ rögzített érték, az egyenlőtlenség jobb oldala végtelenhez tart, ami ellentmondás. Ezért legfeljebb egy x_1 kezdőérték létezik, amely a feladat feltételeinek eleget tesz.

Megmutatjuk viszont, hogy ilyen x_1 létezik.

Állítsuk elő az x_1, x_2, \dots sorozat elemeit mint $x = x_1$ -nek a függvényét.

$$(3) \quad x_2 = f_2(x) = x^2 + x, \quad f_3(x) = f_2(x)^2 + \frac{f_2(x)}{2} = x^4 + 2x^3 + \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2}, \\ f_n(x) = f_{n-1}(x) \left(f_{n-1}(x) + \frac{1}{n-1} \right).$$

Mivel $f_2(x)$ x -nek szigorúan monoton növekvő folytonos függvénye, ugyanaz igaz az $f_i(x)$ sorozat függvényeire is. (3)-ból következik, hogy $f_i(0) = 0$ és $\lim_{x \rightarrow \infty} f_i(x) = \infty$.

Értelmezzük most az

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad \text{és} \quad b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

sorozatokat a következő módon:

$$f_n(a_n) = 1 - \frac{1}{n}, \quad f_n(b_n) = 1.$$

Mivel $f_i(x)$ szigorúan monoton és folytonossága miatt a $[0, \infty[$ intervallumban minden értéket felvesz, a_n és b_n létezik és egyértelműen meghatározott.

Az a_i sorozat szigorúan monoton növekvő, ti.:

$$\begin{aligned} f_{n+1}(a_{n+1}) - f_{n+1}(a_n) &= 1 - \frac{1}{n+1} - f_n(a_n) \left(f_n(a_n) + \frac{1}{n} \right) = \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} - \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n(n+1)} > 0, \end{aligned}$$

ezért $f_{n+1}(x)$ szigorúan növekvő volta miatt $a_{n+1} > a_n$.

A b_i sorozat szigorúan monoton fogyó, ti.:

$$f_{n+1}(b_{n+1}) - f_{n+1}(b_n) = 1 - f_n(b_n) \left(f_n(b_n) + \frac{1}{n} \right) = -\frac{1}{n} < 0,$$

tehát $b_{n+1} < b_n$.

Az $[a_i, b_i]$ intervallumok egymásba vannak skatulyázva. Ez azért igaz, mert definíciójuk szerint $f_n(a_n) < f_n(b_n)$ és ezért $f_n(x)$ szigorú növekedése miatt $a_n < b_n$ minden n -re. Ha lenne olyan a_k, b_i , amelyre $b_i < a_k$ és $i < k$, akkor ebből $a_k > b_i > b_{i+1} > \dots > b_k$ következne, ami ellentmond az $a_k < b_k$ egyenlőtlenségnek. Hasonló ellentmondásra vezet az $i > k$ feltétel is.

Az egymásba skatulyázott $[a_i, b_i]$ intervallumoknak van közös c pontja, amelyre minden i -re $a_i < c < b_i$ teljesül, hiszen $a_i < a_{i+1} \leq c \leq b_{i+1} < b_i$.

Megmutatjuk, hogy $x_1 = c$ választással a feladatot kielégítő x_i sorozatot kapunk.

Mivel $a_n < c$ -ből $f_n(a_n) < f_n(c)$, azaz

$$(4) \quad 1 - \frac{1}{n} < f_n(c) \quad \text{és így} \quad f_n(c) - \frac{f_n(c)}{n} < f_n^2(c),$$

$$(5) \quad f_n(c) < f_n^2(c) + \frac{f_n(c)}{n} = f_{n+1}(c),$$

továbbá $c < b_{n+1}$ miatt

$$(6) \quad f_{n+1}(c) < f_{n+1}(b_{n+1}) = 1,$$

(4), (5) és (6) együttesen azt jelentik, hogy

$$0 < f_n(c) < f_{n+1}(c) < 1,$$

azaz a c kezdőtagú sorozatra

$$0 < x_n < x_{n+1} < 1$$

teljesül, amivel a feladat állítását bebizonyítottuk.

Megjegyzés. c értékét számítógéppel tetszőleges pontossággal meghatározhatjuk: $c = 0,4465349 \dots$

1986.

1986/1. Legyen d olyan pozitív egész, amely nem egyenlő sem 2-vel, sem 5-tel, sem 13-mal. Mutassuk meg, hogy a $\{2, 5, 13, d\}$ halmazban van két olyan különböző elem: a, b , amelyekre $ab - 1$ nem négyzetszám.

Megoldás. Ha a és b értékét a halmaz első három eleméből választjuk, akkor $(ab - 1)$ -re 9, 25, 64 négyzetszámokat kapjuk; azt kell tehát megvizsgálnunk, hogy d segítségével elő tudunk-e állítani négyzetszámot. A szóba jövő számok tehát $2d - 1, 5d - 1, 13d - 1$. Azt kell megmutatnunk, hogy ezek mindegyike nem lehet négyzetszám.

Tegyük fel a bizonyítandó ellenkezőjét, azaz, hogy van olyan a, b, c pozitív egész, amelyekre

$$(1) \quad 2d - 1 = a^2,$$

$$(2) \quad 5d - 1 = b^2,$$

$$(3) \quad 13d - 1 = c^2.$$

(1)-ből következik, hogy a páratlan, ezért négyzete $a^2 = 8k + 1$ alakú,

$$2d - 1 = 8k + 1,$$

$$(4) \quad d = 4k + 1.$$

d tehát páratlan, ennek következménye (2) és (3) alapján, hogy b és c páros. Legyen $b = 2b_1, c = 2c_1$; (3) és (2) megfelelő oldalainak a különbsége ezekkel

$$8d = c^2 - b^2 = 4(c_1^2 - b_1^2) = 4(c_1 + b_1)(c_1 - b_1),$$

$$(5) \quad 2d = (c_1 + b_1)(c_1 - b_1).$$

Mivel két egész összege és különbsége azonos párosságú, $c_1 + b_1$, valamint $c_1 - b_1$ egyaránt páros, hiszen szorzatuk páros; ennél fogva két páros szorzataként (5) jobb oldalán 4-gyel osztható szám áll, legyen ez $4r$, tehát (5)-ből:

$$2d = 4r,$$

$$d = 2r,$$

ez azt jelenti, hogy d -nek párosnak kell lennie, ami azonban lehetetlenség, hiszen megállapítottuk, hogy d páratlan. Ez az ellentmondás azt jelenti, hogy az (1)–(3) egyenletrendszernek nem lehet megoldása; ezzel a feladatot megoldottuk.

1986/2. Adott a síkban egy $A_1A_2A_3$ háromszög és egy P pont. Bevezetjük a következő jelölést: $A_s = A_{s-3}$ valahányszor $s \geq 4$.

Előállítjuk a P_0, P_1, P_2, \dots pontsorozatot, amelyben P_{k+1} a P_k -nak az A_{k+1} körüli -120° -os elforgatásával keletkező képe ($k=0, 1, 2, \dots$).

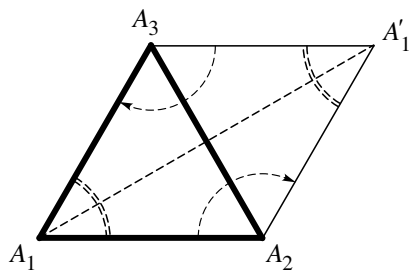
Mutassuk meg, hogy ha $P_{1986} = P_0$, akkor az $A_1A_2A_3$ háromszög szabályos.

1. megoldás. Feladatunk lényege a következő: alkalmazzunk a síkra rendre A_1, A_2, A_3 középpontú -120° -os elforgatást, majd ezt ismételjük meg 662-szer ($662 \cdot 3 = 1986$). Azt kell bizonyítanunk, hogy ha ennek a transzformációnak P_0 fixpontja, akkor $A_1A_2A_3$ szabályos háromszög.

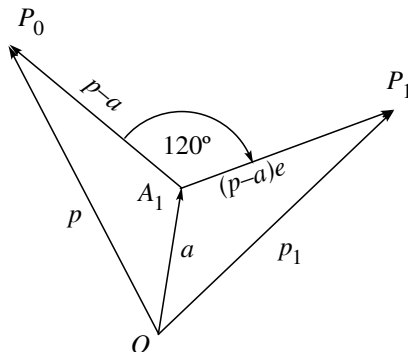
Három -120° -os elforgatás szorzata (egymásutánja) eltolás, mert minden vektort önmagába visz át; legyen ennek eltolásvektora \mathbf{v} . 662 eltolás szorzata $662\mathbf{v}$ -ral való eltolás, de ennek P_0 fixpontja, ezért csakis azonosság lehet:

$$662\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Alkalmazzuk most ezt a három elforgatást az $A_1A_2A_3$ háromszög A_1 csúcsára. Az első elforgatás A_1 -et fixen tartja, a második egy A'_1 pontba viszi át, a harmadik visszaviszi A_1 -be (1986/2.1. ábra). Az $A_1A_2A'_1A_3$ tehát olyan négyszög, amelyben $A_1A_2A'_1 \sphericalangle = A'_1A_3A_1 \sphericalangle = 120^\circ$, $A_1A_2 = A_2A'_1$, $A'_1A_3 = A_3A_1$, tehát deltoid, ezért az A_2A_3 átló felezi a szöveget, ez azonban azt eredményezi, hogy az $A_1A_2A_3$ háromszögben $A_1A_2A_3 \sphericalangle = A_2A_3A_1 \sphericalangle = 60^\circ$, a háromszög tehát szabályos.



1986/2.1. ábra



1986/2.2. ábra

2. megoldás. Helyezzük rá az vizsgált alakzatot a komplex számsíkra úgy, hogy $A_1A_2A_3$ súlypontja a 0 pontba kerüljön, a háromszög csúcsaihoz tartozó komplex számok rendre a, b, c legyenek. Az origó választása miatt

$$(1) \quad a + b + c = 0.$$

Legyen $e = \cos(-120^\circ) + i \sin(-120^\circ) = \cos 120^\circ - i \sin 120^\circ$; mivel $e^3 = 1$, $e^3 - 1 = (e - 1)(e^2 + e + 1) = 0$, ezért $e^2 + e + 1 = 0$ és így

$$(2) \quad e^2 = -e - 1.$$

Az e -vel való szorzás geometriai jelentése 0 körüli -120° -os elforgatás. Jelölje a P_0 -hoz tartozó komplex számot p , a P_i -hez tartozót ($i = 1, 2, \dots$) pedig p_i .

$$p_1 = a + (p - a)e = a + pe - ae.$$

Hasonlóan kapjuk az A_2 , majd az A_3 körüli elforgatások eredményét:

$$p_2 = b + (p_1 - b)e = b + (a - b + pe - ae)e = pe^2 - ae^2 - be + ae + b.$$

$$p_3 = c + (p_2 - c)e = p + (a - b)e^2 + (b - c)e + c - a.$$

Ebből (1) és (2) figyelembe vételével kapjuk, hogy

$$(3) \quad p_3 = p + 3(be - a).$$

Ez azt jelenti, hogy az A_1 , A_2 , A_3 körüli elforgatások eredménye a (3) formulával fejezhető ki. Vezessük be a $be - a = v$ jelölést; ezzel

$$p_3 = p + 3v, \quad p_6 = p + 6v, \quad p_9 = p + 9v, \quad \dots, \quad p_{1986} = p + 1986v = p.$$

Ezért $1986v = 0$, $v = 0$, $be = a$, (1) és (2) figyelembe vételével

$$be = a = -b - c, \quad c = b(-e - 1) = be^2.$$

Ez azt jelenti, hogy A_2 -t 0 körül 120° -kal elforgatva A_1 -et, 240° -kal elforgatva viszont A_3 -at kapjuk meg, tehát az $A_1A_2A_3$ háromszög szabályos.

Megjegyzések. 1. Megoldásunkban 1986-nak csak 3-mal való oszthatóságát használtuk ki.

2. Feladatunk megoldásában lényegében azt a *Napóleon tételnek* nevezett összefüggést használtuk ki, mely szerint egy háromszög oldalai fölé (kifelé) szerkesztett szabályos háromszögek középpontjai szabályos háromszöget alkotnak. A $P_0P_1P_2$ háromszög oldalai fölé szerkesztett szabályos háromszögeknek éppen A_1 , A_2 , A_3 a középpontjai. Feladatunk ezen a ponton találkozik az 1975/3. feladattal (l. az ottani megjegyzést).

1986/3. Egy szabályos ötszög minden csúcspontjához oly módon rendelünk egy-egy egész számot, hogy ennek az öt számnak az összege pozitív legyen. Ha e közül az öt pont közül három egymás után következőt rendre X -szel, Y -nal, illetve Z -vel jelölünk, a hozzájuk rendelt számokat pedig (ugyanabban a sorrendben) x -szel, y -nal, illetve z -vel jelöljük, ahol $y < 0$, akkor megengedett a következő művelet:

Az x , y , illetve z számok helyébe (ugyanabban a sorrendben) az $x + y$, $-y$, $z + y$ számokat írjuk. Ezt a műveletet mindaddig megismételjük, amíg csak egy negatív y előfordul.

Döntsük el, vajon minden esetben befejeződik-e ez az eljárás véges számú lépés után.

Megoldás. A megengedett művelet az ötszög csúcsaihoz rendelt számok összegét nem változtatja meg. Erre támaszkodunk, amikor megmutatjuk, hogy az eljárás véges számú lépés után minden esetben befejeződik.

Tegyük fel, hogy az öt szám: x_1, x_2, x_3, x_4 és x_5 , összegük legyen S .
Képezzük a következő ötváltozós függvényt:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 - x_4)^2 + (x_2 - x_5)^2 + (x_3 - x_1)^2 + (x_4 - x_2)^2 + (x_5 - x_3)^2.$$

Megmutatjuk, hogy ha az $\{x_i\}$ számötsre a megengedett átalakítást alkalmazzuk, akkor f értéke csökken. Minthogy f nemnegatív egész értékű függvény, az átalakítás következtében fellépő csökkenés mértéke legalább 1, és így véges sok lépésben befejeződik, hiszen 0 alá nem csökkenhet. Elegendő tehát f szigorúan csökkenő voltát bizonyítanunk, a megengedett átalakítások esetén.

Legyen $X(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ egy megfelelő számöts és legyen közöttük legalább egy negatív. Mivel f ciklikusan szimmetrikus, feltehetjük, hogy $x_3 < 0$.

A megengedett átalakítással X az $Y(x_1, x_2 + x_3, -x_3, x_3 + x_4, x_5)$ számötsbe megy át. Azt kell belátnunk, hogy $f(X) > f(Y)$, azaz $f(Y) - f(X) < 0$.

$$\begin{aligned} f(Y) - f(X) &= (x_1 - x_3 - x_4)^2 + (x_2 + x_3 - x_5)^2 + (-x_3 - x_1)^2 + (x_4 - x_2)^2 + (x_5 + x_3)^2 - \\ &\quad - (x_1 - x_4)^2 - (x_2 - x_5)^2 - (x_3 - x_1)^2 - (x_4 - x_2)^2 - (x_5 - x_3)^2 = \\ &= 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2x_3^2 + 2x_3x_4 + 2x_3x_5 = 2x_3S < 0, \end{aligned}$$

ezzel állításunkat bizonyítottuk.

Megjegyzések. 1. A feladat megoldásánál felhasznált f függvény igen sokféle lehet, a lényegük azonban az, hogy a megengedett átalakítás hatására értéke szigorúan monoton változzék.

Érdekes függvényt adott meg versenydolgozatában Kós Géza:

$$\begin{aligned} g(x) &= 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1) + \\ &\quad + 3(x_1x_3 + x_2x_4 + x_3x_5 + x_4x_1 + x_5x_2). \end{aligned}$$

A g függvény szigorúan monoton növekszik, de korlátos, tehát értéke egy, a kiindulási számötsötől függő korlát alatt marad, ti. $g(X) \leq S^2$. Ez egyébként abból is következik, hogy

$$g = S^2 - \frac{f}{2}.$$

Jól használható pl. a $c(X)$ függvény is:

$$\begin{aligned} c(X) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3 + x_4)^2 + \\ &\quad + (x_3 + x_4 + x_5)^2 + (x_4 + x_5 + x_1)^2 + (x_5 + x_1 + x_2)^2. \end{aligned}$$

Ennek szigorú monoton növekvő volta a $c = f + 2S^2$ összefüggésből is kiolvasható.

2. A verseny zsűrije egy amerikai versenyző függvényét jutalmazta külön-díjjal; a függvény:

$$\begin{aligned} a(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = & |x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| + |x_5| + \\ & + |x_1 + x_2| + |x_2 + x_3| + |x_3 + x_4| + |x_4 + x_5| + |x_5 + x_1| + \\ & + |x_1 + x_2 + x_3| + |x_2 + x_3 + x_4| + |x_3 + x_4 + x_5| + |x_4 + x_5 + x_1| + |x_5 + x_1 + x_2| + \\ & + |x_1 + x_2 + x_3 + x_4| + |x_2 + x_3 + x_4 + x_5| + |x_3 + x_4 + x_5 + x_1| + \\ & + |x_4 + x_5 + x_1 + x_2| + |x_5 + x_1 + x_2 + x_3|. \end{aligned}$$

A megadott átalakítás után, ha feltesszük, hogy $x_2 < 0$,

$$\begin{aligned} a(X) - a(Y) = & |x_3 + x_4 + x_5 + x_1| - |x_2 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5| \\ = & |S - x_2| - |S + x_2| > 0, \end{aligned}$$

$a(X)$ tehát szigorúan monoton csökken. $a(X)$ -nek kétségtelen előnye viszonylag jól áttekinthető volta.

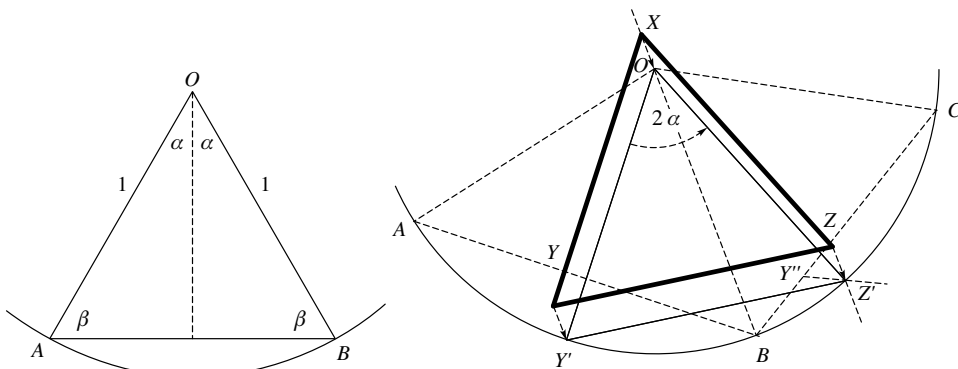
3. A feladat állítása igaz marad akkor is, ha ötszög helyett n -szöget szerepeltetünk. Erre nézve l. Kós Géza cikkét a KöMaL-ban: Egy olimpiai feladat általánosítása. KöMaL 37 (1987) 538–560.

1986/4. Legyenek A és B egy O középpontú szabályos n -szög szomszédos csúcsai ($n \geq 5$). Egy, az OAB háromszöggel egybevágó XYZ háromszöggel először lefedjük az OAB -t, majd az XYZ háromszöget a sokszög belsejében úgy mozgatjuk, hogy az Y és Z pontok állandóan a sokszög oldalain legyenek.

Milyen alakzatot ír le X , ha Y és Z befutja az n -szög határát?

Megoldás. Vezessük be a következő jelöléseket: legyen a sokszög köré írt kör sugara 1, $AOB \sphericalangle = 2\pi/n = 2\alpha$, tehát $\alpha = \pi/n$; $OAB \sphericalangle = OBA \sphericalangle = \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

A sokszöget az O körüli 2α szögű forgások önmagába viszik át, ezért elegendő a feladatban leírt mozgást az AB és BC oldalakhoz kapcsolódva vizsgálni, hiszen az így nyert X pontok halmazát rendre $2\alpha, 4\alpha, \dots, (n-1)2\alpha$ szöggel elforgatva megkapjuk X összes lehetséges helyzetét (1986/4.1. ábra).

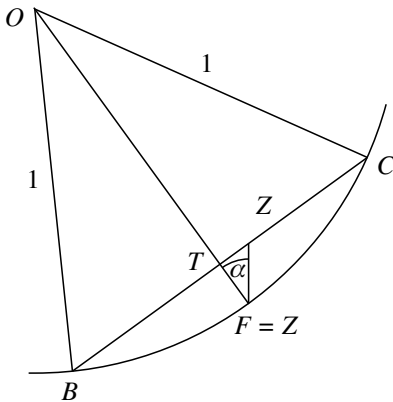


86/4.1. ábra

Legyen tehát A, B, C a sokszög három, egymást követő csúcsa (pl. pozitív forgásirányban haladva). Ha az Y pont az AB oldalon van, a Z -nek a BC -n kell lennie, hiszen a BC -t követő oldalnak minden belső pontja AB -nél nagyobb távolságra van AB pontjaitól.

Ha $Y = A$, akkor $Z = B$ és így az X pont O -val esik egybe; hasonló a helyzet $Y = B$ esetén is, ezért a továbbiakban feltesszük, hogy Y az AB belső pontja. Toljuk most el az XYZ háromszöget az \overrightarrow{XO} -ral, X ekkor O -ba, Y az Y' , Z pedig a Z' pontba kerül. Mivel Y' és Z' távolsága O -tól 1, ezért rajta vannak a sokszög köré írt körön és $\overrightarrow{XO} = \overrightarrow{YY'} = \overrightarrow{ZZ'}$. Forgassuk most el (pozitív irányban) 2α szöggel O körül az A, B, Y, Y' pontokat, ezek elforgatottjai rendre B, C, Y'', Z' , ahol Y'' a BC szakasz belső pontja.

Mivel $YY' = ZZ' = Y''Z'$, azért a $ZY''Z'$ háromszög egyenlő szárú és szár-szöge 2α , hiszen $Y''Z'$ eredeti helyzetéhez képest 2α szöggel fordult el. De akkor a $ZY''Z'$ és a BCO hasonló egyenlő szárú háromszögek, amelyek a BC egyenes különböző oldalain helyezkednek el, ennél fogva megfelelő száraiak párhuzamosak, s így OB párhuzamos ZZ' -vel, de akkor a $\overrightarrow{ZZ'} = \overrightarrow{XO}$ is párhuzamos OB -vel, ami azt jelenti, hogy X az BO egyenesen van, még hozzá O -nak B -vel ellentétes oldalán.



86/4.2. ábra

Eredményünk azt jelenti, hogy míg az Y az A -ból kiindulva B -be mozdul el, addig X az O -ból kiindulva leír egy szakaszt az O -tól legtávolabbi helyzetéig, a Q pontig, majd innen visszatér O -ba. A Q helyzetét pontosabban is meghatározhatjuk. Figyeljük meg, hogy az X pont O -tól mért távolsága ZZ' -vel egyenlő, ez pedig akkor a legnagyobb, ha a $ZY''Z'$ háromszög is a legnagyobb. Ez viszont akkor a legnagyobb, ha a szárai által közrefogott magasság is a legnagyobb. Ez a magasság a Z' pontnak a BC egyenestől mért távolságával egyenlő, és ez akkor a legnagyobb, ha Z' a BC körív F felezőpontjával esik egybe. Ennek alapján kiszámíthatjuk az $OQ = ZF$ szakasz hosszát (1986/4.2. ábra).

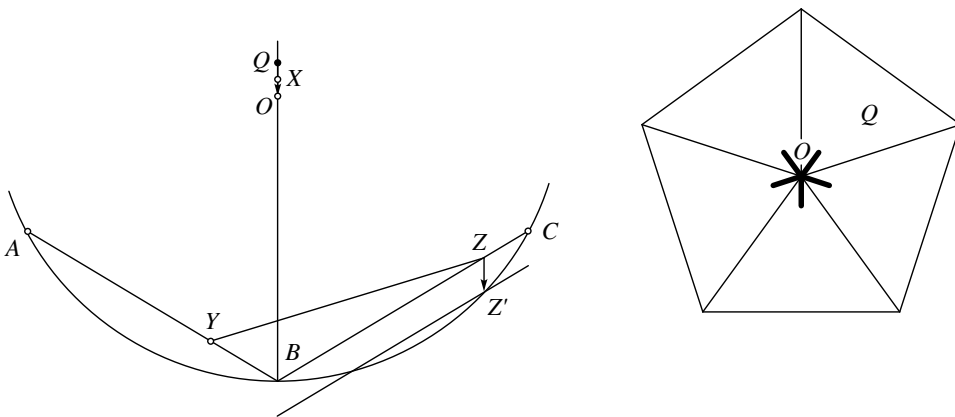
Legyen az OBC háromszög O -hoz tartozó magasságának talppontja T . Az FZT és OCT derékszögű háromszögek hasonlóságából következik, hogy

$$\frac{ZF}{FT} = \frac{1}{OT}.$$

Ebből

$$ZF = \frac{FT}{OT} = \frac{1 - OT}{OT} = \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} = OQ.$$

Megmutatjuk, hogy az OQ szakasz tetszőleges X pontja lehet a mozgó háromszög csúcsa. Toljuk el ui. a BC oldalt az \overline{XO} -ral, az eltoltszakasz két pontban metszi a BC körívet (vagy esetleg felezőpontjában érinti). Legyen az egyik metszéspont Z' . A Z' -ből OB -vel húzott párhuzamos BC -t Z -ben metszi. Z -hez csak egyetlen olyan Y pontja van az AB oldalnak, amelynek Z -től mért távolsága $AB=BC$ -vel egyenlő. Az YZ szakasz fölé szerkesztett OAB -vel egybevágó háromszög X csúcsa pedig — mint az előzőekben láttuk — az O -tól ZZ' -vel egyenlő távolságra helyezkedik el az OQ szakaszon, tehát X -szel azonos (1986/4.3. ábra).



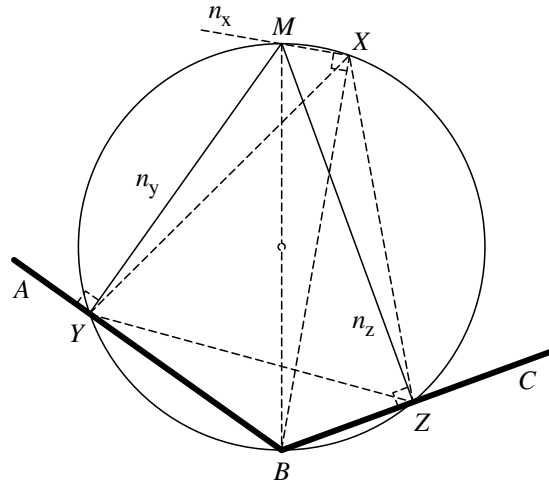
86/4.3. ábra

A leírt alakzat ezek szerint n szakasz, amelyek O -ból indulnak ki, és végpontjaik egy szabályos n -szög csúcsai.

Megjegyzések. 1. Megoldásunkban több alkalommal a szemléletre hivatkozva fogadtunk el bizonyos helyzetekre vonatkozó meggondolásokat; ezeket természetesen még szabatosabban is meg lehet okolni; a verseny bíráló bizottsága azonban elfogadta az ilyen jellegű indoklásokat.

2. A feladat az ún. *mozgásgeometria* (*kinetikus geometria*) tárgykörébe tartozik, aminek számos közvetlen technikai alkalmazása van. Ebből a geometriából idézünk most egy nevezetes tételt, ami fényt deríthet a feladat eredetére is:

Képzeld el, hogy két sík fedi egymást; rögzítsük az egyiket, a másikat pedig a rögzített síkjában mozgassuk el. A mozgó sík minden pontja leír a rögzített síkban egy pályagörbét; a mozgás egy pillanatában szerkesszük meg minden pályagörbéhez a ponthoz tartozó normálist; ezek (ha nem párhuzamosak) egy ponton mennek át, ezt a pontot nevezik a mozgás *pillanatnyi középpontjának* (*momentán centrumának*; egy görbe egy pontjában a normális a pontbeli érintőre állított merőleges) (1986/4.4. ábra).



86/4.4. ábra

Feladatunkban képzeljük a sokszög síkját rögzítettnek, a mozgó sík tartalmazza az XYZ háromszöget. Mozgás közben az Y, Z pontok egy-egy szakaszt írnak le, ezek pontjaiban az $\mathbf{n}_Y, \mathbf{n}_Z$ normálisok a szakaszokra állított merőlegek, metszéspontjuk az M pillanatnyi középpont. Mivel az $MYBZ$ négyszög húrnégyszög, ezért M és X egyaránt rajta van az XYZ köré írt körön, ennek a körnek MB átmérője, Y -ből és Z -ből is derékszögben látszik. M -en átmegy azonban X pályájának a normálisa, \mathbf{n}_X is. Thálész tételéből következik, hogy BX merőleges MX -re, BX tehát X pályagörbéjének az érintője; X ezért olyan görbét ír le, amelynek minden érintője egy rögzített ponton, a B -n megy át. Bebizonyítható, hogy ezzel a tulajdonsággal csak az egyenes rendelkezik, X tehát egyenesen mozog.

1986/5. Határozzuk meg az összes olyan f függvényt, amely a nemnegatív valós számok halmazán van értelmezve, csak nemnegatív értéket vesz fel, és teljesíti a következő feltételeket:

$$f(x \cdot f(y)) \cdot f(y) = f(x + y) \text{ minden nemnegatív } x\text{-re és } y\text{-ra;}$$

$$f(2) = 0;$$

$$f(x) \neq 0, \text{ ha } 0 \leq x < 2.$$

Megoldás. Tegyük fel először, hogy $x \geq 2$ és legyen $y = 2$; (a)-ból

$$f((x - 2)f(2)) \cdot f(2) = f(x - 2 + 2) = f(x),$$

(b) miatt $f(2) = 0$ és ezért minden $x \geq 2$ -re

$$(1) \quad f(x) = 0,$$

és (c) miatt ez csak $x \geq 2$ esetben következik be.

Legyen most $0 \leq y < 2$. Az (a) bal oldala akkor nulla, ha $xf(y) \geq 2$, azaz

$$(2) \quad x \geq \frac{2}{f(y)};$$

jobb oldala viszont éppen akkor nulla, ha $x + y \geq 2$, tehát

$$(3) \quad x \geq 2 - y.$$

Ebből már következik, hogy a megadott feltételek mellett szükségképpen teljesülnie kell a

$$(4) \quad \frac{2}{f(y)} = 2 - y$$

egyenlőségnek; ha ui. nem teljesülne valamilyen megengedett y -ra, akkor pl. a (4) bal oldalán kisebb szám állna, mint a jobb oldalán, és így létezne olyan x , amelyre

$$(5) \quad \frac{2}{f(y)} < x < 2 - y$$

lenne, de akkor (2) miatt (a) bal oldalán 0 állna, jobb oldalán (c) miatt biztosan nem, ami lehetetlen; hasonlóan lehetetlen (5)-ben az ellentétes irányú egyenlőtlenség is; ezért minden $0 \leq y < 2$ értékre (4) teljesül, ebből

$$(6) \quad f(y) = \frac{2}{2 - y}, \quad (0 \leq y < 2).$$

Összefoglalva tehát megállapíthatjuk, hogy az (a), (b), (c) feltételeknek csak a következő függvény tehet eleget:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{2 - x}, & \text{ha } 0 \leq x < 2, \\ 0, & \text{ha } x \geq 2. \end{cases}$$

Be kell még látnunk, hogy ez valóban ki is elégíti a feltételeket.

(b) és (c) nyilván teljesülnek, ha $y \geq 2$, az (a) függvényegyenlet mindkét oldalán 0 áll, elegendő tehát (a) teljesüléséhez a $0 \leq y < 2$ esetet vizsgálni, ezt a feltételt a következőkben kikötjük.

Tegyük fel először, hogy $x + y \geq 2$. Ebből következik, hogy a jobb oldalon 0 áll. Ebben az esetben $x \geq 2 - y$, és

$$x \cdot f(y) = \frac{2x}{2 - y} \geq \frac{2(2 - y)}{2 - y} = 2,$$

tehát $f(xf(y)) = 0$, így a bal oldal is 0-val egyenlő.

Ha viszont $x + y < 2$, akkor $x < 2 - y$, és

$$x \cdot f(y) = \frac{2x}{2 - y} < \frac{2(2 - y)}{2 - y} = 2,$$

ezért

$$\begin{aligned} f(x \cdot f(y)) \cdot f(y) &= \frac{2}{2 - \frac{2x}{2-y}} \cdot \frac{2}{2-y} = \frac{2(2-y) \cdot 2}{(4-2y-2x)(2-y)} = \\ &= \frac{2}{2-(x+y)} = f(x+y), \end{aligned}$$

így a megadott $f(x)$ minden esetben kielégíti (a)-t.

1986/6. Adott a síkon rácspontoknak egy véges halmaza. Döntsük el, vajon lehetséges-e minden esetben ezek közül a pontok közül néhányat pirosra, a többi pedig fehérre színezni úgy, hogy minden olyan egyenesen, amely párhuzamos valamelyik koordináta-tengellyel, a rajta levő piros pontok száma legfeljebb 1-gyel térjen el az ugyancsak rajta levő fehér pontok számától. (A rács itt négyzetrácsot jelent.)

1. megoldás. Nevezzük el rácsegyenesnek a koordináta-tengelyekkel párhuzamos, rácspontot tartalmazó egyeneseket, és jelölje M az adott rácspontok halmazát. M minden pontján nyilván két rácsegyenes megy át. Megmutatjuk, hogy M pontjainak mindig létezik olyan színezése, amely mellett bármelyik rácsegyenesen a piros és fehér rácspontok száma legfeljebb 1-gyel tér el egymástól.

Az egyszerűség kedvéért feltehetjük, hogy a rácspontok úgy helyezkednek el, hogy mindkét koordinátájuk pozitív, tehát az ún. első síknegyedben vannak.

Ha M egy P rácspontján két olyan rácsegyenes megy át, amelyek P -n kívül nem tartalmaznak rácspontot, P -t fehérre színezzük, és ez a színezés megfelel a feltételnek. Az ilyen pontokat a továbbiakban figyelmen kívül hagyjuk.

Ha egy tetszőleges rácsegyenesen 1-nél több M -beli rácspont van, számozzuk meg sorban a pontokat alulról (az x -tengelytől) felfelé, ill. az y -tengelytől jobbra menet az 1, 2, ... számokkal. Kössük össze szakaszokkal minden egyenesen az

$$(1, 2), \quad (3, 4), \quad (5, 6), \quad \dots, \quad (2k-1, 2k), \quad \dots$$

pontpárokat; az összekötésből legfeljebb egy utolsó (a tengelytől legtávolabbi) pont maradhat ki, ha a rácsvonalon páratlan volt a jelölt rácspontok száma. Ily módon M pontjai és a most definiált összekötő rácsszakaszok együttesen egy gráfot alkotnak, amelyben minden csúcspont foka (azaz a belőle induló szakaszok száma) 0, 1 vagy 2 (1986/6.1. ábra).

Ezt a gráfot fel tudjuk bontani közös csúcspont nélküli nyílt vagy zárt tördöntvonalakra, amelyek a most értelmezett rácsszakaszok egymáshoz fűzött sorozatából állnak.

Válasszunk ki ui. egy M -beli elsőfokú A_1 rácspontot; ebből indul ki rácsszakasz az A_2 pontba. Ha A_2 elsőfokú (azaz csak egy rácsszakaszt tartalmaz), a tördöntvonal véget ér; ha nem, egyértelműen továbbhaladhatunk egy A_3 -ba. Ha itt nem ér véget, tovább folytatjuk utunkat, míg egy elsőfokú A_n rácspontba nem érünk. Ha az A_1, A_2, \dots, A_n pontok nem merítik ki M -et, válasszunk

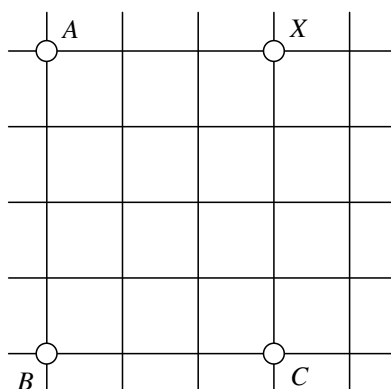
Tegyük fel, hogy meg tudjuk színezni a kívánt módon a rácspontokat, ha az adott rácspontok száma kisebb n -nél; megmutatjuk, hogy ebben az esetben n pontra is megadhatunk helyes színezést.

Ha van az adott rácspontok között olyan P pont, hogy a rajta átmenő rácsegyenesek nem tartalmaznak további rácspontot a megadottak közül, akkor a P -n kívül $n - 1$ pontot színezünk ki, P -t pedig tetszőleges színűre festjük, ezzel helyes színezést kapunk.

Ha nincs előbbi tulajdonságú pont, válasszunk ki két egy egyenesen levőt az adott pontok közül, A -t és B -t. Két esetet különböztetünk meg:

1. az A -n és B -n átmenő AB egyenesre merőleges rácsegyenesek egyikén sincs adott rácspont;
2. legalább az egyikén van az adott pontok közül rácspont.

Az 1. esetben az A -n és B -n kívüli $n - 2$ pontot az indukciós feltevésünk értelmében helyesen színezhetjük; legyen továbbá A fehér, B piros, ekkor a fehér és piros pontok száma az A -t vagy B -t tartalmazó egyeneseken kívül változatlan marad, az AB egyenesen a különbség nem változik, az A -n, ill. B -n átmenő, AB -re merőlegesen pedig 1 a piros és fehér pontok számának a különbsége.



86/6.2. ábra

A 2. esetben van pl. a B -n átmenő, AB -re merőleges rácsegyenesen egy C az adott pontok közül. Legyen X az A , B , C ponthármast téglalappá kiegészítő rácspont: X vagy az adott pontok között van, vagy nincs (1986/6.2. ábra).

Ha X az adott pontok között van, hagyjuk el az A , B , C , X pontokat, a maradék $n - 4$ rácspontot színezzük ki helyesen, majd A -t és C -t pirosra, B -t és X -et fehérre színezzük, ezzel egyetlen rácsegyenesen sem változott a piros és fehér rácspontok számának a különbsége.

Ha viszont X nincs az adott rácspontok között, hagyjuk el az adott pontok közül az A , B , C ponthármast, de vegyük hozzá X -et. Az így kapott $n - 2$ elemű pontthalmaz színezhető. Fessük most be A -t és C -t X -szel azonos színűre, B -t X -szel ellentétes színűre, majd hagyjuk el X -et. A most nyert színezéssel egyik rácsegyenesen sem változik a piros és fehér pontok számának a különbsége.

Ezzel beláttuk, hogy n pontra megadható helyes színezés.

Megjegyzés. Első megoldásunkban felhasználtuk, hogy ha egy zárt töröttvonal minden szomszédos oldalpárja merőleges egymásra, akkor csúcseinak száma páros.

Ez következik pl. abból, hogy ha a töröttvonal oldalvektorait valamilyen körüljárás szerint irányítjuk, akkor minden oldalvektort a következővel egyirányú helyzetbe 90° -os vagy $3 \cdot 90^\circ$ -os pozitív irányú elforgatás visz át. Ezeknek az elforgatásoknak az összege 360° többszöröse, tehát 90° páros számú többszöröse; páratlan számokból viszont csak páros számú adhat összegül páros számot, ezért az elforgatások, azaz a csúcsok száma is páros.

1987.

1987/1. Legyen $S = \{1, 2, \dots, n\}$ ($n \geq 1$). Jelölje $p_n(k)$ az S olyan permutációinak a számát, melyeknek pontosan k fixpontja van. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{k=0}^n k p_n(k) = n!$$

(S egy permutációjának az i -edik elemét fixpontnak mondjuk, ha az i -vel egyenlő; $i = 1, 2, \dots, n$).

1. megoldás. Írjuk fel egymás alá az n elem összes $n!$ számú permutációját, és minden permutációban karikázzuk be a fixelemeket, tehát pl. az 5-öst akkor, ha az 5. oszlopban van:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} & \textcircled{5} & \dots & \textcircled{n} & & & & \\ & 2 & 1 & \textcircled{3} & 7 & \textcircled{5} & \dots & 9 & & & \\ \textcircled{1} & \textcircled{2} & 5 & \textcircled{4} & 7 & \dots & \textcircled{n} & & & & \end{array}$$

A k fixelemmel rendelkező permutációk sorában k számot karikáztunk be. Mivel a k fixelemű permutációk száma $p_n(k)$, azért a k fixelemű permutációk soraiban összesen $k p_n(k)$ karika szerepel ($k = 0, 1, \dots, n$), a

$$\sum_{k=0}^n k p_n(k)$$

összeg ezek szerint éppen az $n!$ számú sorban az összes bekarikázott elemek száma.

Számoljuk most össze oszloponként a bekarikázott elemeket. Az egyes oszlopokban az 1-es, 2-es, \dots , n -es számok nem játszanak kitüntetett szerepet, ezért nyilván mindegyik minden oszlopban ugyanannyiszor fordul elő, méghozzá $\frac{n!}{n} = (n-1)!$ helyen. Az i szám is ennyiszor fordul elő az i -edik oszlopban, tehát minden oszlopban $(n-1)!$ a bekarikázott elemek száma; összesen tehát $n(n-1)! = n!$ bekarikázott szám van a táblázatban, ezt előző eredményünkkel

összevetve éppen a bizonyítandót kapjuk:

$$\sum_{k=0}^n k p_n(k) = n!$$

2. megoldás. Először összefüggést keresünk $p_n(k)$ és $p_{n-1}(k-1)$ között, azaz n elem k fixpontú permutációinak és $n-1$ elem $k-1$ fixpontú permutációinak a száma között.

Válasszuk ki az n elem egyikét, és rögzítsük (tartsuk „fixen”); a többi $n-1$ elem $k-1$ fixpontú permutációinak a száma $p_{n-1}(k-1)$, ezek a rögzített elemmel együtt k fixpontú permutációt képeznek. A rögzített elemet n -féleképpen választhatjuk, így ezen módon $n \cdot p_{n-1}(k-1)$ darab k fixpontú permutációt számolhatunk össze, ezek tartalmazzák n elem összes k fixpontú permutációit. Így azonban minden k fixpontú permutációt k -szor is megkapunk; pl. ha az 1 2 3 4 5 elemek 1 4 3 2 5 három fixpontos permutációját tekintjük ($k=3$), akkor ezt megkapjuk az előző módszer szerint, ha az 1-et rögzítjük és a többi négy kétfixpontos permutációit állítjuk elő, de akkor is, ha a 3-ast vagy az 5-öst rögzítjük. Ezért

$$(1) \quad k p_n(k) = n p_{n-1}(k-1).$$

Adjuk most össze az (1) típusú egyenlőségek megfelelő oldalait, ha a k helyébe rendre 1-et, 2-t, ..., n -et helyettesítünk:

$$(2) \quad \sum_{k=1}^n k p_n(k) = \sum_{k=1}^n n p_{n-1}(k-1) = n \sum_{k=1}^n p_{n-1}(k-1).$$

Vegyük most még figyelembe, hogy $0 \cdot p_n(0) = 0$ és $\sum_{k=1}^n p_{n-1}(k-1) = (n-1)!$, hiszen ez $n-1$ elem 0 fixpontú, 1 fixpontú, ..., $n-1$ fixpontú permutációi számának az összege, vagyis az összes permutáció száma, ezért (2) így írható:

$$\sum_{k=0}^n k p_n(k) = n(n-1)! = n!,$$

s ezzel a bizonyítandót kapjuk.

3. megoldás. n elem fixpont nélküli permutációinak a számát egyszerűség kedvéért jelölje $p(n)$, tehát a feladat jelölésével $p(n) = p_n(0)$.

Ha n elemből k elemet rögzítünk és a többi $n-k$ elemet úgy permutáljuk, hogy ezeknek ne legyen fixpontja, akkor az így kapott k fixpontú permutációk száma $p(n-k)$. Mivel k elemet $\binom{n}{k}$ -féleképpen választhatunk ki, az összes k

fixpontú permutációk száma

$$(1) \quad p_n(k) = \binom{n}{k} p(n-k).$$

$$\text{Minthogy } \binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1},$$

$$(2) \quad k \cdot p_n(k) = n \binom{n-1}{k-1} p(n-k),$$

Ebből, mivel $0 \cdot p_n(0) = 0$,

$$\sum_{k=0}^n k p_n(k) = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} p(n-k) = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p(n-k),$$

(1) szerint az összegezendő mennyiség

$$p_{n-1}(n-1) + p_{n-1}(n-2) + \dots + p_{n-1}(0)$$

azaz $n-1$ elem $n-1$ fixpontos, $n-2$ fixpontos, \dots , 0 fixpontos permutációinak összege, vagyis az összes permutáció, ezeknek a száma viszont $(n-1)!$, ezért

$$\sum_{k=0}^n k p_n(k) = n(n-1)! = n!,$$

ami bizonyítandó volt.

Megjegyzések. 1. A feladat témakörének az őse a XVIII. sz. első feléből származik és az „elcserélt levelek problémája” címen vált ismeretessé: valaki n darab levelet ír meg n számú barátjának, majd megcímez n borítékot. Kérdés: mi a valószínűsége annak, hogy senki sem kapja meg a saját levelét. Ha a leveleket sorszámozzuk, e valószínűség meghatározásához szükség van az n elem fixpontos permutációinak a számára. N. Bernoulli (1687–1759) erre a következő formulát találta:

$$(3) \quad p(n) = p_n(0) = n! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right).$$

(3) eleget tesz a $p(n) = (n-1)(p(n-1) + p(n-2))$ rekurziós összefüggésnek.

(3) egyébként felhasználható a 3. megoldás levezetéséhez is. (3) bizonyítása megtalálható pl. Hajnal Imre és szerzőtársai: Matematika IV (fakultatív B változat) gimnáziumi tankönyvben.

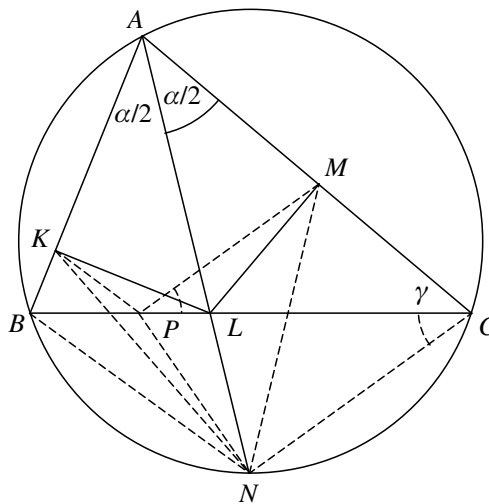
2. Az olimpia eredeti feladatjavaslata a

$$\sum_{k=0}^n (k-1)^2 p_n(k) = n!$$

összefüggés bizonyítását is megkívánta; ez az általunk alkalmazott módszerekkel is bizonyítható.

1987/2. Az ABC hegyesszögű háromszög A csúcsából induló belső szögfelező a BC oldalt az L pontban, a háromszög köré írt kört másodszor az N pontban metszi. L -ből az AB egyenesre emelt merőleges talppontja K , az AC egyenesre emelt merőlegesé pedig M . Bizonyítsuk be, hogy az $AKNM$ négyszög és az ABC háromszög területe egyenlő.

1. megoldás. Bizonyításunknak az a lényege, hogy megmutatjuk: ha az $ABNC$ négyszögből levágjuk a BNC háromszöget, illetve a KBN és MNC háromszögeket, egyenlő területű részek maradnak meg. Ehhez elég igazolnunk, hogy $t_{BNC} = t_{KBN} + t_{MNC}$. Ezt pedig úgy igazoljuk, hogy a BNC háromszöget úgy vágjuk ketté, hogy a részek rendre a KBN , illetve MNC háromszögekkel legyenek egyenlő területűek (1987/2.1. ábra).



87/2.1. ábra

Figyeljük meg, hogy ABC hegyesszögű volta miatt a K és M pontok az AB , illetve az AC oldalak belső pontjai. Messe az $AKLM$ húrnégyszög köré írt köre a BC oldalegyenest másodszor a P pontban. (P és L egybe is eshet, ha a háromszög egyenlő szárú.) A kerületi szögek tételét az utóbbi körben, illetve a háromszög köré írt körben alkalmazva kapjuk, hogy

$$\frac{\alpha}{2} = \angle LAM = \angle LPM; \quad \frac{\alpha}{2} = \angle BAN = \angle BCN = \angle PCN;$$

ezek szerint az MP és NC szakaszok a PC szakasz különböző oldalán vannak és PC -vel azonos szöget zárnak be, tehát párhuzamosak.

A párhuzamosságból viszont következik, hogy az MNC és PNC háromszögek egyenlő területűek: $t_{MNC} = t_{PNC}$. A K és M , illetve B és C szerepének felcserélésével hasonlóan kapjuk, hogy $t_{KNB} = t_{PNB}$. Viszont a PNC

és PNB háromszögek együttesen éppen a BNC háromszöget adják ki, ezért $t_{MNC} + t_{KBN} = t_{BNC}$, amiből állításunk a bevezetőben mondottak szerint már következik.

2. megoldás. A bizonyítandó terület egyenlőséget a háromszöggeometria különböző méretes összefüggései segítségével is nagyon sokféle módon igazolhatjuk. Erre mutatunk most egy példát; az előző megoldás jelöléseit használjuk.

Ismeretes (1. megjegyzésünket), hogy

$$AN = f = \frac{b+c}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Az $AKNM$ négyszög szimmetrikus az AN szögfelezőre, ezért területe: $t_{AKNM} = \frac{1}{2} AN \cdot KM$. Viszont $CL = \frac{ab}{b+c}$, mert a szögfelező a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja; ezért az LCM derékszögű háromszögből $ML = CL \sin \gamma$; az MKL háromszögből pedig $KM = 2ML \sin \left(\frac{\pi - \alpha}{2} \right) = 2ML \cos \frac{\alpha}{2}$. Ezeket figyelembe véve:

$$t_{AKNM} = \frac{1}{2} \frac{b+c}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} \cdot 2ML \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} (b+c) \frac{ab}{b+c} \sin \gamma = \frac{ab \sin \gamma}{2} = t_{ABC}.$$

és ezt kellett bizonyítanunk.

Megjegyzés. A szögfelező körülírt körön belüli szakaszára vonatkozó összefüggést (2. megoldás) pl. így bizonyíthatjuk: a BNC egyenlő szárú háromszögben $BN = NC = \frac{a}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$. Ptolemaios tételét alkalmazva az $ABNC$ húrnégyszögre kapjuk, hogy

$$\frac{ab}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} + \frac{ac}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} = AN \cdot a,$$

ebből:

$$AN = \frac{b+c}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

1987/3. Az x_1, x_2, \dots, x_n valós számokra teljesül az

$$(1) \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$$

egyenlőség. Bizonyítsuk be, hogy minden 2-nél nem kisebb k természetes számhoz található olyan a_i egész számok ($i = 1, 2, \dots, n$), amelyek nem mind egyenlők 0-val, $|a_i| \leq k-1$ valamennyi i -re, és érvényes rájuk az alábbi egyenlőtlenség:

$$(2) \quad |a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n| \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}.$$

Megoldás. Az (1) összefüggésre a számtani és a négyzetes közép közötti egyenlőtlenséget alkalmazva kapjuk, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} \geq \frac{|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|}{n},$$

tehát

$$|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \leq \sqrt{n}.$$

Képezzük most a $(0, 1, 2, \dots, k-1)$ számokból készíthető, nem csupa 0, n tagú sorozatokat, ezek száma $k^n - 1$; legyen egy tetszőleges közülük (a_1, a_2, \dots, a_n) . Az a_i előjelét $(i=1, 2, \dots, n)$ úgy választjuk meg, hogy a_i és x_i előjele megegyezzen (ha $x_i=0$, a_i előjele tetszőleges), ezzel a választással $a_i x_i$ nemnegatív, s ezért

$$(3) \quad a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = |a_1| |x_1| + |a_2| |x_2| + \dots + |a_n| |x_n| \leq \leq (k-1) (|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|) \leq (k-1) \sqrt{n}.$$

Osszuk most fel a $[0; (k-1)\sqrt{n}]$ intervallumot $k^n - 1$ részre, azaz $\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}$ hosszúságú zárt intervallumokra. Ha a fenti módon képzett összegek egyike belesik a 0-val kezdődő intervallumba, akkor erre a (2) bizonyítandó nyilván teljesül. Ha egyik összeg sem tartozik az első intervallumba, akkor a többi $k^n - 2$ intervallum valamelyike legalább kettőt tartalmaz az összegek közül, pl. a következőket:

$b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n$ és $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$ ($|b_i|, |c_i| \leq k-1$), különbségük ezért abszolút értékben nem lehet nagyobb az intervallum hosszánál:

$$\begin{aligned} |b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n - c_1 x_1 - c_2 x_2 - \dots - c_n x_n| &= \\ &= |(b_1 - c_1)x_1 + (b_2 - c_2)x_2 + \dots + (b_n - c_n)x_n| \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}. \end{aligned}$$

Mivel b_i és c_i előjele megegyezik, $|b_i - c_i| \leq k-1$. Vezessük most be a $b_i - c_i = a_i$ jelölést, erre tehát teljesül feladatunk követelménye:

$$|a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n| \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}.$$

Megjegyzés. (3) közvetlenül megkapható (1)-ből a Cauchy-féle egyenlőtlenség [22] alkalmazásával, felhasználva, hogy $a_i^2 \leq (k-1)^2$:

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n &\leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \leq \\ &\leq \sqrt{n(k-1)^2} \sqrt{1} = (k-1)\sqrt{n}. \end{aligned}$$

1987/4. Bizonyítsuk be, hogy nincs a nemnegatív egészek halmazán értelmezett olyan f függvény, amelynek értéke is nemnegatív egész, és minden n -re kielégíti az

$$(1) \quad f(f(n)) = n + 1987$$

egyenletet.

Megoldás. A feladat állításával ellentétben tegyük fel, hogy létezik az (1) feltételt kielégítő függvény. Helyettesítsünk (1)-ben n helyébe $f(n)$ -t:

$$(2) \quad f(f(f(n))) = f(n) + 1987,$$

majd vegyük (1) mindkét oldalának f függvényét:

$$(3) \quad f(f(f(n))) = f(n + 1987).$$

(2) és (3) egybevetéséből következik, hogy

$$(4) \quad f(n + 1987) = f(n) + 1987.$$

Legyen t tetszőleges pozitív egész. Teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy

$$(5) \quad f(n + 1987t) = f(n) + 1987t.$$

Rögzítsük n -et. $t = 1$ -re állításunk a (4) alattival azonos; indukciós feltevésünk szerint

$$f(n + 1987(t - 1)) = f(n) + 1987(t - 1).$$

Helyettesítsünk ebbe n helyébe $n + 1987$ -et, akkor (4) felhasználásával következik, hogy

$$\begin{aligned} f(n + 1987t) &= f(n + 1987) + 1987(t - 1) = \\ &= f(n) + 1987 + 1987(t - 1) = f(n) + 1987t, \end{aligned}$$

és ezzel (5)-öt bizonyítottuk.

Legyen most r olyan nemnegatív egész, amely kisebb 1987-nél. f értelmezése szerint $f(r)$ nemnegatív egész, és legyen $f(r)$ 1987-tel való osztási maradéka s ($s \leq 1986$, nemnegatív egész):

$$(6) \quad f(r) = 1987k + s. \quad (k \text{ nemnegatív egész}).$$

Ebből (1) miatt

$$f(f(r)) = r + 1987,$$

másrészt (6)-ból és (5)-ből

$$f(f(r)) = f(1987k + s) = f(s) + 1987k$$

következik. E két utóbbi eredményt összevetve kapjuk, hogy

$$(7) \quad r + 1987 = f(s) + 1987k.$$

Míthogy $r < 1987$, ebből

$$f(s) + 1987k < 2 \cdot 1987, \quad f(s) < 1987(2 - k).$$

Viszont $f(s) \geq 0$, ezért k két lehetséges értéke $k = 1$ vagy $k = 0$.

Az első esetben (6)-ból és (7)-ből következik, hogy

$$(8) \quad f(r) = 1987 + s,$$

$$(9) \quad f(s) = r,$$

ez egyúttal kizárja, hogy $s = r$ legyen, mert akkor (8)-ból és (9)-ből $r = s$ helyettesítéssel $1987 = 0$ következne, tehát $s \neq r$.

A második esetben $k = 0$, (6)-ból és (7)-ből ekkor

$$(10) \quad f(r) = s,$$

$$(11) \quad f(s) = 1987 + r,$$

következnék; ez az előzőhöz hasonlóan ismét kizárja az $s = r$ esetet.

A (9) és (10) együttesen azt jelentik, hogy az f függvény a

$$0, 1, 2, \dots, 1986$$

számokat olyan (a, b) párokba rendezi, amelyekben

$$f(a) = b \quad \text{és} \quad f(b) = a + 1987,$$

vagy

$$f(b) = a \quad \text{és} \quad f(a) = b + 1987,$$

és a párok elemei különbözők. Mivel azonban a $0, 1, \dots, 1986$ halmaznak páratlan számú eleme van, ez nyilván lehetetlen, ezért nem létezhet a megjelölt tulajdonsággal rendelkező f függvény sem.

Megjegyzés. A bizonyításban 1987 helyett tetszőleges páratlan pozitív egész szerepelhetne.

1987/5. Legyen n 3-nál nem kisebb természetes szám. Bizonyítsuk be, hogy létezik a síkban n olyan pont, amelyek közül bármely kettőnek a távolsága irracionális, és közülük bármely három olyan nem elfajuló háromszöget alkot, amelynek területe racionális.

1. megoldás. Megoldásainkban azt az ismert egyszerű tényt használjuk fel, hogy a rácspontok (azaz az egész koordinátájú pontok) által meghatározott sokszögek (az ún. rácssokszögek) területe racionális szám.

Válasszunk ki a négyzetrácson n számú ún. független rácspontot. (A pontok egy halmaza független pontokból áll, ha egyik három sincs közülük egy egyenesen.) Ilyen pontok nyilván léteznek, mivel 3 pontot ki tudunk így választani, s ha már van bizonyos számú független pontunk, ezek összekötő egyenesei véges halmazt alkotnak, véges sok egyenes azonban nem tartalmazhatja az összes rácspontot, tehát kell lennie az összekötő egyenesen kívüli rácspontoknak is; ezzel bővítve a független pontok halmazát növeljük a független pontok számát.

A pontok által meghatározott háromszögek területe racionális.

Figyeljük most meg az n pont között fellépő összes távolságot. Legyen ezeknek négyzete rendre d_1, d_2, \dots, d_k . A d_i számok egészek, mert egész számok különbségének négyzetösszegéből jönnek létre. Mivel véges sok d_i számunk van, van olyan p prímszám, amely egyik d_i -nek sem osztója.

Nagyítsuk most a rácsot a \sqrt{p} -szeresére.

Minden rácsháromszög területe p -szeresére nő, tehát racionális marad. Minden rácsszakasznak a hossza \sqrt{p} -szeresére nő, tehát az i -edik rácsszakasz hossza $\sqrt{pd_i}$. pd_i azonban nem négyzetszám, mert prímtényezős felbontásához p elsőfokon szerepel, ezért $\sqrt{pd_i}$ irracionális minden i -re. Pontrendszerünk tehát kielégíti a feladat feltételeit.

2. megoldás. Válasszunk n rácspontot az $y = x^2$ egyenletű parabolán, azaz olyan pontokat, amelyeknek koordinátái (a, a^2) alakúak (a pozitív egész).

Mivel a parabolát egy egyenes legfeljebb két pontban metsz, a pontok között nincs három egy egyenesbe eső, és az általuk meghatározott háromszög területe — mint minden rácsháromszögé — racionális.

Az $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$ pontok távolsága:

$$AB = \sqrt{(a-b)^2 + (a^2 - b^2)^2} = |a-b| \sqrt{1 + (a+b)^2}.$$

Mivel $a-b$ egész és $(a+b)^2 + 1$ nem négyzetszám, hiszen nincs olyan 0-tól különböző négyzetszám, amelyiknek a szomszédja is négyzetszám, ezért $|a-b| \sqrt{1 + (a+b)^2}$ irracionális, és így a kiválasztott pontok között is csak irracionális távolság lép fel.

Megjegyzés. Azt, hogy a rácssokszögek területe racionális, elég a rácsháromszögekre belátni. Rácsháromszögekre ez szemléletesen következik abból a tényből, hogy minden rácsháromszög befoglalható egy olyan ráctéglalapba, amelynek oldalai párhuzamosak a koordináta-tengelyekkel; ennek területe egész, és a háromszög megkapható úgy, hogy a téglalaphból derékszögű háromszögeket vagdaltunk le, amelynek a területe vagy egész, vagy pedig egész szám fele.

Következik állításunk a háromszög területképletéből is; ha a csúcsok (egész) koordinátái: (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , akkor a terület

$$t = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)).$$

A rácssokszögek nevezetes területképlete szerint, ha a sokszög határán levő rácspontok száma h , belső rácspontjainak a száma b , akkor a területe:

$$t = b - 1 + \frac{h}{2},$$

ebből is következik, hogy a rácssokszögek területe racionális. (Ezt az összefüggést szokás Pick-képletnek is nevezni.)

1987/6. Legyen n 2-nél nem kisebb egész szám. Bizonyítsuk be, hogy ha $k^2 + k + n$ értéke prímszám minden olyan k egészre, amelyre $0 \leq k \leq \sqrt{\frac{n}{3}}$ teljesül, akkor $k^2 + k + n$ értéke minden olyan k -ra is prím, amely kielégíti a $0 \leq k \leq n - 2$ feltételt.

Megoldás. Legyen $f(k) = k^2 + k + n$. A feladat állítása úgy is fogalmazható, hogy ha $f(0), f(1), \dots, f\left(\left[\sqrt{n/3}\right]\right)$ prímszámok, akkor prímek az $f(0), f(1), \dots, f(n-2)$ értékek is.

Állításunk bizonyítására jelöljük y -nal azt a legkisebb nemnegatív egészet, amelyre $y \leq n - 2$ teljesül, és $f(y)$ nem prímszám.

Meg fogjuk mutatni, hogy ilyen y nem létezik, ez éppen azt jelenti azonban, hogy az $f(0), f(1), \dots, f(n-2)$ számok is prímek. y előbbi választásának a következménye, hogy minden olyan k -ra, amelyre $0 \leq k \leq y - 1$ fennáll, $f(k)$ már prím.

Mivel $f(y)$ összetett, létezik legkisebb prímosztója; legyen ez q . Megmutatjuk, hogy $q > 2y$. Tegyük fel ui. ennek az ellenkezőjét, legyen tehát $q \leq 2y$. Képezzük az

$$(1) \quad f(y) - f(k) = y^2 + y + n - (k^2 + k + n) = (y - k)(y + k + 1)$$

különbséget. Fussa be k a 0-tól $y - 1$ -ig terjedő egészeket, írjuk fel a megfelelő értékek alá az $y - k$, illetve $y + k + 1$ értékeket is:

$$\begin{array}{ccccccc} k: & 0, & 1, & 2, & \dots, & y-2 & y-1; \\ y-k: & y, & y-1, & y-2, & \dots, & 2, & 1; \\ y+k+1: & y+1, & y+2, & y+3, & \dots, & 2y-1, & 2y. \end{array}$$

Megfigyelhetjük, hogy $y - k$ és $y + k + 1$ lehetséges értékei között minden 1-től $2y$ -ig terjedő egész szerepel, tehát $q \leq 2y$ miatt q is. Létezik tehát olyan k szám, $0 \leq k \leq y - 1$, amelyre $(y - k)(y + k + 1) = f(y) - f(k)$ osztható q -val. Minthogy q választása miatt osztója $f(y)$ -nak, ezért $f(k)$ -nak is osztója. Mivel azonban $f(k)$ és q prím, ez csak úgy lehetséges, ha

$$f(k) = q.$$

Az y választása miatt azonban

$$y - k \leq n - 2 < n + k + k^2 = f(k) = q,$$

$$y + k + 1 \leq n - 1 + k < n + k + k^2 = f(k) = q,$$

ezért a q prímszám nem lehet osztója sem $y - k$ -nak, sem $y + k + 1$ -nek, tehát szorzatuknak, $f(y) - f(k) = f(y) - q$ -nak, azaz $f(y)$ -nak sem, ami ellentmond q definíciójának. Bebizonyítottuk tehát, hogy $q > 2y$, ez a q és y egész volta miatt $q \geq 2y + 1$ -et is jelenti.

Mivel q az $f(y)$ legkisebb prímosztója és nem azonos $f(y)$ -nal, ezért

$$f(y) \geq q^2 \geq (2y + 1)^2 = 4y^2 + 4y + 1,$$

$$y^2 + y + n \geq 4y^2 + 4y + 1.$$

Ebből $3y^2 + 3y + 1 - n \leq 0$. Az egyenlőtlenség teljesülése esetén azonban y nem lehet nagyobb a bal oldali polinom nagyobbik gyökénél, azaz

$$y \leq -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{n}{3} - \frac{1}{12}}, \quad \text{ezért} \quad y < \sqrt{\frac{n}{3}}.$$

Ennek a feltételnek eleget tevő y -ok esetén azonban $f(y)$ prím (ez volt a feladat kikötése), ezért az $f(0), f(1), \dots, f(n-2)$ számok valóban prímek.

Megjegyzés. E feladatnak egyik érdekessége, hogy bizonyos prímszámok létezéséből viszonylag sok újabb prímszám létezésére lehet következtetni. Pl. $n = 41$ esetén $k = 1, 2, 3$ értékekre $k^2 + k + 41$ prímszám, feladatunk alapján ebből már következik további 36 prímszám létezése: 61, 71, ..., 1061. (Az $x^2 + x + 41$ polinomnak ezt a tulajdonságát egyébként már L. Euler is ismerte a XVIII. században.)

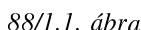
1988.

1988/1. Adott a síkon két, azonos középpontú kör, amelyek sugara R , ill. r ($R > r$). P a kisebb kör egy rögzített pontja, B pedig végigfut a nagyobb körön. A BP egyenes másik metszéspontja a nagyobb körrel C . A BP -re P -ben állított l merőleges másik metszéspontja a kisebb körrel A (ha l a kör érintője, legyen $A = P$).

I. Határozzuk meg a $BC^2 + CA^2 + AB^2$ által felvett értékek halmazát.

II. Határozzuk meg az AB szakasz felezőpontjának a mértani helyét.

Megoldás. A két kör közös középpontja legyen O . A kis kör a BC szakaszt x , y , x hosszúságú darabokra vágja szét, az l egyenes kis körön belüli szakasza z . y és z nulla hosszúság is lehet, ha BC , ill. l a kis kört érinti (1988/1.1. ábra). Alkalmazzuk most Pitagorász tételét az APC és APB háromszögekre,


$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = x^2 + z^2 + (2x + y)^2 + (x + y)^2 + z^2 = 6(x + y)x + 2(y^2 + z^2).$$
$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 6(R^2 - r^2) + 8r^2 = 6R^2 + 2r^2$$

A feladat II. részének megoldására jelöljük B tükörképét AP felező merőlegesére B' -vel (ha $P = A$, $B = B'$), így a $PAB'B$ téglalapot kapjuk meg, ennek Q középpontja az AB szakasz felezőpontja. Ezek szerint a szóban forgó Q pontokat úgy kapjuk meg, hogy P -ből a nagy kört felére kicsinyítjük. Ennek a k körnek a középpontja PO K felezőpontja, sugara $\frac{R}{2}$. k minden Q pontja hozzátartozik a mértani helyhez; ha Q rajta van a PO átmérőn, akkor $P = A$ és B , C a PO átmérő két végpontja. Ha Q nincs rajta PO -n, Q -nak P -ből való kétszeres nagyítottja, B' , rajta van a nagy körön, és $PB' > R - r$, ezért a PB' fölé szerkesztett Thalész kör metszi egy B pontban a nagy kört, az ehhez tartozó A pontra Q éppen az AB felezőpontja, tehát hozzátartozik a mértani helyhez.

422

1988/2. Legyen n pozitív egész szám, és legyenek $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$ a B halmaz részhalmazai. Tegyük fel, hogy

mindegyik A_i -nek pontosan $2n$ eleme van,

mindegyik $A_i \cap A_j$ metszetnek ($1 \leq i < j \leq 2n+1$) pontosan egy eleme van, a B halmaz minden eleme benne van legalább két A_i -ben.

n milyen értékeire rendelhető hozzá B minden eleméhez a 0 és 1 számok egyike úgy, hogy minden A_i -nek pontosan n olyan eleme legyen, amelyhez 0-t rendelünk?

1. megoldás. Legelőször megmutatjuk, hogy B minden eleme pontosan két A_i -ben van benne.

Szemléltetés céljára feladatunkat átfogalmazzuk gráfelméleti feladattá. Rendeljünk hozzá a B minden b_1, b_2, \dots, b_s eleméhez és minden A_i részhalmazhoz egy-egy gráfcúcsot, a csúcsokat ugyanazzal a betűvel jelöljük, mint a halmazelemeket, ill. a részhalmazokat. Az A_i és b_j csúcsok akkor vannak éllel összekötve, ha az A_i halmaz tartalmazza a b_j elemet. Gráfunkban tehát két b_j csúcs, ill. két A_i csúcs nem lehet éllel összekötve (ún. páros gráfról van szó). A feladat kikötései szerint

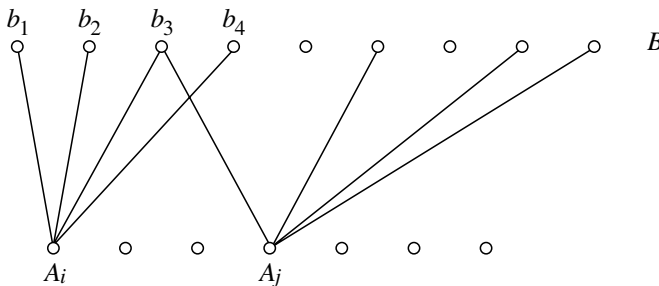
a) minden A_i csúcs foka száma $2n$;

b) A_i és A_j csúcsokhoz pontosan egy b_k csúcs létezik, amely mindkettővel össze van kötve;

c) minden b_j csúcs foka legalább 2 (1988/2.1. ábra).

Azt akarjuk bizonyítani, hogy B minden b_j csúcsának foka pontosan 2.

Válasszunk ki egy tetszőleges B -hez tartozó csúcsot, legyen ez b . c) szerint



88/2.1. ábra

ennek foka legalább 2. Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy b -ből kiindul három él, méghozzá az A_1, A_2, A_3 csúcsokba. A_1 -ből további $2n-1$ él indul ki a) szerint a $b_1, b_2, \dots, b_{2n-1}$ csúcsokba, A_2 -ből a b_{2n}, \dots, b_{4n-2} , A_3 -ból a $b_{4n-1}, \dots, b_{6n-3}$ csúcsokba. b) szerint ebből a $6n-3$ csúcsból nem vezethet több él az A_1, A_2, A_3 csúcsok egyikébe sem, mert ha pl. b_{2n} össze lenne

kötve pl. A_3 -mal, akkor A_2 -höz és A_3 -hoz két b_j csúcs lenne (ti. b és b_{2n}), amelyekkel össze lennének kötve, ellentétben b)-vel. A felsorolt $6n - 3$ csúcs tehát szükségképpen különböző.

A $b_1, b_2, \dots, b_{6n-3}$ csúcsokból az $A_4, A_5, \dots, A_{2n+1}$ csúcsokba (összesen $2n - 2$ csúcsba) c) szerint legalább $6n - 3$ él vezet, hiszen minden b_i foka legalább 2, és az A_1, A_2, A_3 -ba nem mehet belőlük újabb él, azért az A_4, \dots, A_{2n+1} csúcsok egyikébe legalább 4 élnek kell befutnia, hiszen $3(2n - 2) < 6n - 3$. Legyen ez a csúcs A_4 . Az A_4 -ből induló 4 él közül kettő a $\{b_1, \dots, b_{2n-1}\}$, $\{b_{2n}, \dots, b_{4n-2}\}$, $\{b_{4n-1}, \dots, b_{6n-3}\}$ csúcshalmazok közül ugyanabba fut, tegyük fel pl., hogy a b_1 és b_2 csúcsokba. Ez azonban ellentmondás, mert így A_1 -hez és A_4 -hez két b_j is van, amellyel össze vannak kötve, ellentétben a b) kikötéssel.

Ez azt jelenti, hogy minden b_j foka pontosan 2.

Ha a feladat b_j -hez 0-t, ill. 1-et rendel, ez a gráfban azt fogja jelenteni, hogy b_j -t pirosra, illetve zöldre festjük, és ugyanolyanra színezzük a b_j -ből induló valamennyi élt, tehát az élek színe és b_j végpontjuk színe megegyezik. A feltétel szerint minden A_i csúcsban n piros és n zöld él van, a gráfnak összesen tehát $(2n + 1)n$ piros éle van.

Induljunk ki az A_i csúcsokból egy piros élen, tegyük fel, hogy a b_k (piros) csúcsba jutunk, ennek foka 2, tehát indul belőle egy piros él az A_j csúcsba. Ily módon a piros élek egyértelműen párokba rendezhetők, tehát számuk: $(2n + 1)n$ páros, ezért n is páros; ez a színezhetőség (azaz a 0–1 hozzárendelhetőség) szükséges feltétele.

Az n páros volta elégséges is a feladatban jelzett 0–1 hozzárendelés megvalósításához. Ezt egy nagyon szemléletes konstrukcióval mutatjuk meg. Legyen n páros, és jelöljük ki egy körön a szabályos $2n + 1$ -szög csúcsait, ezek $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$. Minden csúcsot kössünk össze a két oldalán levő, hozzá legközelebbi $\frac{n}{2} - \frac{n}{2}$ csúccsal, az összekötő szakaszok legyenek pirosak, minden csúcsban tehát n piros szakasz van. Húzzuk meg a sokszög be nem rajzolt átlóit is, ezek legyenek zöldek, minden csúcsban n zöld átló van. Ennek alapján a halmaz szerkesztése:

a B halmaz elemei legyenek a színezett szakaszok, a pirosak megfelelőihez 0-t, a zöldek megfelelőihez 1-et rendelünk hozzá. Az A_i részhalmazok megfelelői az A_i sokszögcúcsok lesznek azzal az értelmezéssel, hogy A_i -hez tartoznak a belőle induló színezett szakaszoknak megfelelő halmazelemek.

a), b) és c) erre a konstrukcióra nyilván teljesülnek, hiszen A_i -nek $2n$ eleme van; A_i -nek és A_j -nek pontosan egy közös eleme van, az $A_i A_j$ csúcsokat összekötő szakasz megfelelője; a B minden eleme pontosan két A_i -ben van benne, a szakaszvégpontoknak megfelelő részhalmazokban.

2. megoldás. A feladat első részére adunk egy általánosan használható megoldási módszert.

Tegyük fel, hogy B -nek s számú eleme van, b_1, b_2, \dots, b_s . Rendeljük hozzá ezekhez az elemekhez egy $2n+1$ sorból és s oszlopból álló táblázat (mátrix) oszlopait, a táblázat soraihoz pedig rendre az $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$ részhalmazokat. A táblázat egy mezőjére 1-et írunk, ha az oszlopához tartozó halmazelem eleme a sorához tartozó részhalmaznak; egyébként pedig 0-t.

	b_1	b_2	b_3		b_s
A_1	1	0	1	...	1
A_2	1	1	0	...	0
A_3	0	0	1	...	0
				\vdots	
A_{2n+1}	0	1	0	...	1

A feladat feltételei szerint így minden sorban $2n$ számú 1-es van. Jelölje M a táblázat 1-esének a számát, ezek szerint $M = 2n(2n+1)$. Jelöljük továbbá az oszlopokban levő 1-esek számát rendre $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ -sel,

$$M = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_s.$$

A táblázat A_i -hez tartozó sorát egy s dimenziós \mathbf{A}_i vektornak tekintjük, ennek koordinátái a sorban levő 0-k és 1-esek, tehát pl.

$$\mathbf{A}_1(1, 0, 1, \dots, 1).$$

(Ld. a [39] megjegyzésünket.) Ezzel a jelölésrendszerrel a feladat feltételei:

- a) $\mathbf{A}_i^2 = 2n$ ($i = 1, 2, \dots, 2n+1$);
- b) $\mathbf{A}_i \mathbf{A}_j = 1$, ($i \neq j$);
- c) $\beta_i \geq 2$, ($i = 1, 2, \dots, s$), amiből $M \geq 2s$, azaz $s \leq n(2n+1)$.

Képezzük az \mathbf{A}_i -k összegét, ennek koordinátái: $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$, majd az összeg négyzetét. Egyrészt

$$(1) \quad \left(\sum_1^{2n+1} \mathbf{A}_i \right)^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_s^2,$$

másrészt

$$(2) \quad \left(\sum_1^{2n+1} \mathbf{A}_i \right)^2 = \sum_1^{2n+1} \mathbf{A}_i^2 + 2 \sum_{i < j} \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j = (2n+1)2n + 2 \binom{2n+1}{2} = 4n(2n+1).$$

Alkalmazzuk (1) jobb oldalára a számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenséget:

$$(3) \quad \left(\sum_1^{2n+1} A_i \right)^2 \geq s \left(\frac{\sum_1^s \beta_i}{s} \right)^2 = \frac{M^2}{s} = \frac{1}{s} \cdot 4n^2(2n+1)^2.$$

(2) és (3) összehasonlításából adódik, hogy

$$s \geq n(2n+1).$$

Ezt viszont a c) alatti eredménnyel összevetve kapjuk, hogy $s = n(2n+1)$; emiatt azonban (3)-ban egyenlőségnek kell állnia, de ez csak valamennyi β_i egyenlősége esetén következhet be, tehát $\beta_i = 2$ minden i -re, azaz valamennyi halmazelem pontosan két részhalmazban van benne.

Megjegyzés. A B halmaz részhalmazával együtt ún. blokkrendszert alkot. A blokkrendszerek vizsgálata a kombinatorika egyik alapfeladata [31].

1988/3. Az f függvényt a pozitív egészek halmazán értelmezzük a következő módon:

- (1) $f(1) = 1, \quad f(3) = 3,$
- (2) $f(2n) = n,$
- (3) $f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n),$
- (4) $f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n)$

minden pozitív egész n -re.

Határozzuk meg azoknak az n -eknek a számát, amelyek az $1 \leq n \leq 1988$, $f(n) = n$ feltételeket kielégítik.

Megoldás. Vegyük mindenekelőtt észre, hogy az (1)–(4) formulák a függvényt egyértelműen meghatározzák, hiszen a $2n$, $4n+1$, $4n+3$ alakú számok kimerítik az egészek halmazát. Ha tehát találunk egy olyan f függvényt, amely eleget tesz az (1)–(4) feltételeknek, akkor megtaláltuk a megoldást.

Nézzük f értékét néhány helyen:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(n)$	1	1	3	1	5	3	7	1	9

Már ebből is észrevehetjük, hogy az $f(n) = n$ feltételt kielégítő számok 2 hatványainak a szomszédságában fordulnak elő. Írjuk fel az előbbi két sort kettes számrendszerben is.

n_{10}	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n_2	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001
$f(n)_2$	1	01	11	001	101	011	111	0001	1001

Ebből az a sejtésünk alakul ki, hogy ha n -et kettes számrendszerben írjuk fel, $f(n)$ az n jegyeiből fordított sorrendben felírt számmal egyenlő. Ezt k szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk be, ahol k az n kettes számrendszerbeli alakjában a számjegyek száma.

Ehhez figyeljük meg, hogy a $2n$, $2n+1$, $4n$, $4n+1$, $4n+3$ számokra kettes számrendszerben rendre a következő végződések jellemzők:

$$\begin{array}{ccccc} 2n & 2n+1 & 4n & 4n+1 & 4n+3 \\ 0 & 1 & 00 & 01 & 11 \end{array}$$

A következőkben a kettes számrendszerbeli számokat egyszerűen felülhúzással jelöljük. Indukciós feltevésünk $k=1$, $k=2$ esetben előző táblázatunkból nyilvánvalóan teljesül. Tegyük fel, hogy minden, k -nál kevesebb jegyű (kettes számrendszerbeli) számra, ha $n = \overline{a_{k-1}a_{k-2}\dots a_1}$ ($a_{k-1}=1$),

$$(5) \quad f(n) = \overline{a_1a_2\dots a_{k-1}}.$$

1. Legyen most $m = 2n = \overline{a_1a_2\dots a_{k-1}0}$, $n = \overline{a_1a_2\dots a_{k-1}}$,

$$f(m) = f(2n) = f(n) = \overline{a_{k-1}a_{k-2}\dots a_1} = \overline{0a_{k-1}a_{k-2}\dots a_1},$$

(5) tehát a $2n$ alakú k -jegyű számokra is teljesül.

2. Legyen $m = 4n+1 = \overline{a_1a_2\dots a_{k-2}01}$, ahol $n = \overline{a_1a_2\dots a_{k-2}}$, és ezért $2n+1 = \overline{a_1a_2\dots a_{k-2}1}$, tehát (3) alapján

$$\begin{aligned} f(m) &= 2f(2n+1) - f(n) = f(2n+1) + (f(2n+1) - f(n)) = \\ &= \overline{1a_{k-2}\dots a_2a_1} + \overline{1a_{k-2}\dots a_2a_1} - \overline{a_{k-2}\dots a_2a_1} = \\ &= \overline{1a_{k-2}\dots a_2a_1} + \overline{10\dots 0} = \overline{10a_{k-2}\dots a_2a_1}, \end{aligned}$$

tehát (5) a $4n+1$ alakú k -jegyű számokra is teljesül.

3. Legyen $m = 4n+3 = \overline{a_1a_2\dots a_{k-2}11}$, ahol $n = \overline{a_1a_2\dots a_{k-2}}$, (4) alapján

$$\begin{aligned} f(m) &= 3f(2n+1) - 2f(n) = f(2n+1) + 2(f(2n+1) - f(n)) = \\ &= \overline{1a_{k-2}\dots a_1} + 2\left(\overline{1a_{k-2}\dots a_1} - \overline{a_{k-2}\dots a_2a_1}\right) = \\ &= \overline{1a_{k-2}\dots a_1} + \overline{10\dots a_1} = \overline{11a_{k-2}\dots a_1}, \end{aligned}$$

ezért (5) is teljesül a $4n+3$ alakú k -jegyű számokra, indukciós bizonyításunkat ezzel befejeztük.

Eredményünk szerint $f(n)=n$ azokra a számokra teljesül, amelyek kettes számrendszerbeli alakja megegyezik a fordított sorrendű jelekkel felírt számmal (ezek az ún. palindrom számok); ilyen pl. 10111101.

A $2n$ -jegyű palindromok száma 2^{n-1} , mivel az első jegyük 1, a következő $n-1$ jegyet 2^{n-1} -féleképpen lehet megválasztani. A $2n+1$ -jegyűek száma ennek kétszerese: 2^n , mivel ezek a $2n$ -jegyűekből úgy állíthatók elő, hogy középre 0-t vagy 1-et írunk.

Mivel $2^{10} < 1988 < 2^{11}$, 1988 kettes számrendszerbeli alakja 11-jegyű, a fentiek szerint a legfeljebb 11-jegyű palindromok száma:

$$2^0 + 2^0 + 2^1 + 2^1 + 2^2 + 2^2 + 2^3 + 2^3 + 2^4 + 2^4 + 2^5 = 94,$$

viszont $1988 = \overline{11111000100}$, ennél nagyobb 11-jegyű palindrom kettő van: $\overline{11111011111}$ és $\overline{11111111111}$, ezért a feladat megoldását szolgáltató palindromok száma 92.

1988/4. Bizonyítsuk be, hogy a

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geq \frac{5}{4}$$

egyenlőtlenségnek eleget tevő valós x számok halmaza diszjunkt intervallumok egyesítése, amelyek összhossza 1988.

Megoldás. Jelölje az (1) bal oldalán levő függvényt $f(x)$, ennek értelmezési tartománya az $x = 1, 2, \dots, 70$ helyek kivételével a valós számok halmaza, azaz a

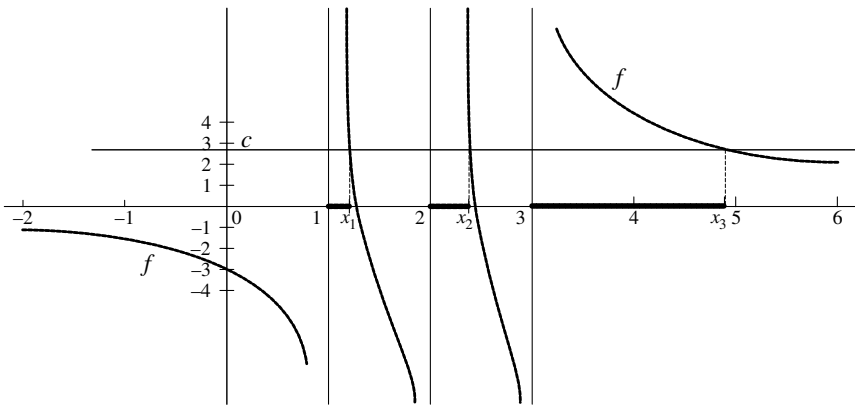
$$]-\infty, 1[, \quad]1, 2[, \quad]2, 3[, \quad \dots, \quad]69, 70[, \quad]70, +\infty[$$

nyílt intervallumok egyesítése. Ezekben az intervallumokban az f -et előállító összeg tagjai folytonosak és szigorúan monoton csökkenők, ezért összegükre, f -re is ez áll. A $]-\infty, 1[$ intervallumban f negatív; az i helyen ($i = 1, 2, \dots, 70$) az összeg tagjai: $f_i(x) = \frac{i}{x-i}$ folytonosak és korlátosak, $f_i(x)$ bal oldali határértéke az i helyen $-\infty$, a jobb oldali $+\infty$, ezért ez igaz f -re is. Az $(i, i+1)$ ($1 \leq i < 70$) intervallumban tehát az intervallum bal szélén $+\infty$ -hez, jobb szélén $-\infty$ -hez tart, ezért ebben az intervallumban minden valós értéket felvesz; a $]70, +\infty[$ intervallumban a függvény pozitív, a bal végpontban határértéke az előbbieket szerint $+\infty$, a $+\infty$ helyen felvett határértéke 0, ezért ebben az intervallumban minden pozitív értéket felvesz (az 1988/4.1. ábrán egyszerűség kedvéért azt az f függvényt ábrázoltuk, amelynél k csak az 1, 2, 3 értékeket vesz fel).

Ábránk alapján is világos, hogy a $]-\infty, 1[$ intervallumon kívül minden vizsgált nyílt intervallumban van olyan hely, ahol a függvény értéke $\frac{5}{4}$, és ezért mindegyikben van olyan intervallum, amelyben $f \geq \frac{5}{4}$.

Jelölje azokat a helyeket, amelyeken f az $\frac{5}{4}$ értékeket felveszi rendre x_1, x_2, \dots, x_{70} ($i < x_i < i+1$, ha $i \leq 69$, x_{70} a $]70, +\infty[$ intervallumban van). Azok nyilván diszjunkt halmazok, amelyekben $f \geq \frac{5}{4}$:

$$[1, x_1], [2, x_2], \dots, [69, x_{69}], [70, x_{70}],$$



88/4.1. ábra

ezek összhossza:

(2)

$$H = (x_1 - 1) + (x_2 - 2) + \dots + (x_{70} - 70) = (x_1 + x_2 + \dots + x_{70}) - (1 + 2 + \dots + 70).$$

Feladatunk most az $x_1 + x_2 + \dots + x_{70}$ összeg meghatározása. Tekintsük ezért a

$g(x) = f(x) - \frac{5}{4}$ függvényt; $g(x)$ -nek a nullahelyei éppen az előbbi x_i -k. $g(x)$ olyan racionális törtfüggvény, amelynek a nevezője $(x-1)(x-2)\dots(x-70)$, számlálója pedig

$$1 \cdot (x-2) \cdot (x-3) \dots (x-70) + 2 \cdot (x-1)(x-3) \dots (x-70) + \dots \\ \dots + 70 \cdot (x-1)(x-2) \dots (x-69) - \frac{5}{4} \cdot (x-1)(x-2) \dots (x-70).$$

Ennek a 70-edfokú polinomnak a főegyütthatója $-\frac{5}{4}$, a 69-edfokú tag együtthatója pedig a gyökök és együtthatók közötti összefüggés alapján

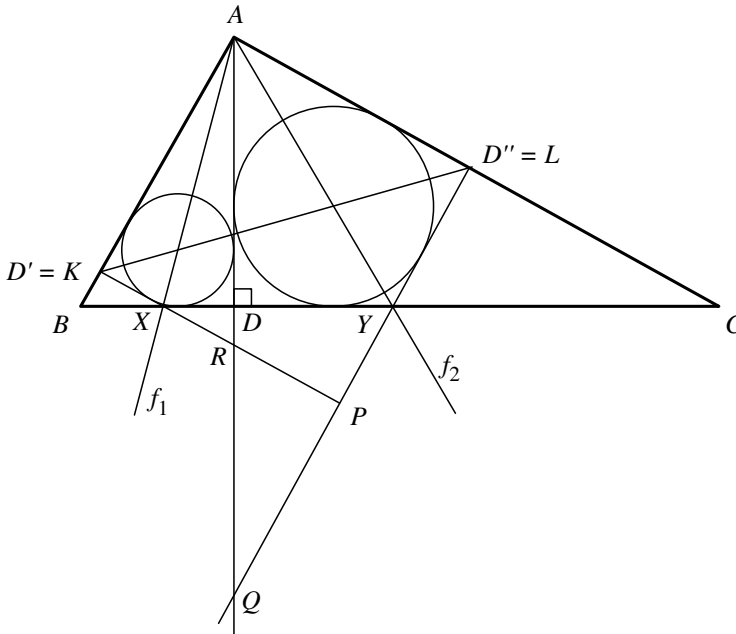
$$x_1 + x_2 + \dots + x_{70} = \frac{4}{5} \left(1 + 2 + \dots + 70 + \frac{5}{4}(1 + 2 + \dots + 70) \right) = \\ = \frac{9}{5}(1 + 2 + \dots + 70),$$

ezért az intervallumok összhossza (2) alapján

$$H = \frac{9}{5}(1 + 2 + \dots + 70) - (1 + 2 + \dots + 70) = \frac{4}{5} \cdot \frac{70}{2} \cdot 71 = 1988.$$

1988/5. A derékszögű ABC háromszög A csúcsából a BC átfogóhoz vezető magasság talppontja D . Az ABD és ACD háromszögek beírt köreinek középpontját összekötő egyenes az AB , ill. AC befogókat K -ban, ill. L -ben metszi. Jelölje S , ill. T az ABC , ill. AKL háromszögek területét. Bizonyítsuk be, hogy $S \geq 2T$.

1. megoldás. Tegyük fel, hogy $AB \leq AC$. Jelölje a $BAD \triangleleft f_1$ felezőjének BD -vel, ill. $CAD \triangleleft f_2$ felezőjének CD -vel való metszéspontját X , ill. Y (1988/5.1. ábra). Tükrözzük az ADX háromszöget f_1 -re, a tükörkép az $AD'X$ háromszög; ez a tükrözés ABD beírt körét önmagába viszi át, és így beírt köre az $AD'XD$ deltoidnak is. Hasonlóan: tükrözzük az ADY háromszöget f_2 -re, a tükörkép az $AD''Y$ háromszög, létrejött az $AD''YD$ deltoid, amelynek beírt köre megegyezik ACD beírt körével. Jelölje $D'X$ és $D''Y$ metszéspontját P .



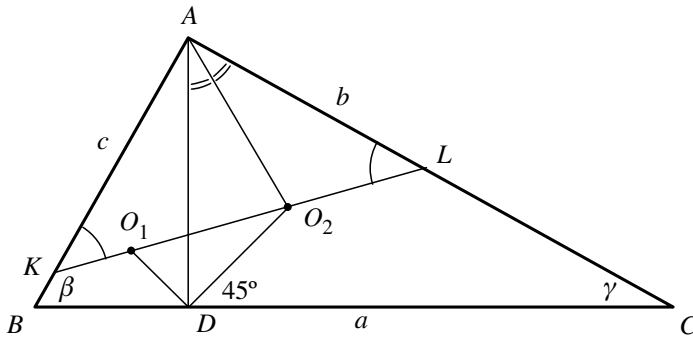
88/5.1. ábra

Az $AD'PD''$ négyszög négyzet, mert A -nál, D' -nél és D'' -nél derékszöge van, és a tükrözés miatt $AD = AD' = AD''$. A $D'D''$ átló felezi a négyzet D' -nél és D'' -nél levő szögét, ezért átmegy a két beírt kör középpontján; ez azt jelenti, hogy $D' \equiv K$, $D'' \equiv L$; az AKL háromszög ezért egyenlő szárú derékszögű háromszög, fele az $AD'PD''$ négyzetnek.

Jelölje B tükörképét f_1 -re R , C tükörképét f_2 -re Q , ezek rajta vannak az AD egyenesen és $AB \leq AC$ miatt $AR \leq AQ$. A tükrözésekből adódó területegyenlőségek felhasználásával:

$S = t_{ABC} = t_{ABD} + t_{ACD} = t_{ARD'} + t_{AQD''} \geq t_{AD'PD''} = 2t_{AD'D''} = 2t_{AKL} = 2T$; ezt kellett bizonyítanunk.

2. megoldás. Legyen ABD beírt körének középpontja O_1 , az ACD háromszögé O_2 (1988/5.2. ábra). A derékszögű háromszög jól ismert hasonlósági



88/5.2. ábra

összefüggései következtében a D körüli 90° -os és $\frac{c}{b}$ arányú forgatva nyújtás az ADC háromszöget a BDA háromszögbe, és O_2 -t O_1 -be viszi át. Ebből következik, hogy $DO_1 : DO_2 = c : b$, ezért a DO_1O_2 háromszög hasonló az ABC háromszöghöz, mivel két-két oldalának az aránya és az ezek által közbezárt derékszögek egyenlők. A hasonlóságból következik, hogy $DO_2O_1 \sphericalangle = \gamma$. Ez azonban azt jelenti, hogy DO_2LC húrnégyszög, és így külső szöge: $ALO_2 \sphericalangle = O_2DC \sphericalangle = 45^\circ$. Az ALK derékszögű háromszögnek tehát van 45° -os szöge, ennél fogva egyenlő szárú: $AL = AK$.

Az ALO_2 és ADO_2 háromszögek egybevágók, mivel megegyeznek egy közös oldalban, A -nál levő szögeik egyenlők, és $ADO_2 \sphericalangle = ALO_2 \sphericalangle = 45^\circ$. Ebből következik, hogy $AL = AD$. Ezért

$$T = t_{ALK} = \frac{AD^2}{2}.$$

Mínt hogy $a \cdot AD = bc$, $AD = \frac{bc}{a}$, s mivel $b^2 + c^2 \geq 2bc$,

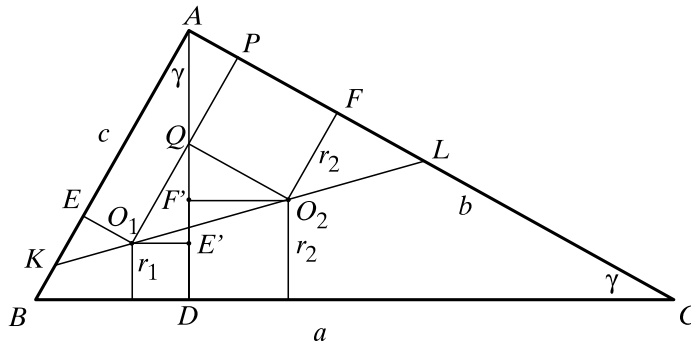
$$T = \frac{b^2c^2}{2a^2} = \frac{b^2c^2}{2(b^2 + c^2)} \leq \frac{bc}{4} = \frac{S}{2},$$

$$S \geq 2T,$$

ami bizonyítandó volt.

3. megoldás. Legyen az ADB háromszög beírt körének középpontja O_1 , sugara r_1 , érintési pontjai: AB -n E , AD -n E' ; az ADC háromszög beírt körének középpontja O_2 , sugara r_2 , érintési pontjai: AC -n F , AD -n F' (1988/5.3. ábra). O_1 -ből AC -re emelt merőleges talppontját jelölje P , O_2 -ből O_1P -re állított merőleges talppontját pedig Q . Az ABC háromszög BC -hez tartozó magassága: $AD = m$.

Megoldásunkban főként azt használjuk fel, hogy külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők. Fejezzük ki m , r_1 , r_2 segítségével az O_1Q ,



88/5.3. ábra

O_2Q szakaszokat:

$$O_1Q = O_1P - QP = AE - O_2F = AE' - r_2 = m - r_1 - r_2,$$

$$O_2Q = FP = AF - AP = AF' - r_1 = m - r_2 - r_1.$$

Ezért $O_1Q = O_2Q$, tehát az O_1QO_2 egyenlő szárú derékszögű háromszög, és így ugyanilyen az oldalaival párhuzamos oldalú KAL és O_2FL háromszög is, tehát $FL = r_2$, és így

$$AL = AF + r_2 = AF' + r_2 = m.$$

Vegyük most figyelembe, hogy $m = c \cos \gamma = b \sin \gamma$, ezért

$$T = \frac{m^2}{2} = \frac{bc \sin \gamma \cos \gamma}{2} = \frac{bc}{4} \sin 2\gamma = \frac{S}{2} \sin 2\gamma,$$

ebből

$$T \leq \frac{S}{2}, \quad S \geq 2T,$$

ezt kellett bizonyítanunk.

Megjegyzés. Minden megoldásunkból kiolvasható, hogy az $S = 2T$ egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög.

1988/6. Legyenek a és b olyan pozitív egészek, amelyekre $ab + 1$ osztója $a^2 + b^2$ -nek. Bizonyítsuk be, hogy

$$(1) \quad \frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

egész szám négyzete.

Megoldás. Legyen az (1) hányados értéke q . A feladat állítása egyenértékű azzal, hogy ha az

$$(2) \quad a^2 - qab + b^2 - q = 0$$

egyenletet valamilyen pozitív egész q esetén kielégíti egy pozitív egészekből álló (a, b) számpár, akkor q szükségképpen négyzetszám.

Állításunkat indirekt módon bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy (2)-nek létezik megoldása, de q nem négyzetszám. Vizsgáljuk most az

$$(3) \quad x^2 - qxy + y^2 - q = 0 \quad (q > 0 \text{ egész})$$

egyenletet. Ennek nem lehetnek különböző előjelű egész megoldásai, mert akkor $-qxy > q$ miatt a bal oldal pozitív lenne. x és y közül egyik sem lehet 0, mert ha pl. $x = 0$, ebből $y^2 = q$ következne, ami lehetetlen, hiszen q nem négyzetszám. Minthogy (x, y) -nal együtt (3)-nak $(-x, -y)$ is megoldása, ha van megoldás, akkor pozitív egész megoldás is van; a továbbiakban tehát feltehetjük, hogy $x > 0$, $y > 0$. Mivel feltevésünk szerint (3)-nak van megoldása, létezik olyan is, amelyre $x^2 + y^2$ minimális; legyen egy ilyen megoldás (A, B) ; feltehetjük, hogy $0 < B \leq A$, tehát

$$(4) \quad A^2 - qAB + B^2 - q = 0$$

teljesül, és $A^2 + B^2$ -nél nincs kisebb négyzetösszegű megoldás.

(4)-ből következik, hogy az

$$(5) \quad x^2 - qBx + B^2 - q = 0$$

másodfokú egyenletnek A egy pozitív egész gyöke. Mivel azonban (5)-nek van megoldása, A -n kívül van egy másik gyöke is: A' .

A gyökök és együtthatók közötti összefüggés szerint

$$(6) \quad A + A' = qB, \quad (7) \quad AA' = B^2 - q.$$

(6) következménye, hogy A' is egész, hiszen A és qB is az; továbbá (7)-ből $AA' < B^2$, s mivel $A \geq B$, szükségképpen $A' < B$, és így

$$A'^2 + B^2 < 2B^2 \leq A^2 + B^2,$$

s mivel az (A', B) pár kielégíti (5)-öt, ez azt jelentené, hogy (3)-nak van $A^2 + B^2$ -nél kisebb négyzetösszegű megoldása, ami lehetetlen, vagyis az a feltevés, hogy q nem négyzetszám, ellentmondásra vezet. Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

Megjegyzések. 1. Természetszerűleg felmerül az a kérdés, hogy van-e a feladat feltételeit kielégítő (a, b) számpár. Bebizonyítható, hogy végtelen sok van, és ezek a következő rekurzióval adhatók meg:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = a, \quad x_{n+1} = a^2 x_n - x_{n-1}, \quad \text{ahol } a \text{ poz. egész, } n \geq 1,$$

a feladat megoldásait az $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_{n-1}, x_n), \dots$ számpárok szolgáltatják; q értékének itt a^2 felel meg.

2. A feladat megoldásának a módszerét a számelméletben „végtelen leszállás”-nak nevezik; ennek az a lényege, hogy egy diofantikus egyenlet megoldásának a nem létezését úgy bizonyítjuk, hogy feltételezzük: van az egyenletnek megoldása; a megoldások közül kiválasztjuk valamilyen értelemben a legkisebbet, és megmutatjuk, hogy a feltevésekből következik, hogy a „legkisebb” megoldásnál „kisebb” megoldás is létezik.

1989.

1989/1. Bizonyítsuk be, hogy az $\{1, 2, \dots, 1989\}$ halmaz előáll 117 darab olyan diszjunkt (közös elem nélküli) A_1, A_2, \dots, A_{117} halmaz egyesítéseként, amelyekre teljesül, hogy

mindegyiküknek 17 eleme van,

mindegyikükben ugyanannyi az elemek összege.

1. megoldás. Minden A_i halmazt elő akarunk állítani 7 darab számpár és egy számhármass egyesítéseként úgy, hogy az összes A_i előállításában szereplő számpárokból azonos legyen a számok összege, és ugyanez teljesüljön az A_i -k előállításában résztvevő számhármassokra is. Állítsuk elő először az ehhez szükséges $117 \cdot 7 = 819$ számpárt, majd a 117 számhármast.

Az első 351 egészet a számhármassok előállítására használjuk, a számpárokat pedig a 352, 353, ..., 1989 számokból állítjuk elő a következő rendkívül egyszerű módon:

$$(1) \quad \begin{array}{c} (352, 1989) \\ (353, 1988) \\ \vdots \\ (1170, 1171). \end{array}$$

Ebben a 819 számpárban szerepel minden egész 352-től 1989-ig, és minden számpárban egyenlő a két szám összege 2341-gyel.

Valamivel több körütekintést igényel az 1-től 351-ig terjedő számokból a 117 számhármass összállítása:

$$(2) \quad \begin{array}{cc} (1, 176, 351) & (60, 118, 350) \\ (2, 177, 349) & (61, 119, 348) \\ (3, 178, 347) & (62, 120, 346) \\ \vdots & \vdots \\ (58, 233, 237) & (116, 174, 238) \\ (59, 234, 235) & (117, 175, 236). \end{array}$$

Ezek tartalmazzák az 1–351 egészeket, és mind a 117 hármassban egyenlő a számok összege 528-cal.

A_i összeállítása tehát a következő: az (1) halmazból tetszőlegesen kiválasztunk 7 számpárt, majd hozzáveszünk (2)-ből egy tetszőleges számhármast. Az előállított szám 17-esek kielégítik a feladat feltételeit.

2. megoldás. A feladat így is fogalmazható: írjuk le az 1–1989 számokat egy 117 sorral és 17 oszloppal rendelkező táblázatba úgy, hogy minden sorban azonos legyen a számok összege (a sorok felelnek meg az A_i halmazoknak). Ezt azzal kezdjük, hogy a táblázatba beírjuk „természetes” sorrendben a számokat:

$$(1) \quad \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & 17 \\ 18 & 19 & 20 & \dots & 34 \\ \vdots & & & & \\ 1973 & 1974 & 1975 & \dots & 1989 \end{array}$$

Az a célunk, hogy a táblázat oszlopaiban az elemeket úgy permutáljuk, hogy minden sornak azonos legyen az összege; a j -edik oszlopban levő elemek: $j, j + 1 \cdot 17, j + 2 \cdot 17, \dots, j + 116 \cdot 17$. Ezek közül az i -edik sorban levőt jelölje $j + a_{ij} \cdot 17$ ($0 \leq a_{ij} \leq 116$). Az i -edik sorban levő elemek összege:

$$s_i = \sum_{j=1}^{17} (j + a_{ij} \cdot 17) = \sum_{j=1}^{17} j + 17 \cdot \sum_{j=1}^{17} a_{ij}.$$

Mivel $\sum j$ állandó, feladatunk az a_{ij} -k olyan meghatározása, hogy $\sum a_{ij}$ is állandó legyen egy-egy sorban, ezzel biztosítható az s_i -k egyenlősége.

Az első 14 oszlopban az azonos sorösszeg kiderítése egyszerű, csupán minden második oszlopot fordított sorrendben kell felírni, az utolsó három oszlopban ez további megfontolást igényel; az a_{ij} -k táblázata a következő:

$$(2) \quad \begin{array}{c|ccccccccc} \begin{array}{c} j = \\ i = \end{array} & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & \dots & 14 & 15 & 16 & 17 \\ \hline 1 & 0 & 116 & 0 & 116 & & & 116 & 0 & 59 & 115 \\ 2 & 1 & 115 & 1 & 115 & & & 115 & 1 & 60 & 113 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 58 & 57 & 59 & 57 & 59 & & & 59 & 57 & 116 & 1 \\ 59 & 58 & 58 & 58 & 58 & & & 58 & 58 & 0 & 116 \\ 60 & 59 & 57 & 59 & 57 & & & 57 & 59 & 1 & 114 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 116 & 115 & 1 & 115 & 1 & & & 1 & 115 & 57 & 2 \\ 117 & 116 & 0 & 116 & 0 & & & 0 & 116 & 58 & 0 \end{array}$$

Meggyőződhetünk róla, hogy ha a táblázatbeli a_{ij} -kel állítjuk elő az A_i halmazokat, akkor az 1–1989-ig terjedő egészeket pontosan egyszer használjuk fel, hiszen a (2) táblázat az (1) oszloponkénti permutálásából jött létre.

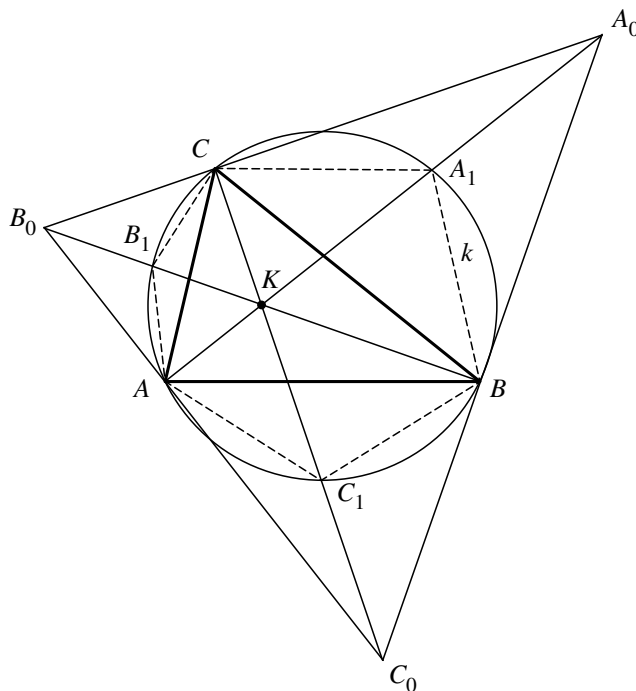
1989/2. A hegyesszögű ABC háromszög A -ból, B -ből és C -ből induló belső szögfelezői rendre az A_1 , B_1 , ill. C_1 pontban metszik a háromszög körülírt körét. Az AA_1 egyenest az A_0 pontban metszi a B és C -beli külső szögfelező és hasonlóan kapjuk a B_0 és az C_0 pontokat.

Bizonyítsuk be, hogy

az $A_0B_0C_0$ háromszög területe egyenlő az $AC_1BA_1CB_1$ hatszög területének kétszeresével;

az $A_0B_0C_0$ háromszög területe legalább négyszer akkora, mint az ABC háromszög területe.

Megoldás. Az $A_0B_0C_0$ pontok nyilván a háromszöget kívülről érintő körök középpontjai. Mivel egy csúcsbeli külső és belső szögfelező merőleges egymásra, az $A_0B_0C_0$ háromszögben az AA_0 , BB_0 , CC_0 magasságvonalak, ezért az ABC háromszög az $A_0B_0C_0$ háromszögnek a talpponti háromszöge és az ABC köré írt k kör az $A_0B_0C_0$ -nak Feuerbach-köre. ABC szögfelezőinek K metszéspontja az $A_0B_0C_0$ háromszögnek magasságpontja (1989/2.1. ábra).



89/2.1. ábra

Minthogy a Feuerbach-kör felezi a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszokat, A_1, B_1, C_1 rendre felezi a KA_0, KB_0, KC_0 szakaszokat. Ezért pl. a $KA_1 = A_1A_0$ szakaszegyenlőség miatt a KBA_1 és az A_1BA_0 háromszögek területe egyenlő; hiszen egy oldaluk és a hozzájuk tartozó magasságuk egyenlő; tehát $t_{KBA_1} = t_{A_1BA_0}$. Hasonlóan kapjuk, hogy $t_{KCA_1} = t_{A_1CA_0}$, ebből viszont $t_{KBA_1C} = t_{BA_1CA_0}$. Ugyanígy adódik, hogy $t_{KCB_1A} = t_{CB_1AB_0}$ és $t_{KAC_1B} = t_{AC_1BC_0}$. Az utóbbi három egyenlőség megfelelő oldalait összeadva a bal oldalon az $AC_1BA_1CB_1$ hatszög területét kapjuk, jobb oldalon pedig annak a síkrésznek a területét, ami a hatszöget az $A_0B_0C_0$ háromszöggé kiegészíti, a kettő egyenlősége éppen az a) állítást jelenti.

Az a) alapján a b)-beli állítás bizonyításához elegendő megmutatnunk, hogy a hatszög területe legalább kétszerese az ABC területének, hiszen $A_0B_0C_0$ területe kétszerese a hatszög területének.

Ennek az előbbinek a bizonyításához figyeljük meg, hogy a k kör kisebbik AB ívébe beírt háromszögek közül az ABC_1 háromszög területe a legnagyobb, hiszen ennek a legnagyobb az AB -hez tartozó magassága (1989/2.2.). Jelölje M az ABC magasságpontját és ennek AB -re vonatkozó tükörképét M_C . Ismeretes, hogy M_C a k -n van. Az előbbieket szerint

$$t_{AM_CB} \leq t_{AC_1B},$$

és egyenlőség csakis akkor áll, ha $AC = BC$. Hasonlóan kapjuk, hogy $t_{BM_AC} \leq t_{BA_1C}$ és $t_{CM_BA} \leq t_{CB_1A}$. Mivel ABC hegyesszögű, és így M a háromszög belsőjében van,

$$t_{ABC} = t_{AM_CB} + t_{BM_AC} + t_{CM_BA},$$

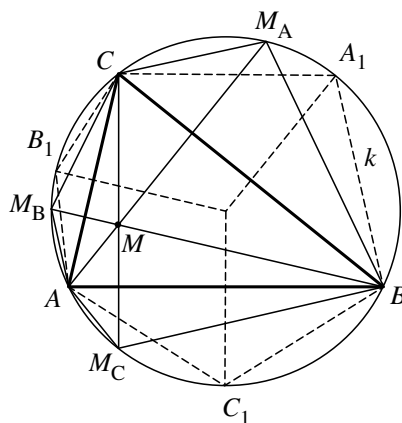
$$t_{AC_1BA_1CB_1} \geq t_{AM_CBM_ACM_B} = 2t_{ABC},$$

és ezt kellett bizonyítanunk.

Megjegyzés. A feladat állításait igen sokféle módon lehet még bizonyítani, a b) állítás pl. más átfogalmazásban azt jelenti, hogy

a hegyesszögű háromszög területe legalább négyszerese a talpponti háromszög területének.

Legyen ui. a háromszög három oldala a, b, c , körülírt körének sugara R , szögei α, β, γ , akkor az oldalak $a = 2R \sin \alpha, b = 2R \sin \beta$ alakban fejezhetők ki, a talpponti háromszög oldalai viszont $a \cos \alpha, b \cos \beta, c \cos \gamma$; szögei $180^\circ - 2\alpha$,



89/2.2. ábra

$180^\circ - 2\beta$, $180^\circ - 2\gamma$. A háromszög t területe:

$$t = \frac{ab \sin \gamma}{2} = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma;$$

a talpponti háromszög t' területe:

$$t' = \frac{a \cos \alpha \cdot b \cos \beta \cdot \sin(180^\circ - 2\gamma)}{2} = 4R^2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma.$$

A bizonyítandó $4t' \leq t$ egyenlőtlenséget ezekkel kifejezve:

$$16R^2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma \leq 2R^2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma,$$

ebből viszont az ismert

$$\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \leq \frac{1}{8}$$

egyenlőtlenséget kapjuk, ami állításunkkal egyenértékű.

Ugyanezt az átfogalmazást bizonyíthatjuk a Simson-egyeneseinek tételének általánosításaként ismert összefüggés alapján is, ami azt mondja ki, hogy ha a háromszög területe t , a köréírt kör sugara R , és ha síkjának P pontja a köréírt kör középpontjától ϱ távolságra van, akkor a P -ből a háromszög oldalegyenesére merőlegeseket állítva a talppontok egy τ (előjeles) területű háromszöget határoznak meg, amelyre

$$\tau = \frac{t(R^2 - \varrho^2)}{4R^2} = t \left(\frac{1}{4} - \frac{\varrho^2}{4R^2} \right).$$

Ha most P a háromszög magasságpontja, $\tau = t'$ a talpponti háromszög területe, és így

$$t' \leq \frac{t}{4}, \quad 4t' \leq t,$$

és egyenlőség akkor áll, ha $\varrho = 0$, vagyis a háromszög magasságpontja egybeesik a köréírt kör középpontjával, vagyis a háromszög szabályos.

A most felhasznált összefüggések bizonyítása megtalálhatók pl. Reiman I.: A geometria és határterületei (Gondolat, 1986.) c. könyvben.

1989/3. Legyenek az n és k adott pozitív egész számok, az S pedig olyan n elemű síkbeli ponthalmaz, amelynek

- semelyik három pontja nincs egy egyenesen;
- az S halmaz minden P pontjához található legalább k darab S -beli pont, amelyek mind egyenlő távolságra vannak a P ponttól.

Bizonyítsuk be, hogy

$$k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}.$$

1. megoldás. A bizonyítandó egyenlőtlenség rendezés és négyzetreemelés után a $\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 = k^2 - k + \frac{1}{4} < 2n$ alakot ölti. Kettővel osztva kapjuk, hogy

$$\frac{k^2 - k}{2} + \frac{1}{8} = \binom{k}{2} + \frac{1}{8} < n.$$

Elegendő tehát a $\binom{k}{2} \leq n - 1$ egyenlőtlenséget bizonyítanunk.

Az S halmaz minden egyes P pontjára tekintsünk k darab, a P -től egyenlő távolságra lévő S -beli pontot, és készítsük el az ezen pontokból alkotható összes párt. Ezek száma $\binom{k}{2}$, így összesen

$$(1) \quad n \cdot \binom{k}{2}$$

pontpárhoz jutunk.

Ha egy S -beli (A, B) pontpárt számba vettünk a P pontnál, akkor a P rajta van az AB felező merőlegesén. Mivel az S halmaz semelyik három pontja nincs egy egyenesen, ezért (1)-ben az (A, B) pontpárt legfeljebb kétszer számoltuk. Az (1)-ben kapott mennyiség így nem nagyobb, mint az S elemeiből készíthető összes pontpárok számának a kétszerese,

$$(2) \quad n \cdot \binom{k}{2} \leq 2 \binom{n}{2}.$$

A jobb oldalon $n(n-1)$ áll, így n -nel osztva a bizonyítandó állítást kapjuk.

2. megoldás. Hagyjuk el a feladat kikötései közül az a) feltételt. Jelölje a P_i ponttól egyenlő távolságra levő pontokból készített pontpárok halmazát H_i , ennek elemszámát $|H_i|$. Feladatunk feltételei szerint tehát

$$(3) \quad |H_i| \geq \binom{k}{2}.$$

A H_i -hez tartozó pontpárok pontjai egy P_i középpontú körön vannak; hasonlóan a H_j -hez tartozók egy P_j középpontú körön. Mivel e két körnek legfeljebb két közös pontja, azaz legfeljebb egy közös pontpárja lehet,

$$(4) \quad |H_i \cap H_j| \leq 1.$$

Az S összes P_i pontjához tartozó H_i halmazok egyesítésének, a $\bigcup_{i=1}^n H_i$ halmaznak az elemszáma

$$(5) \quad \left| \bigcup_{i=1}^n H_i \right| \geq \sum_{i=1}^n |H_i| - \sum_{i,j} |H_i \cap H_j|$$

teljesül, a jobb oldalon ugyanis a második tagban bizonyos pontpárokat esetleg többször is kivontunk, ha több H_i halmazban fordulnak elő.

Vegyük most figyelembe, hogy (5) jobb oldalán a második tagban $\binom{n}{2}$ összeadandó van, ezért (3) és (4) miatt

$$\left| \bigcup_{i=1}^n H_i \right| \geq n \binom{k}{2} - \binom{n}{2}.$$

A bal oldalon az S elemeiből készített elempárok halmazának az elemszáma áll, és S elemeiből $\binom{n}{2}$ elempár készíthető, ezért

$$\binom{n}{2} \geq n \binom{k}{2} - \binom{n}{2}, \quad \text{azaz} \quad 2 \binom{n}{2} \geq n \binom{k}{2},$$

ami bizonyítandó volt.

Megjegyzés. A 2. megoldásból tehát kitűnt, hogy a feladatban kitűzött egyenlőtlenség akkor is teljesül, ha az a) kikötést elhagyjuk.

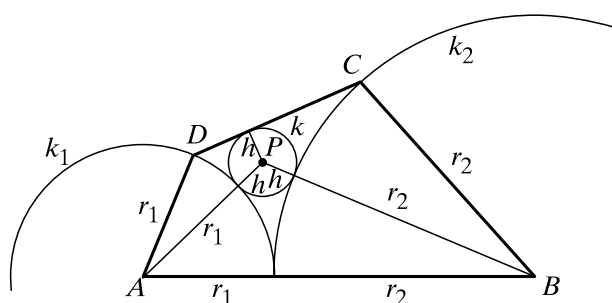
1989/4. A konvex $ABCD$ négyszög AB , BC és AD oldalaira teljesül, hogy $AB = AD + BC$. A négyszög belsejében úgy helyezkedik el a P pont, hogy $AP = h + AD$ és $BP = h + BC$, ahol h éppen a P pontnak a CD egyenestől mért távolsága.

Bizonyítsuk be, hogy

$$(1) \quad \frac{1}{\sqrt{h}} \geq \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}.$$

Megoldás. Szerkesszünk az A , ill. B csúcsok köré $AD = r_1$, ill. $BC = r_2$ sugarú k_1 , ill. k_2 köröket. A feladat feltételei azt mondják ki, hogy e két kör az AB egy belső pontjában kívülről érinti egymást, és a P körül h sugárral szerkesztett k kör érinti mindkét kört és a CD oldalt (1989/4.1. ábra).

Vizsgáljuk először azokat a négyszögeket, amelyeknél az A , B csúcsok és a k_1 , k_2 körök rögzítettek (tegyük fel, hogy $r_2 \geq r_1$). Ezeknél a CD oldal a két kör egy-egy pontját köti össze, és a k kör érinti ezt az oldalt. Szemléletes tény, hogy k sugara csak addig növekedhet, amíg a k nem érinti k_1 és k_2 közös külső

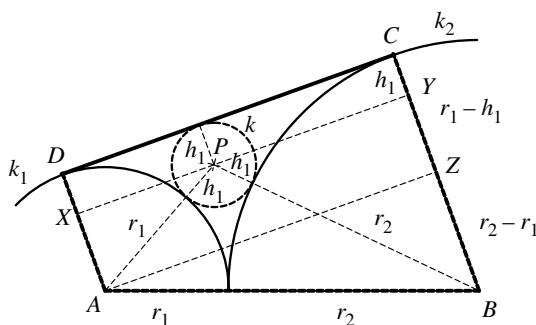


89/4.1. ábra

érintőjét és ez a határeset szolgáltatja h lehető legnagyobb értékét, Legyen ez a maximális h érték h_1 -gyel egyenlő, tehát minden szóbjövő h -ra $h_1 \geq h$, és így $\sqrt{h_1} \geq \sqrt{h}$,

$$(2) \quad \frac{1}{\sqrt{h}} \geq \frac{1}{\sqrt{h_1}}.$$

Ebből következik, hogy ha h_1 -re fennáll az (1) egyenlőtlenség, akkor teljesül minden szóbjövő h -ra is, Nézzük tehát azt az esetet, ha CD a k_1 és k_2 közös külső érintőjén van. Az $ABCD$ négyszög ebben az esetben derékszögű trapéz. Messe a P -n át CD -vel húzott párhuzamos AD -t X -ben, BC -t Y -ben, az A -n át CD -vel húzott párhuzamos pedig BC -t Z -ben. A PXA , ill. PYB derékszögű háromszögekből (1989/4.2. ábra)



89/4.2. ábra

$$XP = \sqrt{(r_1 + h_1)^2 - (r_1 - h_1)^2} = 2\sqrt{r_1 h_1},$$

$$PY = \sqrt{(r_2 + h_1)^2 - (r_2 - h_1)^2} = 2\sqrt{r_2 h_1},$$

az AZB derékszögű háromszögből

$$AZ = \sqrt{(r_2 + r_1)^2 - (r_2 - r_1)^2} = 2\sqrt{r_1 r_2}.$$

Mivel pedig $AZ = XP + PY$,

$$2\sqrt{r_1 r_2} = 2\sqrt{r_1 h_1} + 2\sqrt{r_2 h_1},$$

az egyenlet két oldalát $2\sqrt{r_1 r_2 h_1}$ -gyel elosztva kapjuk, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{h_1}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}},$$

ami (2)-t figyelembe véve éppen azt jelenti, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \geq \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}},$$

és az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $ABCD$ derékszögű trapéz.

1989/5. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n -hez található n darab szomszédos pozitív egész szám úgy, hogy egyikük sem egyenlő egy prímszám pozitív egész kitevőjű hatványával.

1. megoldás. Adott n -hez keressük az n szomszédos számot

$$(1) \quad 2 + M, 3 + M, \dots, (n + 1) + M$$

alakban, feladatunk tehát M megfelelő megválasztása. Egy szám akkor nem prímszám, ha van két relatív prím valódi osztója.

Legyen most $i + M$ az (1) egy eleme. Ha i osztója M -nek, akkor $M = im_i$ (m_i pozitív egész) és

$$i + M = i(1 + m_i).$$

Kössük még ki, hogy i az m_i -nek is osztója legyen, akkor $M = im_i = i^2 m'_i$ (m'_i pozitív egész), azaz i^2 legyen osztója M -nek; ebben az esetben i és $1 + m_i$ relatív prímek, tehát $i + M = i(1 + im'_i)$ -nek van két relatív prím osztója: i és $1 + im_i$.

Ilyen tulajdonságú M -et kapunk az $M = ((n + 1)!)^2$ választással, hiszen i^2 osztója M -nek, tehát a

$$2 + ((n + 1)!)^2, 3 + ((n + 1)!)^2, \dots, (n + 1) + ((n + 1)!)^2,$$

számok között nincs prímszám.

2. megoldás. $n = 1, 2$ esetén a feladat állítása nyilvánvaló; tegyük fel, hogy $n > 2$ és legyenek p_1, p_2, \dots, p_k az n -nél nem nagyobb prímszámok (tehát $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$) és legyen $N = p_1 p_2 \dots p_k$. Képezzük az

$$(2) \quad N! + 1, N! + 2, \dots, N! + n,$$

egymást követő egészből álló sorozatot. Megmutatjuk, hogy ezek egyike sem prímszám. Tegyük fel ugyanis ezzel ellentétben, hogy a (2) alatti számok egyike, pl. $N! + j$, ahol $1 \leq j \leq n$, egy p prímszám r pozitív egész kitevőjű hatványa,

azaz

$$(3) \quad N! + j = p^r.$$

Mivel $N > n \geq j$, azért j szerepel $N!$ prímtényezői között, és így (3) bal oldala osztható j -vel, tehát p^r is. Ezért $j = p^s$, ahol $s < r$ pozitív egész. Egyszerűsítsünk (3)-ban j -vel:

$$(4) \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (j-1) \cdot (j+1) \cdot \dots \cdot N + 1 = p^{r-s}.$$

Viszont $j = p^s$ miatt $p \leq j \leq n$, p a p_1, p_2, \dots, p_k prímek közül való, tehát osztója N -nek, ami ellentmond (4)-nek, a (2) alatti számok tehát nem prímszámok.

Ezzel tehát megmutattuk, hogy tetszőleges n pozitív egészhez található olyan n egymást követő pozitív egész, amelyek egyike sem prímszám.

Megjegyzés. Felhasználtuk, hogy $N > n$. Ez így látható be: ha állításunkkal ellentétben $N = p_1 p_2 \dots p_n \leq n$ lenne, akkor $p_1 p_2 \dots p_k - 1$ a p_1, p_2, \dots, p_k prímek egyikével sem osztható, de mivel n -nél kisebb, prímszámok csakis p_1, \dots, p_k lehetnek, ezért nincs prímszámja, tehát $p_1 p_2 \dots p_k - 1 = 1$, azaz $k = 1$ és $n = 2$ lenne, amit kizártunk.

1989/6. Az $1, 2, \dots, 2n-1, 2n$ számok egy $x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, x_{2n}$ permutációját nevezzük jónak, ha van olyan $i \in \{1, 2, \dots, 2n-1\}$, amelyre $|x_i - x_{i+1}| = n$.

Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n -re az $1, 2, \dots, 2n-1, 2n$ számok összes permutációjának több, mint a fele jó.

1. megoldás. Ha $1 \leq i \leq 2n$, akkor hívjuk az i párjának azt a j számot, amelyre $1 \leq j \leq 2n$ és $|i - j| = n$, vagyis azokat a számokat foglaljuk párba, amelyek különbsége n -nel egyenlő. Az állítás bizonyításához megadjuk a rossz (nem jó) permutációk halmazának egy kölcsönösen egyértelmű leképezését a jó permutációk egy valódi részhalmazára, ez nyilván elegendő, hiszen ez azt jelenti, hogy több jó permutáció van, mint rossz.

Ha x_1, x_2, \dots, x_{2n} egy rossz permutáció, és x_{2n} párja x_k , akkor ennek feleltessük meg az $x_1 x_2 \dots x_k x_{2n} x_{k+1} \dots x_{2n-1}$ permutációt, tehát tegyük az utolsó elemet a párja mögé. Így jó permutációt kapunk, mégpedig olyat, ahol egyetlen szomszédos pár van, és ez nincs a „permutáció végén”. Az ilyen tulajdonságú jó permutációk mindegyikéből egyértelműen kapható vissza a megfelelő rossz permutáció, a leképezés tehát kölcsönösen egyértelmű.

Végül ha $n > 1$, akkor az $1, 2, 3, \dots, n-1, n+1, \dots, n, 2n$ jó permutáció és nem a fenti típusú; a rossz permutációk képei a jó permutációk egy valódi részhalmazát alkotják. A feladat állítása természetesen az $n = 1$ esetben is igaz, ilyenkor minden permutáció jó.

2. megoldás. Jelölje azoknak a $2n$ elemű permutációinak a halmazát, amelyekben az i és az $i+n$ elemek szomszédosak J_i ($1 \leq i \leq n$), J_i nyilván jó permutációkat tartalmaz, legyen továbbá $|J_i|$ a J_i halmaz elemeinek a száma. A jó permutációknak a halmaza legyen J .

A J_i halmazok egyesítése: $\bigcup_{i=1}^n J_i = J$, viszont $\sum_{i=1}^n |J_i| \geq |J|$, mivel ugyanaz a jó permutáció több J_i halmazban is előfordulhat, ha több n különbségű szomszédos pár van benne. Ha viszont a J_i halmazok elemszámának az összegéből elhagyjuk azoknak a permutációknak a számát, amelyekben két szomszédos pár is van, tehát a $J_i \cap J_k$ metszethalmazok elemszámát, akkor $|J|$ -nél kisebb számot kapunk, mert a három vagy több szomszédos párt tartalmazó permutációk számát többször is elhagyjuk, így

$$(1) \quad |J| \geq \sum_{i=1}^n |J_i| - \sum_{i < k} |J_i \cap J_k|$$

$|J_i| = 2 \cdot (2n-1)!$, mert J_i elemei megkaphatók úgy, hogy a $(2n-1)$ -elemű permutációkban az $(i, i+n)$ párt egyetlen elemnek tekintjük, ugyanígy az $(i+n, i)$ elemet is.

A $J_i \cap J_k$ metszet elemeszáma a meghatározásához tekintsük az $(i, i+n)$ párt egyetlen elemnek, ugyanígy a $(k, k+n)$ párt is, a többi $2n-4$ elemmel együtt ezek $(2n-2)!$ permutációt képeznek, a párokban a sorrend négyféle lehet, ezért

$$|J_i \cap J_k| = 4 \cdot (2n-2)!.$$

Vegyük még figyelembe, hogy az (i, k) kettőst $\binom{n}{2}$ féleképpen választhatjuk meg, ezért (1) így alakul:

$$\begin{aligned} |J| &\geq n \cdot 2 \cdot (2n-1)! - \binom{n}{2} \cdot 4 \cdot (2n-2)! = \\ &= (2n)! - \frac{2n(2n-1)(2n-2)!(2n-2)}{2(2n-1)} = (2n)! - \frac{(2n)!(2n-2)}{2(2n-1)} = \\ &= (2n)! \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \right) > \frac{(2n)!}{2}. \end{aligned}$$

Ez éppen azt jelenti, hogy a jó permutációk száma nagyobb az összes permutáció számának, $(2n)!$ -nak a felénél.

Megjegyzés. A 2. megoldásban az (1) alatti becslést pontosabbá téve a logikai szita formula alkalmazásával megmutatható, hogy a jó permutációk és az

összes permutáció számának az aránya az

$$\frac{e-1}{e} = 0,63212055 \dots$$

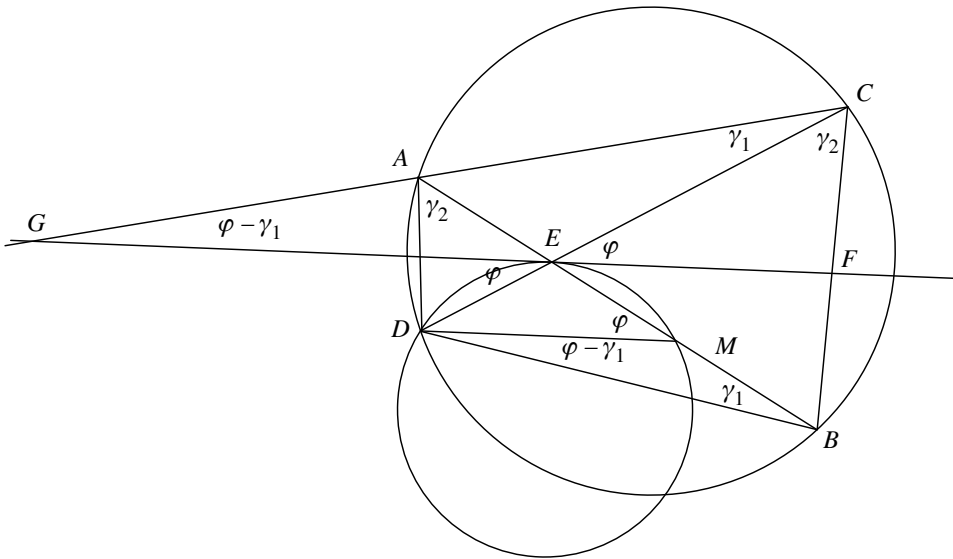
értékhez tart, ami azt jelenti, hogy nagy n -ek esetén a permutációknak mintegy 63,21 %-a jó.

1990.

1990/1. Egy adott kör AB , CD húrjai a kör belsejében levő E pontban metszik egymást. Legyen M az EB szakasz egy belső pontja; a D , E , M pontokon átmenő körhöz E -ben húzott érintő messe a BC , ill. AC egyeneseket az F , ill. G pontban.

Ha $\frac{AM}{AB} = t$, fejezzük ki a $\frac{GE}{EF}$ hányadost t segítségével.

Megoldás. Az alakzat tanulmányozása során (1990/1.1. ábra) számos szögegyenlőséget fedezhetünk fel. A kerületi szögek tételéből következik, hogy



90/1.1. ábra

$$\begin{aligned} \angle ACD = \angle ABD = \gamma_1, \quad \angle DAB = \angle DCB = \gamma_2, \\ \angle DME = \angle DEG = \angle FEC = \varphi. \end{aligned}$$

A külsőszögtétel következménye, hogy $\angle CGF = \angle MDB = \varphi - \gamma_1$.

A szögegyenlőségek miatt a CEF és AMD hasonló háromszögek; ugyanilyen okokból következik, hogy a CGE és BDM háromszögek is hasonlóak. A

hasonlóságok eredménye, hogy

$$(1) \quad \frac{CE}{EF} = \frac{AM}{DM}, \quad \text{azaz} \quad CE \cdot DM = AM \cdot EF,$$

továbbá:

$$(2) \quad \frac{CE}{GE} = \frac{MB}{DM}, \quad \text{azaz} \quad CE \cdot DM = GE \cdot MB.$$

(1) és (2) összehasonlításából következik, hogy $AM \cdot EF = GE \cdot MB$, azaz $AM = t \cdot AB$; $MB = AB - AM = (1 - t)AB$ felhasználásával:

$$\frac{GE}{EF} = \frac{AM}{MB} = \frac{t \cdot AB}{(1 - t)AB} = \frac{t}{1 - t},$$

ezzel megadtuk a kérdéses hányados t -vel való kifejezését.

Megjegyzés. Megoldásunkban felhasználtuk, hogy G -t az A elválasztja a C -től; ez abból következik, hogy $\varphi > \gamma_1$.

1990/2. Legyen $n \geq 3$ és tekintsünk egy E halmazt, amely egy kör kerületén levő $2n - 1$ számú különböző pontból áll. Tegyük fel, hogy e pontok közül pontosan k számút feketére színezzünk. Egy ilyen színezést „jó”-nak nevezzünk, ha található két olyan fekete pont, hogy az általuk meghatározott két körív legalább egyikének a belseje pontosan n számú E -beli pontot tartalmaz.

Határozzuk meg a legkisebb olyan k értéket, amelyre igaz, hogy E bármely k pontját színezzük is ki, a színezés „jó”.

Megoldás. Legyenek a köri pontok egy szabályos $(2n - 1)$ -szög csúcsai: $A_1, A_2, \dots, A_{2n-1}$, két szomszédos csúcs körön mért távolsága legyen 1; a továbbiakban két pont távolságán a körön mért távolságukat fogjuk érteni. Ha szóhasználatunkban két pont távolsága $2n - 1$ -nél (azaz a kör kerületénél) nagyobb, akkor ezt úgy kell érteni, hogy a tényleges távolság a mondottnak $2n - 1$ -gyel való osztási maradéka, ugyanilyen értelemben használjuk a pontok indexezését is.

Két A_i pont között akkor van n pont, ha távolságuk $n + 1$; a A_{n+1} ponttól pl. az $A_{2(n+1)} = A_3$ és az A_{2n-1} van $n + 1$ távolságra. Induljunk ki valamilyen irányban az A_{n+1} pontból, és jelöljük meg rendre az $n + 1$ távolságra következő pontokat:

$$(1) \quad A_{n+1}, A_{2(n+1)}, A_{3(n+1)}, \dots, A_{i(n+1)}.$$

Jelölje i azt a legnagyobb pozitív egészet, amelyre az (1) alatti pontok mind különbözők, de az $i + 1$ -edik már egybeesik valamelyik felsorolt ponttal. $A_{(i+1)(n+1)}$ csak A_{n+1} -gyel lehet egyenlő, mert A_{n+1} kivételével minden ponttól két pont van

$n + 1$ távolságra, csak A_{n+1} -től nem, tehát

$$(i + 1)(n + 1) - (n + 1) = t(2n - 1),$$

ahol t pozitív egész. Ez azt jelenti, hogy

$$(2) \quad i(n + 1) = t(2n - 1).$$

α) Tegyük fel először, hogy $i = 2n - 1$, ez ($t = n + 1$ -gyel együtt) nyilván megoldása (2)-nek; ebben az esetben (1) tartalmazza pontosan egyszer az összes A_i pontot. Képzeljük el, hogy az (1)-beli sorrendben felfűzünk egy körre a pontokat; az eredeti körön bármely két felfűzött szomszédos pont között (és csakis ezek között) n pont van. Ha tehát közülük két szomszédosat feketére festünk, akkor az eredeti körön jó színezést kapunk. $2n - 1$ pontnál $n - 1$ -et még be tudunk úgy feketíteni, hogy ne legyen közöttük szomszédos fekete, de n pont befestése esetén már biztosan lesz két szomszédos fekete. Ez azt jelenti, hogy az α) esetben a legkisebb olyan k érték, amelyre minden színezés jó, $k = n$ -nel egyenlő.

β) Mivel $i = 2n - 1$ -re az (1) sorozat biztosan záródik, keressünk most olyan i -t, amely kisebb $2n - 1$ -nél, de (1) záródhat i lépés után. Tegyük fel, hogy $n + 1$ és $2n - 1$ legnagyobb közös osztója d . d ekkor osztója $2(n + 1) - (2n - 1) = 3$ -nak, tehát $d = 1$ vagy $d = 3$. Ha $d = 3$, (1) csak a 3-mal osztható indexeket tartalmazza, tehát nem tartalmazhatja mind a $2n - 1$ csúcst, az α) esetben tehát szükségképpen $d = 1$. Tegyük fel, hogy $d = 3$. Ekkor $2n - 1$ 3-mal osztható páratlan szám, tehát $2n - 1 = 3(2s - 1) = 6s - 3$, ebből $n + 1 = 3s$. (2) ebben az esetben így alakul:

$$3si = t(6s - 3), \quad \text{azaz} \quad si = t(2s - 1),$$

$i = 2s - 1 = \frac{2n - 1}{3}$ ennek megoldása, ezért az

$$(3) \quad A_{n+1}, A_{2(n+1)}, \dots, A_{\frac{2n-1}{3}(n+1)}$$

pontok mind különbözők, és az α)-beli módszert követve egy körre felfűzve a körön $\frac{2n - 1}{3} \equiv 2s - 1$ pontot kapunk. Közülük $s - 1$ még befekethető úgy, hogy ne legyen a felfűzött láncon két szomszédos, de s számú már nem.

A (3) sorozatot 1 osztóponttávolsággal, ill. 2-vel elforgatva a $3r + 1$, ill. $3r + 2$ indexű pontok sorozatát kapjuk, és ezek (3)-mal együtt kimerítik az A_i pontokat. Mind a két sorozatban, (3)-hoz hasonlóan $s - 1$ még befekethető úgy, hogy ne legyen közöttük szomszédos, de s már nem. Ezért ebben az esetben a „rossz” színezést adó fekete pontok maximális száma $3(s - 1) = n - 2$, ez azt jelenti, hogy $n - 1$ fekete pont felvételével már biztosan jó a színezés.

Összefoglalva: ha $2n - 1$ és $n + 1$ legnagyobb közös osztója 1, akkor $k = n$; ha $2n - 1$ és $n + 1$ legnagyobb közös osztója 3, akkor $k = n - 1$.

Ez ebben a formában is felírható:

ha 3 nem osztója $2n - 1$ -nek, akkor $k = n$;

ha 3 osztója $2n - 1$ -nek, akkor $k = n - 1$.

1990/3. Határozzuk meg az összes olyan $n > 1$ egész számot, amelyre $\frac{2^n + 1}{n^2}$ is egész szám.

Megoldás. $n = 3$ megoldása a feladatnak, mivel $\frac{2^3 + 1}{3^2} = 1$. Megmutatjuk, hogy több megoldás viszont nincs; ehhez három segédítelt használunk fel.

1. segédítél. Ha k páratlan szám, $s = 2^{2k} - 2^k + 1$ osztható 3-mal, de nem osztható 9-cel.

2 páratlan hatványainak 9-es maradékai:

$$2^1 \equiv 2, \quad 2^3 \equiv 8, \quad 2^5 \equiv 5, \quad 2^7 \equiv 2, \quad 2^9 \equiv 8, \quad \dots \pmod{9}$$

általában: 2^{6k+r} ($r = 1, 3, 5$) 9-es maradéka csupán r -től függ, ugyanis

$$2^{6k+r} = (64)^k \cdot 2^r \equiv 2^r \pmod{9}.$$

Ezek szerint

$$\begin{aligned} 2^{6k+1} &\equiv 2, & (2^{6k+1})^2 &\equiv 4, & s &\equiv 4 - 2 + 1 = 3, \\ 2^{6k+3} &\equiv 8, & (2^{6k+3})^2 &\equiv 1, & s &\equiv 1 - 8 + 1 = 3, \\ 2^{6k+5} &\equiv 5, & (2^{6k+5})^2 &\equiv 7, & s &\equiv 7 - 5 + 1 = 3. \end{aligned} \pmod{9}$$

Ez azt jelenti, hogy $s = 3 + 9i$ alakú minden páratlan k esetén, tehát s osztható 3-mal, de nem osztható 9-cel.

2. segédítél. Legyenek a, b, p pozitív egészek és $2^a \equiv 2^b \equiv 1 \pmod{p}$, és legyen $m = (a, b)$, ebben az esetben $2^m \equiv 1 \pmod{p}$.

Tegyük fel, hogy $a > b$ és $a = bq + r$ ($0 \leq r < b$). Ekkor

$$(1) \quad 1 \equiv 2^a = 2^{bq+r} = (2^b)^q \cdot 2^r \equiv 2^r \pmod{p}$$

Az a és b legnagyobb közös osztóját az euklideszi algoritmussal határozhatjuk meg; ennek az a menete, hogy a -t maradékosan osztjuk b -vel, majd b -t az első maradékkal, így kapjuk a második maradékot; ezt az eljárást folytatva az utolsó nem nulla maradék a legnagyobb közös osztó. (1) alapján viszont ez éppen azt jelenti, hogy az utolsó nem nulla maradékra, m -re

$$(2) \quad 2^m \equiv 1 \pmod{p}.$$

3. segédítél. Ha n pozitív egész, $2^n + 1$ nem osztható 7-tel.

$n = 1, 2, 3$ esetben $2^n + 1$ állításunk igaz. Tegyük fel, hogy a segédítél állítása nem igaz, azaz van olyan n , amelyre $2^n + 1$ osztható 7-tel. Ebben az esetben létezik olyan legkisebb pozitív egész $n_0 > 3$, amelyre $2^{n_0} + 1$ osztható 7-tel, tehát valamilyen N pozitív egészszel $7N = 2^{n_0} + 1$, de ebben az esetben

$$7(N+1) = 2^3 \cdot 2^{n_0-3} + 1 + 7 = 8(2^{n_0-3} + 1),$$

ami azt jelenti, hogy $2^{n_0-3} + 1$ is osztható 7-tel, de ez ellentmond n_0 minimális voltának; ezzel a segédítél állítását bizonyítottuk.

Térjünk most rá a feladat megoldására. Mivel $2^n + 1$ páratlan, n csak páratlan szám lehet, keressük a megoldást $n = 3^k \cdot d$ alakban, ahol $k \geq 0$ egész, 3 és d relatív prímek, d szintén páratlan, és tegyük fel, hogy $\frac{2^n + 1}{n^2}$ egész.

Az $a^3 + 1 = (a + 1)(a^2 - a + 1)$ azonosságot felhasználva teljes indukcióval közvetlenül következik, hogy

$$a^{3^k} + 1 = (a + 1) \prod_{i=0}^{k-1} (a^{2 \cdot 3^i} - a^{3^i} + 1).$$

Alkalmazzuk ezt $a = 2^d$ helyettesítéssel; mivel $n = 3^k d$,

$$(1) \quad 2^n + 1 = (2^d + 1) \prod_{i=0}^{k-1} (2^{2 \cdot 3^i d} - 2^{3^i d} + 1).$$

Az 1. segédétel szerint a jobb oldal háromtagú tényezői 3-nak pontosan az első hatványával oszthatók, tehát szorzatuk 3^k -val. Viszont (1) bal oldala osztható n^2 -tel, tehát 3^{2k} -val, ezért $2^d + 1$ -nek oszthatónak kell lennie 3^k -val. Az 1. segédétel bizonyításából kiolvasható, hogy $2^d + 1$ 3-nak legfeljebb az első hatványával osztható, ezért $k = 0$ vagy $k = 1$, következésképpen

$$(2) \quad n = d \quad \text{vagy} \quad n = 3d.$$

Bebizonyítjuk, hogy $d = 1$. Tegyük fel ezzel ellentétben, hogy $d > 1$. Legyen p d -nek a legkisebb prímosztója; a d -re tett kikötések miatt p nem lehet sem 2, sem 3, tehát legalább 5-tel egyenlő, és p definíciója miatt $p - 1$ -nek és d -nek nem lehet közös valódi osztója, ezért $(p - 1, d) = 1$. p értelmezéséből következik, hogy n -nek is osztója, és így $2^n + 1$ -nek is, tehát

$$(3) \quad 2^n \equiv -1 \pmod{p},$$

amiből

$$2^{2n} \equiv 1 \pmod{p}$$

következik. A Fermat-féle kongruenciátételből viszont

$$2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

E két utóbbi kongruenciára alkalmazva 2, segédételünket, kapjuk, hogy

$$(4) \quad 2^m \equiv 1 \pmod{p},$$

ahol $m = (2n, p - 1)$, ezért (2) miatt m osztója $6d$ -nek. m azonban $(p - 1)$ -nek is osztója és $p - 1$ és d relatív prímek, azért m osztója 6-nak, tehát lehetséges értéke: 1, 2, 3, 6. (4) szerint így p az 1, 3, 7, 63 számok valamelyikének 3-nál nagyobb prímtenyezője. Ez csak $p = 7$ esetben lehetséges, amiből (3) miatt az következik, hogy 7 valódi osztója $2^n + 1$ -nek, ami viszont ellentmond 3. segédételünknek. Ez pedig azt jelenti, hogy $n = 1$ vagy $n = 3$ lehetséges csupán, $n > 1$ miatt ezért a feladatot csak $n = 3$ elégíti ki.

1990/4. Jelölje \mathbf{Q}^+ a pozitív racionális számok halmazát. Adjunk példát olyan $\mathbf{Q}^+ \rightarrow \mathbf{Q}^+$ függvényre, amelyre

$$(1) \quad f(x \cdot f(y)) = \frac{f(x)}{y}$$

teljesül minden $x, y \in \mathbf{Q}^+$ esetén.

Megoldás. Vegyük észre, hogy ha egy f függvényre teljesülnek a

$$(2) \quad f(f(x)) = \frac{1}{x} \quad \text{és} \quad (3) \quad f(x)f(y) = f(xy)$$

függvényegyenletek minden szóbajövő racionális x, y értékre, akkor egyszerűen (1) is teljesül, ezért elegendő olyan f -et keresni, amely kielégíti (2)-t és (3)-at. A (3)-nak eleget tevő függvényeket egyébként multiplikatív függvényeknek nevezzük, ill. a (3)-ban megadott függvénytulajdonságot multiplikatív tulajdonságnak (multiplikativitásnak) nevezzük.

A (2) és (3) függvényegyenletek megoldását adó függvény szerkesztéséhez jelöljük p_i -vel a természetes sorrendben felírt prímszámok közül az i -ediket: $p_1 = 2, p_2 = 3, \dots$. Egy tetszőleges x pozitív racionális szám felírható

$$x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_{2n-1}^{\alpha_{2n-1}} p_{2n}^{\alpha_{2n}} \dots$$

alakban, ahol α_i pozitív, negatív egész, vagy pedig 0, a p_i prímszámok egy helytől kezdve már 0 kitevővel szerepelnek, ezek természetesen elhagyhatók. Legyen

$$(4) \quad f(x) = p_1^{\alpha_2} p_2^{-\alpha_1} \dots p_{2n-1}^{\alpha_{2n}} p_{2n}^{-\alpha_{2n-1}} \dots$$

Ennek a hozzárendelésnek az a lényege, hogy a prímtenyezőket párokba foglalja, egy páron belül a kitevőket felcseréli, és a páros indexű prímszámát -1 -gyel szorozza. f nyilván multiplikatív, hiszen x -et tényezőkre bontva az eljárás változatlan marad. (2) teljesülésének az igazolásához figyeljük meg, hogy

$$f(f(x)) = p_1^{-\alpha_1} p_2^{-\alpha_2} \dots p_{2n-1}^{-\alpha_{2n-1}} p_{2n}^{-\alpha_{2n}} = \frac{1}{x},$$

ami (2) fennállását is bizonyítja, ezért a (4) hozzárendelés megoldása a feladatnak.

Megjegyzés. A legtöbb versenyző, akik megoldották a feladatot, rájöttek, hogy (1)-ből (2) és (3) levezethető. Nekünk erre nem volt szükségünk, de megmutatjuk ennek egy lehetőségét.

Helyettesítsünk (1)-be $x = y = 1$ -et, majd nézzük az $x = 1, y = f(1)$ helyettesítést; az első esetben kapjuk, hogy

$$f(f(1)) = f(1), \quad \text{azaz} \quad f(f(f(1))) = f(f(1)) = f(1),$$

a másodikban

$$f(f(f(1))) = \frac{f(1)}{f(1)} = 1,$$

ezek összevetéséből következik, hogy $f(1) = 1$.

Ismét (1)-ből:

$$f(f(y)) = f(1 \cdot f(y)) = \frac{f(1)}{y} = \frac{1}{y},$$

azaz

$$(5) \quad f(f(y)) = \frac{1}{y},$$

ezzel (2)-t bebizonyítottuk. (5)-ből következik:

$$(6) \quad f(f(f(y))) = f\left(\frac{1}{y}\right),$$

helyettesítsünk (5)-ben y helyébe $f(y)$ -t, majd hasonlítsuk össze (6)-tal:

$$f(f(f(y))) = \frac{1}{f(y)},$$

$$f\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{f(y)}.$$

Helyettesítsük ebben y helyére $f(y)$ -t, majd alkalmazzuk (5)-öt:

$$f\left(\frac{1}{f(y)}\right) = \frac{1}{f(f(y))} = y.$$

Végül ennek felhasználásával induljunk ki ismét (1)-ből:

$$f(xy) = f\left(xf\left(\frac{1}{f(y)}\right)\right) = \frac{f(x)}{\frac{1}{f(y)}} = f(x)f(y),$$

amivel (2)-t is bizonyítottuk.

1990/5. Egy $n_0 > 1$ egész számból kiindulva két játékos, A és B felváltva neveznek meg n_1, n_2, n_3, \dots egész számokat, az alábbi szabályokat betartva.

Ha n_{2k} már meg van nevezve, A tetszése szerint választ egy n_{2k+1} egész számot, amire

$$n_{2k} \leq n_{2k+1} \leq n_{2k}^2$$

teljesül. Ha már n_{2k+1} meg van nevezve, B tetszése szerint választ egy n_{2k+2} egész számot, amire

$$\frac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}}$$

legalább 1 kitevőjű prímhatvány. Az A játékos nyer, ha 1990-et nevezi meg, B játékos nyer, ha 1-et nevezi meg.

Mely n_0 értékekre teljesül:

- A -nak van nyerő stratégiája,
- B -nek van nyerő stratégiája,
- egyik játékos sem tudja kikényszeríteni a győzelmet?

Megoldás. Induljunk ki abból, hogy már meg van nevezve egy n_0 szám, tehát A lépése következik.

Ha $45 \leq n_0 \leq 1990$, mivel $1990 < 45^2 = 2025$, A megnevezi $n_1 = 1990$ -et, és győz.

Ha $27 \leq n_0 \leq 44$, A az $n_1 = 720$ -at választhatja, $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$. Hogy $\frac{n_1}{n_2}$ prímszám legyen, B minimálisan 45-öt, maximálisan 360-at választhatja n_2 -nek, A tehát mindenképpen választhatja 1990-et n_3 -ként, mert $n_2 \leq 1990 \leq n_2^2$, A tehát nyer.

Ha $15 \leq n_0 \leq 26$, A n_1 -nek $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ -et választhatja; erre B n_2 -nek minimálisan 30-at, maximálisan 105-öt kell választania, A tehát választhatja n_3 -nak 1990-et, és nyer.

Ha $11 \leq n_0 \leq 14$, A választása legyen $n_1 = 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, B -nek olyan n_2 -t kell választania, amelyre $15 \leq n_2 \leq 35$ teljesül, de ez az előző esetek alapján éppen A nyerő helyzete.

Ha $8 \leq n_0 \leq 10$, legyen A választása $n_1 = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, Ekkor $12 \leq n_2 \leq 30$, ami az előzőek szerint ismét azt jelenti, hogy A -nak nyerő állása van.

Ha viszont $n_0 < 8$, ezt a módszer nem tudjuk folytatni, A ui. nem tud olyan számot mondani, amelyre B csak $n_2 \geq 8$ -cal válaszolhatna.

Eddigi eredményünk szerint tehát A -nak biztos nyerési stratégiája van, ha $8 \leq n_0 \leq 1990$.

Ha $2 \leq n_0 \leq 5$, B -nek van nyerő stratégiája. Ezt a következő módon láthatjuk be:

Ha $n_0 = 2$, n_1 csak 2, 3 vagy 4 lehet, tehát B n_2 -ként az 1-et választhatja, és nyer.

Ha $n_0 = 3$, n_1 lehetséges értékei 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; ha A n_1 -ként 6-ot választja, B választhatja $n_2 = 2$ -t, és ekkor — mint előbb láttuk —, nyer; A más választásánál B az 1-et választhatja, és nyer.

Ha $n_0 = 4$, az n_1 lehetséges értékei 4, 5, 6, 7, 8, 9 (ezek választása esetén az előbbi esettel van dolgunk); vagy 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, az utóbbi esetekben $n_2 = 2, 1, 3, 1, 2, 3, 1$ választással — mint láttuk — B nyer.

Ha $n_0 = 5$, $n_1 \leq 16$ esetén az előbbi esettel van dolgunk, tehát B -nek van nyerési esélye, míg ha

akkor

$n_1 =$	17,	18,	19,	20,	21,	22,	23,	24,	25,
$n_2 =$	1,	2,	1,	4,	3,	2,	1,	3,	1

választással valamelyik előbbi esetre térünk vissza, tehát B -nek nyerési lehetősége van.

Hátravan még az $n_0 = 6$ és $n_0 = 7$ eset.

Ha $n_0 = 6$, A választása $6 \leq n_2 \leq 36$ lehet. Ezek közül $n_1 = 30$ kivételével B -nek n_2 választása mindig lehet az 1, 2, ..., 5 számok valamelyike, ezekkel viszont

nyerhet. A -nak tehát $n_1 = 30$ -at kell választania. B -nek a nem vesztéshez 30 osztói közül 8-nál kisebbet kell választania, de ezek közül a feladat kikötésének csak $n_2 = 6$ felel meg, tehát visszatértünk a kiinduláshoz, a játék vég nélkül folytatható, egyik játékosnak sincs nyerési stratégiája.

Ha $n_0 = 7$, A választása $7 \leq n_1 \leq 49$ lehet. Ezek közül $n_1 = 30$, ill. $n_1 = 42$ kivételével B -nek n_2 választása mindig lehet az $1, 2, \dots, 5$ számok valamelyike, tehát B nyerő számai. Ha A az $n_1 = 30$ -at választja, mint láttuk, egy végtelen ciklus jön létre; ha viszont az A az $n_1 = 42$ -t választja, B egyetlen lehetséges válasza $n_2 = 6$, és így ismét az előbbi végtelen ciklusba érünk; ez azt jelenti, hogy $n_0 = 6, 7$ esetén egyik játékosnak sincs nyerő stratégiája.

Megmutatjuk, hogy $n_0 > 1990$ esetén is A -nak van nyerési stratégiája. Ha $n_0 > 1990$, akkor az $(n_0, 2n_0)$ intervallumban, amelynek a hossza legalább 1991, biztosan van $9 \cdot 2^k$ alakú szám ($k > 3$). Válassza A az $n_1 = 9 \cdot 2^k$ értéket. Ekkor a B által választható n_1 szám legalább 9, de legfeljebb $9 \cdot 2^{k-1}$, B tehát kénytelen n_0 -nál kisebb számot választani. Ezt a módszert követve A véges sok lépésben eléri, hogy B 9-nél nagyobb, de 1990-nél kisebb számot válasszon, s mint láttuk, ebben az esetben A -nak már nyerő stratégiája van.

Összefoglalva:

A -nak van nyerési stratégiája, ha $n_0 \geq 8$.

B -nek van nyerési stratégiája, ha $2 \leq n_0 \leq 5$;

egyk játékosnak sincs nyerési stratégiája, ha $n_0 = 6$ vagy 7.

Megjegyzés. Az A játékos nyerő stratégiája megoldásunk gondolatmenetét követve más is lehet; pontosabban, az általunk megjelölt n_1 számok helyett más számokat is választhat, az eredmény természetesen ettől független.

1990/6. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan konvex 1990-szög, amelyik rendelkezik az alábbi két tulajdonsággal:

A sokszög minden szöge egyenlő.

Az oldalak hosszai az $1^2, 2^2, \dots, 1989^2, 1990^2$ számok valamilyen sorrendben.

Megoldás. A szóbanforgó konvex sokszög oldalai párhuzamosak egy szabályos 1990-szög oldalaival; ezért minden oldalával van egy párhuzamos oldala is. Ez adja a feladat megoldásának a következő gondolatmenetét. Először egy $\frac{1990}{2} = 995$ oldalú sokszöget állítunk elő, megfelelő oldalhosszakkal, majd ennek minden oldalát két párhuzamos oldalra bontva és megfelelő sorrendben elforgatva kapjuk meg a keresett sokszöget.

Feladatunkat a komplex számsíkon oldjuk meg. Legyen e az első 995-dik egységgyök, azaz

$$e = \cos \frac{2\pi}{995} + i \sin \frac{2\pi}{995}.$$

Erre természetesen teljesül az $e^{995} = 1$, azaz $e^{995} - 1 = 0$ egyenlőség. Ebből egyrész

$$(1) \quad \begin{aligned} (e - 1) (1 + e + e^2 + \dots + e^{993} + e^{994}) &= 0, \\ S_1 = 1 + e + e^2 + \dots + e^{993} + e^{994} &= 0, \end{aligned}$$

másrészről $(e^5)^{199} - 1 = 0$ miatt

$$(2) \quad \begin{aligned} (e^5 - 1) (1 + e^5 + e^{10} + \dots + e^{985} + e^{990}) &= 0, \\ S_2 = 1 + e^5 + e^{10} + \dots + e^{985} + e^{990} &= 0. \end{aligned}$$

A szabályos 995-szög oldalai párhuzamosak az (1) összeg tagjaiban szereplő vektorokkal, képezzük most ezeknek a következő lineáris kombinációját:

$$(3) \quad S = \sum_{b=0}^{198} \left(b \cdot e^{5b} + (b+199)e^{5b+199} + (b+2 \cdot 199)e^{5b+2 \cdot 199} + \right. \\ \left. + (b+3 \cdot 199)e^{5b+3 \cdot 199} + (b+4 \cdot 199)e^{5b+4 \cdot 199} \right).$$

Az S összegben $5 \cdot 199 = 995$ tag szerepel, a $b + n \cdot 199$ ($n = 0, 1, 2, 3, 4$) együtt hatók a $0-994$ -ig terjedő egészek, mindegyik pontosan egyszer fordul elő. A komplex szorzók pedig az (1)-beli egységgyökök, figyelembe véve természetesen, hogy $e^{995} = 1$. A (3)-ban levő egységgyökök ugyanis mind különbözők; ha lenne közöttük két egyenlő, akkor azokra vagy

$$5b + n \cdot 199 = 5b' + j \cdot 199, \quad \text{azaz} \quad 5(b - b') = 199(j - n)$$

teljesülne, ami azt jelentené, hogy $b - b'$ osztható lenne 199-cel, de ez csak $b = b'$ esetén, és így $j = n$ esetén következne be; vagy pedig

$$5b + n \cdot 199 = 5b' + j \cdot 199 + 995$$

teljesülne, ami hasonló okokból lehetetlen. Ezért a (3)-ban szereplő 995 egységgyök (ugyanannyi a számuk, mint az együttthatóké) mind különböző, tehát azonosak az (1)-beli egységgyökökkel.

Megmutatjuk, hogy $S = 0$. E célból szorozzuk meg az $1 - e^{199} \neq 0$ számmal; a szorzások és összevonások után a következőket kapjuk:

$$(1 - e^{199}) S = \sum_{b=0}^{198} e^{5b} \left(199e^{199} (1 + e^{199} + e^{2 \cdot 199} + e^{3 \cdot 199} - 4e^{4 \cdot 199}) \right).$$

Jelölje a nagy zárójelben levő komplex számot (amely egyébként b -től független) E , ezzel (2) miatt

$$(1 - e^{199}) S = E \sum_{b=0}^{198} e^{5b} = E (1 + e^5 + e^{10} + \dots + e^{990}) = 0,$$

tehát $S = 0$.

A (3) alatti összeget írjuk most fel olyan alakban, hogy a $b + 199j = k$ ($j = 0, 1, 2, 3, 4$) együtthatók természetes sorrendben szerepeljenek benne, és jelölje a k együtthatókhoz tartozó egységkomplex számot e_k ($e_0 = 1$), ezzel (3) így írható fel: $S = \sum_{k=0}^{994} k e_k$. Emlékeztetünk rá, hogy az e_k egységkomplex számok azonosak

a 990-dik egységgyökökkel, ezért összegük 0, azaz $\sum_{k=0}^{994} e_k = 0$.

Képezzük most a

$$995 \cdot \left(997 \cdot \sum_{k=0}^{994} e_k + 2S \right) = 995 \cdot \left(997 \cdot \sum_{k=0}^{994} e_k + 2 \cdot \sum_{k=0}^{994} k e_k \right) = 0$$

összeget, ez egyébként

$$(4) \quad \sum_{k=0}^{994} 995 \cdot (995 + 2(k+1)) e_k = 0$$

alakba írható. Mivel pedig $995(995 + 2(k+1)) = (995 + k + 1)^2 - (k+1)^2$, (4) egyenértékű a következő alakkal:

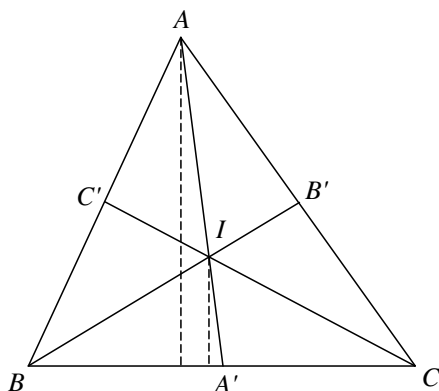
$$(5) \quad \sum_{k=0}^{994} \left((995 + k + 1)^2 e_k + (k+1)^2 (-e_k) \right) = 0.$$

Az e_k és a $-e_k$ egységgyökök együttesen éppen az 1990-edik egységgyökökkel azonosak; az (5) formula azt jelenti, hogy az ezeknek megfelelő vektorokat az (5) alatti elrendezésben rendre megszorozva az $1^2, 2^2, \dots, 1990^2$ számokkal és összeadva olyan sokszöget kapunk, amelynek oldalai az előírt állásúak és hosszúságúak. Ha még arra is ügyelünk, hogy az összeadandók sorrendje irány-szögeik (argumentumaik) növekvő sorrendjének feleljen meg, a vektorsokszög konvex voltát is biztosítjuk, tehát a feladat követelményeinek megfelelő sokszöget állítottunk elő.

1991.

1991/1. Jelöljük az ABC háromszög beírt körének középpontját I -vel, a $CAB \triangleleft$, $ABC \triangleleft$, $BCA \triangleleft$ szögek szögfelezőinek metszéspontját a szemközti oldalakkal pedig rendre A' , B' , C' -vel. Bizonyítsuk be, hogy

$$(1) \quad \frac{1}{4} < \frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \leq \frac{8}{27}.$$



91/1.1. ábra

1. megoldás. Jelölje a háromszög területét t , az ABI , BCI , CAI háromszögekét pedig rendre t_C , t_A , t_B ; nyilván $t = t_A + t_B + t_C$. Mivel a BCI és BCA háromszögek alapja (BC) közös, területeik aránya a közös alaphoz tartozó magasságok arányával, tehát $IA' : AA'$ -vel egyenlő (1991/1.1. ábra), azaz

$$\frac{t_A}{t} = \frac{IA'}{AA'} = \frac{AA' - AI}{AA'} = 1 - \frac{AI}{AA'}$$

Ebből

$$\frac{AI}{AA'} = 1 - \frac{t_A}{t},$$

hasonlóan

$$\frac{BI}{BB'} = 1 - \frac{t_B}{t}, \quad \frac{CI}{CC'} = 1 - \frac{t_C}{t}.$$

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján

$$\frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \leq \frac{1}{27} \left(\frac{AI}{AA'} + \frac{BI}{BB'} + \frac{CI}{CC'} \right)^3 = \frac{1}{27} \left(3 - \frac{t_A + t_B + t_C}{t} \right)^3 = \frac{8}{27}.$$

A jobb oldali egyenlőtlenséget ezzel bizonyítottuk. Megfigyelhetjük, hogy az I pontról csak annyira használtunk fel, hogy az ABC háromszög belső pontja.

Az egyenlőtlenség bal oldalának a bizonyításához vegyük észre, hogy $\frac{AI}{AA'} = 1 - \frac{t_A}{t} = \frac{t_B + t_C}{t}$; ha r a beírt kör sugara, $2t = r(a + b + c)$, $2t_A = ra$, $2t_B = rb$, $2t_C = rc$, és így $\frac{AI}{AA'} = \frac{b + c}{a + b + c}$; hasonlóan

$$\frac{BI}{BB'} = \frac{c + a}{a + b + c}, \quad \frac{CI}{CC'} = \frac{a + b}{a + b + c},$$

és így a bizonyítandó:

$$(2) \quad 4(a + b)(b + c)(c + a) > (a + b + c)^3.$$

A szorzásokat elvégezve és átrendezve ebből a

$$-a^3 - b^3 - c^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 + 2abc > 0$$

egyenlőtlenséget kapjuk, ebből viszont az

$$(3) \quad (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)+4abc > 0$$

egyenlőtlenséget kapjuk, ami nyilván teljesül, ha a, b, c egy háromszög oldalai. Mivel egyenértékű átalakításokat végeztünk, (2) és ezzel az (1) egyenlőtlenség mindkét oldalát bizonyítottuk.

2. megoldás. A szögfelező a háromszög szemközti oldalát a szomszédos oldalak arányában osztja, pl. $BA' = \frac{ac}{b+c}$; ha viszont ugyanezt a tételt az ABA' háromszögre és a BI szögfelezőre alkalmazzuk, kapjuk, hogy

$$AI = \frac{c \cdot AA'}{c + \frac{ac}{b+c}} = \frac{(b+c) \cdot AA'}{a+b+c}, \quad \text{ebből} \quad \frac{AI}{AA'} = \frac{b+c}{a+b+c}.$$

Hasonlóan nyerjük:

$$\frac{BI}{BB'} = \frac{a+c}{a+b+c}, \quad \frac{CI}{CC'} = \frac{a+b}{a+b+c}.$$

Ezzel a bizonyítandó egyenlőtlenségünk így alakul:

$$(4) \quad \frac{1}{4} < \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3} \leq \frac{8}{27}.$$

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenségből:

$$\frac{1}{(a+b+c)^3} \cdot (a+b)(b+c)(c+a) \leq \frac{1}{(a+b+c)^3} \left(\frac{a+b+b+c+c+a}{3} \right)^3 = \frac{8}{27},$$

amivel a jobb oldali egyenlőtlenséget igazoltuk.

A bal oldali egyenlőtlenség bizonyításához felhasználjuk a minden valós számra érvényes

$$3(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$$

azonosságot. Ezzel bizonyítandónk így alakul:

$$(5) \quad \frac{1}{4} < \frac{(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3}{3(a+b+c)^3}.$$

Ennek bizonyítására felhasználjuk a (más helyeken is jól alkalmazható) következő segédtelet (l. megjegyzésünket):

Ha x, y, x_1, y_1 olyan pozitív számok, amelyekre $x+y = x_1+y_1$, de $x-y < x_1-y_1$ ($x \geq y, x_1 \geq y_1$), akkor $x^3+y^3 < x_1^3+y_1^3$.

Ennek alkalmazására feltehetjük, hogy $a \geq b \geq c$. Segédteletünket a következő szereposztással alkalmazzuk:

$$x = a, \quad y = b, \quad x_1 = \frac{a+b+c}{2}, \quad y_1 = \frac{a+b-c}{2}.$$

Az alkalmazás feltételei biztosítottak, mert $x \geq y$, $x_1 \geq y_1$, $x + y = x_1 + y_1$ és $x - y = a - b$, $x_1 - y_1 = c$, $a - b < c$, következésképpen

$$a^3 + b^3 < \left(\frac{a+b+c}{2}\right)^3 + \left(\frac{a+b-c}{2}\right)^3.$$

Ezt alkalmazzuk (5)-ben, valamint felhasználjuk a könnyen ellenőrizhető $\left(\frac{a+b-c}{2}\right)^3 + c^2 < \left(\frac{a+b+c}{2}\right)^3$ egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned} \frac{(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3}{3(a+b+c)^3} &> \frac{(a+b+c)^3 - \left(\frac{a+b+c}{2}\right)^3 - \left(\frac{a+b-c}{2}\right)^3 - c^3}{3(a+b+c)} > \\ &> \frac{(a+b+c)^3 - \left(\frac{a+b+c}{2}\right)^3 - \left(\frac{a+b-c}{2}\right)^3}{3(a+b+c)^3} = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

amivel állításunkat bizonyítottuk.

Megjegyzések. 1. Megoldásunkból közvetlen következik, hogy a jobb oldali egyenlőtlenségben az egyenlőség szabályos háromszög esetén teljesül.

A bal oldali egyenlőtlenségben az $\frac{1}{4}$ -es korlát nem javítható. Ha a háromszögben $b = c$ rögzített értékek, és az a hossza nullához tart, akkor a (4)-beli tört határértéke éppen $\frac{1}{4}$, tehát azt tetszőlegesen megközelítheti.

2. Segédteételünk: ha x, y, x_1, y_1 pozitív számok és $x + y = x_1 + y_1$, $x \geq y$, $x_1 \geq y_1$, $x - y < x_1 - y_1$, akkor $x^3 + y^3 < x_1^3 + y_1^3$.

Bizonyítás: a feltételekből $x^2 + 2xy + y^2 = x_1^2 + 2x_1y_1 + y_1^2$, $x^2 - 2xy + y^2 < x_1^2 - 2x_1y_1 + y_1^2$. E kettő különbségéből $-4xy < -4x_1y_1$, azaz $xy > x_1y_1$ következik. Viszont az első egyenlőséget köbreemelve kapjuk, hogy

$$x^3 + y^3 + 3xy(x+y) = x_1^3 + y_1^3 + 3x_1y_1(x_1+y_1),$$

$$0 = x_1^3 + y_1^3 - (x^3 + y^3) + 3(x+y)(x_1y_1 - xy),$$

$$x_1^3 + y_1^3 - (x^3 + y^3) > 0,$$

ami bizonyítandó volt.

1991/2. Legyen $n > 6$ egész szám és a_1, a_2, \dots, a_k az összes olyan pozitív egész, amely kisebb n -nél és relatív prím n -hez. Tegyük fel, hogy

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_k - a_{k-1} > 0.$$

Bizonyítsuk be, hogy ekkor n prímszám, vagy 2-nek egész kitevős hatványa.

Megoldás. A feladat egyszerűbb fogalmazásban: ha az n -nél kisebb, hozzá relatív prím pozitív egészek számtani sorozatot alkotnak, akkor n prím vagy 2-hatvány.

Jelölje a számtani sorozat különbségét d , $d \geq 1$ pozitív egész. Mivel 1 és $n-1$ relatív prím n -hez, $a_1 = 1$, $a_k = n-1$.

Legyen először n páratlan. Ebben az esetben $n-2$ is relatív prím n -hez, hiszen közös osztójuk különbségüknek, 2-nek is osztója, tehát $a_{k-1} = n-2$, ennél fogva $d=1$, a számtani sorozat tehát tartalmazza 1-től $n-1$ -ig az összes egészet. Ezek mind relatív prímek n -hez, ezért n -nek nem lehet valódi osztója, következésképpen n prím.

Legyen most n páros, azaz $n = 2^r \cdot s$, ahol $r \geq 1$ pozitív egész, $s \geq 1$ páratlan egész.

α) Ha $s=1$, akkor n 2-hatvány, hozzá relatív prímek a nála kisebb páratlan számok és ezek valóban számtani sorozatot alkotnak ($d=2$), ebben az esetben a feladat állítása igaz.

β) Ha $s=3$, $n > 6$ miatt az n -hez relatív prímek sorozata így kezdődik: 1, 5, 7, ..., ami lehetetlen, mert ezek nem lehetnek számtani sorozat egymást követő tagjai.

γ) Ha $s \geq 5$, megmutatjuk, hogy $s-2$ és $s-4$ szerepel a számtani sorozatban. Legyen ugyanis p $n = 2^r \cdot s$ -nek és $s-2$ -nek közös osztója ($p \geq 1$), ekkor osztója $2^r(s-2) + 2^{r+1} = 2^r \cdot s$ -nek is, tehát osztója 2^{r+1} -nek. Viszont p páratlan ($s-2$ is páratlan), ezért $p=1$; ez azt jelenti, hogy n és $s-2$ relatív prímek, $s-2$ benne van a számtani sorozatban; $2^r(s-4) + 2^{r+2} = 2^r \cdot s = n$ miatt $s-4$ és n közös osztója is csak 1 lehet, ezért $s-4$ is a sorozatban van. $s-2$ és $s-4$ a sorozat szomszédos tagjai, tehát $d=2$, így a számtani sorozat 1, 3, ..., s , ..., $n-1$, ami ellentmondás, mert s nem relatív prím n -hez, ezért csak $s=1$ lehetséges, ami éppen azt jelenti, hogy n 2-hatvány.

1991/3. Legyen $S = \{1, 2, 3, \dots, 280\}$. Határozzuk meg azt a legkisebb n egészt, amelyre igaz, hogy S minden n -elemű részhalmaza tartalmaz 5 olyan számot, amelyek páronként relatív prímek.

Megoldás. Először megmutatjuk, hogy S -nak van olyan 216 elemű részhalmaza, amely nem tartalmaz 5, páronként relatív prím egészet. Válasszuk ki S -ből ugyanis 2, 3, 5 és 7 többszöröseit, legyen ezek halmaza N . Jelölje N_i az S -beli számok közül az i -vel oszthatók részhalmazát, ezek számát $|N_i|$.

Számoljuk most össze a kiválasztott elemeket:

$$|N_2| = 140, \quad |N_3| = 93, \quad |N_5| = 56, \quad |N_7| = 40.$$

$|N_2 \cap N_3|$ jelenti a 2-vel és 3-mal, azaz a 6-tal osztható elemek számát; ezeket összeszámolva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} |N_2 \cap N_3| &= 46, & |N_2 \cap N_5| &= 28, & |N_2 \cap N_7| &= 20, \\ |N_3 \cap N_5| &= 18, & |N_5 \cap N_7| &= 8, & |N_3 \cap N_7| &= 13. \end{aligned}$$

Továbbá

$$|N_2 \cap N_3 \cap N_5| = 9, \quad |N_2 \cap N_3 \cap N_7| = 6, \quad |N_2 \cap N_5 \cap N_7| = 4, \quad |N_3 \cap N_5 \cap N_7| = 2 \\ |N_2 \cap N_3 \cap N_5 \cap N_7| = 1.$$

A logikai szita formula szerint a kiválasztott elemek szám:

$$|N| = (140 + 93 + 56 + 40) - (46 + 28 + 20 + 18 + 8 + 13) + (9 + 6 + 4 + 2) - 1 = 216.$$

Bármely 5-öt is választjuk ki ebből a 216 számból, az N_2, N_3, N_5, N_7 halmazok közül valamelyiknek két elemét szükségképpen tartalmazza, tehát nem lehetnek páronként relatív prímek, ezért $n > 216$.

Bebizonyítjuk viszont, hogy S bármely 217 elemű részhalmazában van 5, páronként relatív prím elem, tehát $n = 217$.

Az első 280 pozitív egész között 59 prím van (1. megjegyzésünket), ezeknek a halmazát az 1-gyel kibővítve jelölje P , tehát $|P| = 60$. Ezek szerint az összetett számok száma S -ben 220, legyen ezek halmaza T , $|T| = 220$. Megadjuk most T -nek 8, közös elem nélküli 5-elemű részhalmazát, egy ilyen részhalmazon belül az elemek relatív prímek:

$$\begin{aligned} M_1 &= \{2 \cdot 23, 3 \cdot 19, 5 \cdot 17, 7 \cdot 13, 11^2\}, \\ M_2 &= \{2 \cdot 29, 3 \cdot 23, 5 \cdot 19, 7 \cdot 17, 11 \cdot 13\}, \\ M_3 &= \{2 \cdot 31, 3 \cdot 29, 5 \cdot 23, 7 \cdot 19, 11 \cdot 17\}, \\ M_4 &= \{2 \cdot 37, 3 \cdot 31, 5 \cdot 29, 7 \cdot 23, 11 \cdot 19\}, \\ M_5 &= \{2 \cdot 41, 3 \cdot 37, 5 \cdot 31, 7 \cdot 29, 11 \cdot 23\}, \\ M_6 &= \{2 \cdot 43, 3 \cdot 41, 5 \cdot 37, 7 \cdot 31, 13 \cdot 17\}, \\ M_7 &= \{2 \cdot 47, 3 \cdot 43, 5 \cdot 41, 7 \cdot 37, 13 \cdot 19\}, \\ M_8 &= \{2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 13^2\}. \end{aligned}$$

Ennek a 8 M_i halmaznak az egyesítése tehát 40-elemű M halmaz.

Válasszunk most ki S -ből egy tetszőleges, 217-elemű H halmazt. Ha H -nak és P -nek van legalább 5 közös eleme, akkor H tartalmaz 5 páronként relatív prím számot, a feladat követelménye kielégült.

Ha H -ban legfeljebb 4 darab P -beli elem van, akkor a többi 213 elem T -ből való. Tegyük fel, hogy ez a 213-elemű halmaz nem tartalmaz egy teljes M_i halmazt, azaz mind a 8 M_i halmazból legalább egyik nincs benne. Akkor azonban a T 220 eleméből csak legfeljebb 212-t választottunk ki, ami ellentmondás, tehát H -nak vagy kell tartalmaznia 5 elemet P -ből, vagy pedig teljes egészében tartalmaznia kell egy M_i részhalmazt, ezért mindig van benne legalább 5 páronként relatív prím elem.

Megjegyzés. Segédeszköz (pl. prímszámtáblázat vagy zsebszámoló) híján a 280-ig terjedő prímek számát úgy is meg lehet állapítani, hogy az N halmazból

a 2, 3, 5, 7 prímekeket elvéve 212 összetett szám marad, ezeken kívül S -ben már csak a következő 8 szám összetett: 11^2 , 13^2 , $11 \cdot 13$, $11 \cdot 17$, $11 \cdot 19$, $11 \cdot 23$, $13 \cdot 17$ és $13 \cdot 19$ (bár a prímszámok megállapítása sem tart lényegesen hosszabb ideig pl. az eratoszteni szitával).

1991/4. Legyen a G összefüggő gráf éleinek száma k . Bizonyítsuk be, hogy meg lehet az éleket számozni az 1, 2, 3, ..., k számokkal úgy, hogy minden olyan csúcs esetén, amelyből legalább két él indul ki, az illető csúcsokból kiinduló összes élhez rendelt számok legnagyobb közös osztója 1.

(Gráfnak nevezzük a csúcsnak mondott pontok egy halmazát, amelyben a két különböző csúcsból álló párok némelyikét élek kötik össze. Bármely két különböző u, v csúcs között legfeljebb egy él halad. A G gráf összefüggő, ha bármely két különböző x, y csúcsához található a csúcsoknak egy olyan $x = v_0, v_1, \dots, v_m = y$ sorozata, hogy minden v_i, v_{i+1} ($0 \leq i < m$) csúcspárt él köt össze.)

1. megoldás. Megoldásunk lényege, hogy arra törekszünk, hogy az egy csúcsból induló éleken szerepeljen két szomszédos egész szám, hiszen akkor biztos, hogy az összes csúcsbeli élen levő számok legnagyobb közös osztója 1.

A csúcs fokának a csúcsból induló élek számát nevezzük. Betűzzük meg a csúcsokat: P_1, P_2, \dots, P_n . Mivel a gráf összefüggő, bármely csúcsból bármely csúcsba eljuthatunk egymáshoz kapcsolódó élsorozatból álló úton.

Induljunk el a P_1 csúcsból a P_2 -be, innen a P_3 -ba, majd sorban tovább P_n -be és innen P_1 -be, és a haladás sorrendjében számozzuk meg az éleket a következő szabályok szerint:

- ha egy csúcsba először futunk be, akkor onnan, ha a csúcs nem elsőfokú, másik élen haladunk tovább; a kiinduló élre eggyel nagyobb számot írunk, mint amilyen a beérkezési élen szerepel;
- ha egy csúcsba vagy csúcsból olyan élen haladunk át, amely már meg van számozva, arra nem írunk újabb számot; a számozást akkor folytatjuk, ha számozatlan élhez érünk;
- a P_1 -ből induló első élre 1-et írunk;
- ha így az 1, 2, ..., l számokat használtuk fel a számozáshoz, az esetleg számozatlanul maradt élekre tetszés szerinti sorrendben felírjuk az $l+1, l+2, \dots, k$ számokat.

Ez a számozási módszer biztosítja, hogy a feladat feltétele teljesüljön, azaz az elsőfokú csúcsokon kívül minden csúcsban van (esetleg P_1 -en kívül) olyan két él, amelyen szomszédos számok vannak. P_1 -ben van az 1-es él, ez a feladat feltételéhez már elég; az elsőfokú csúcsokban bármilyen számozás megfelelő, a legalább másodfokú csúcsokba pedig az első beérkezés alkalmával biztosan került két szomszédos számozású él; tehát a gráfot helyesen számoztuk meg.

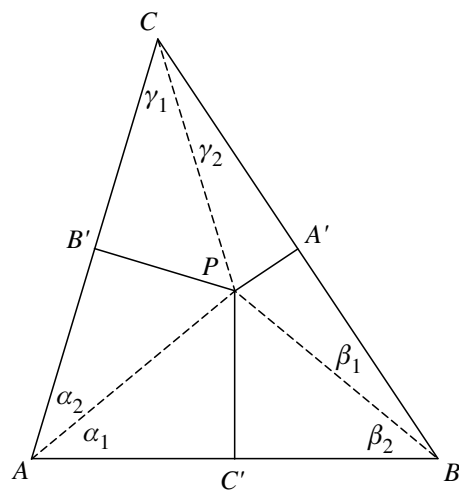
2. megoldás. Ismeretes, hogy egy gráfban a páratlan fokú csúcsok száma páros, foglaljuk párokba a páratlan csúcsokat, és kössük ezeket össze piros éllel, a gráf eredeti élei feketék. Az így készített gráf minden csúcsa most már páros fokú. Előfordulhat, hogy két csúcsot egy fekete és egy piros él is összeköt, de ez a továbbiak folyamán nem zavaró. Egy csúcsból így természetesen legfeljebb egy piros él indulhat ki.

A gráfunk ezzel ún. Euler-féle gráf lett. Ennek jellemző tulajdonsága, hogy egy tetszőleges gráfcsúcsból kiindulva a gráf élei bejárhatók úgy, hogy minden élen pontosan egyszer haladunk át, és visszaérkezünk a kiindulási pontba.

Járjuk be kiegészített gráfunk éleit egy A_1 csúcsból kiindulva úgy, hogy a kiindulási fekete élre 1-est írunk, és a haladásnak megfelelően minden új fekete élre 1-gyel nagyobb számot írunk rá; ha közben piros élen haladunk át, arra nem írunk számot. Mivel az Euler-féle vonal (körút) minden élt tartalmaz, minden éltre kerül szám, ha egy csúcsban csak fekete él van, biztosan van rajtuk két szomszédos szám. Ha egy csúcs piros élt is tartalmaz, és mellette egy fekete él van, a feladat szempontjából közömbös, hogy a fekete élre milyen szám kerül; ha a piros él mellett még legalább három fekete él van, a csúcsban az Euler-vonal legalább kétszer áthalad, és az egyik áthaladásnál fekete élhez fekete él csatlakozik, tehát itt is van valamelyik élpáron két szomszédos szám.

Ezzel a számozási eljárással tehát kielégíthetjük a feladat követelményeit.

1991/5. Legyen P az ABC háromszög belső pontja. Bizonyítsuk be, hogy a PAB , PBC , PCA szögek közül legalább az egyik nem nagyobb 30° -nál.



91/5.1. ábra

1. megoldás. Használjuk az 1991/5.1. ábra jelöléseit. Ha a háromszögnek van 150° -nál nem kisebb szöge, akkor van 30° -nál kisebb szöge is, ebben az esetben a feladat állítása nyilvánvaló. Tegyük fel a feladat állításával ellentétben, hogy $30^\circ < \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 < 150^\circ$, ha tehát P -ből az AB , BC , CA oldalakra állított merőlegesek talppontjai rendre C' , A' , B' , akkor

$$\sin \alpha_1 = \frac{PC'}{PA} > \sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

azaz

$$2PC' > PA$$

és hasonlóan

$$2PA' > PB, \quad 2PB' > PC,$$

és így

$$(1) \quad PA' + PB' + PC' > \frac{PA + PB + PC}{2},$$

holott az Erdős–Mordell egyenlőtlenség szerint (1)-ben éppen a \leq jel érvényes [33]; feltevésünk tehát ellentmondásra vezet, amivel a feladat állítását bizonyítottuk.

2. megoldás. Tegyük fel, hogy az állítással ellentétben $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ nagyobbak 30° -nál, tehát, mint az 1. megoldásban: $30^\circ < \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 < 150^\circ$,

$$(2) \quad \sin \alpha_1 \sin \beta_1 \sin \gamma_1 > \frac{1}{8}.$$

Ebből már következik, hogy $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 > 90^\circ$, és így $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 < 90^\circ$; ezért a számtani és mértani közép közötti, illetve a Jensen-féle egyenlőtlenségből

$$\begin{aligned} \sin \alpha_2 \sin \beta_2 \sin \gamma_2 &\leq \left(\frac{\sin \alpha_2 + \sin \beta_2 + \sin \gamma_2}{3} \right)^3 \leq \\ &\leq \sin^3 \frac{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2}{3} < \sin^3 30^\circ = \frac{1}{8}, \end{aligned}$$

azaz

$$\frac{1}{\sin \alpha_2 \sin \beta_2 \sin \gamma_2} > 8,$$

ami (2)-vel együtt azt eredményezi, hogy

$$(3) \quad \frac{\sin \alpha_1 \sin \beta_1 \sin \gamma_1}{\sin \alpha_2 \sin \beta_2 \sin \gamma_3} > 1.$$

Viszont az APB, BPC, CPA háromszögekre alkalmazva a szinusztételt kapjuk, hogy

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \gamma_2} \cdot \frac{\sin \gamma_1}{\sin \alpha_2} = \frac{PB}{PA} \cdot \frac{PC}{PB} \cdot \frac{PA}{PC} = 1,$$

ami azt jelenti, hogy (3) nem állhat fenn, tehát $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ között kell lennie 30° -nál nem nagyobbaknak, amivel a feladat állítását bizonyítottuk.

3. megoldás. Legyen Q a háromszög (egyik) Brocard-pontja [34], ez azt jelenti, hogy az ω Brocard-féle szöggel

$$\angle QBC = \angle QCA = \angle QAB = \omega.$$

Mivel

$$\operatorname{ctg} \omega = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma,$$

a kotangensegyenlőtlenségből következik [3], hogy

$$\operatorname{ctg} \omega \geq \sqrt{3},$$

azaz $\omega \leq 30^\circ$. A feladatban adott P pont a QBC, QCA, QAB háromszögek egyikének, pl. a QBC háromszögnek belső- vagy határpontja, ezért $\angle PBC \leq \angle QBC = \omega \leq 30^\circ$, ami bizonyítandó volt.

1991/6. A valós számok egy x_0, x_1, \dots sorozatát korláatosnak nevezik, ha létezik olyan C konstans, hogy $|x_i| \leq C$ minden $i \geq 0$ -ra.

Minden rögzített $a > 1$ valós számhoz konstruáljunk olyan korláatos, végtelen x_0, x_1, x_2, \dots sorozatot, amelyre

$$(1) \quad |x_i - x_j| \cdot |i - j|^a \geq 1$$

teljesül bármely két különböző, nemnegatív i, j egészre.

1. megoldás. Megoldásunkban abból indulunk ki, hogy ha (1) $a = 1$ -re minden szóbajövő i, j párra teljesül, akkor teljesül $a > 1$ -re is. Ezért elegendő olyan sorozatot szerkesztenünk, amelyre (1) $a = 1$ esetben teljesül.

Szerkesztésünkben felhasználjuk azt az ismert tételt, amely szerint, ha $\frac{p}{q}$ (p és q pozitív egész) a $\sqrt{2}$ egy közelítő törtje, akkor

$$(2) \quad \left| \sqrt{2} - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{3q^2}.$$

Jelölje $\sqrt{2}k$ törtrészt $\{\sqrt{2}k\}$, és legyen

$$(3) \quad x_k = 3\{\sqrt{2}k\} = 3(\sqrt{2}k - [\sqrt{2}k]), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Megmutatjuk, hogy az így értelmezett x_k számok kielégíti $a = 1$ -gyel az (1) feltevést: legyen ugyanis $i > j$ két nemnegatív egész. Mivel $\{\sqrt{2}k\} < 1$,

$$x_k < 3,$$

azaz a sorozat korláatos. (1) teljesül, mert $q = i - j$, $p = [i\sqrt{2}] - [j\sqrt{2}]$ jelöléssel

$$\begin{aligned} |x_i - x_j| |i - j| &= 3 \left| (i - j)\sqrt{2} - ([i\sqrt{2}] - [j\sqrt{2}]) \right| (i - j) = \\ &= 3 |q\sqrt{2} - p| q = 3q^2 \left| \sqrt{2} - \frac{p}{q} \right| > 1, \end{aligned}$$

a (2) miatt biztosan teljesül, tehát a (3) alatti sorozat minden $a \geq 1$ -re kielégíti a feladat feltételeit.

2. megoldás. A sorozatszerkesztésünk lényege, hogy a természetes számok kettes számrendszerbeli alakjából bizonyos kifejezéseket állítunk elő, és ezek felhasználásával értelmezzük a sorozat elemeit.

Legyen az i szám kettes számrendszerbeli alakja

$$i = b_0 + b_1 \cdot 2 + b_2 \cdot 2^2 + \dots + b_k \cdot 2^k,$$

ahol a b_s együtthatók értéke 0 vagy 1. Ha most a a feladatban adott állandó ($a > 1$), i felhasználásával értelmezzük a h_i számot:

$$h_i = b_0 + b_1 \cdot 2^{-a} + b_2 \cdot 2^{-2a} + \dots + b_k \cdot 2^{-ka}.$$

A végtelen mértani sor összegképletének felhasználásával

$$(4) \quad 0 \leq h_i \leq 1 + 2^{-a} + 2^{-2a} + \dots + 2^{-ka} < \frac{1}{1 - 2^{-a}}.$$

Hasonlóan: legyen $i \neq j = c_0 + c_1 \cdot 2 + c_2 \cdot 2^2 + \dots + c_k \cdot 2^k$, és így

$$h_j = c_0 + c_1 \cdot 2^{-a} + c_2 \cdot 2^{-2a} + \dots + c_k \cdot 2^{-ka}.$$

Tegyük fel, hogy a $(b_0, c_0), (b_1, c_1), \dots$ számjegypárok közül (b_t, c_t) az első, amelybe a párok különböző jegyekből állnak, akkor $i - j \geq 2^t$;

$$\begin{aligned} |h_i - h_j| &= |(b_0 - c_0) + (b_1 - c_1) \cdot 2^{-a} + \dots + (b_k - c_k) 2^{-ka}| \geq \\ &\geq |b_t - c_t| 2^{-ta} - |b_{t+1} - c_{t+1}| 2^{-(t+1)a} - \dots - |b_k - c_k| 2^{-ka} \geq \\ &\geq 2^{-ta} - 2^{-(t+1)a} - \dots - 2^{-ka} > 2^{-ta} - \frac{2^{-(t+1)a}}{1 - 2^{-a}} = \\ &= 2^{-ta} \left(1 - \frac{2^{-a}}{1 - 2^{-a}} \right) = (2^t)^{-a} \frac{2^a - 2}{2^a - 1} \geq \frac{2^a - 2}{2^a - 1} |i - j|^{-a}, \end{aligned}$$

ebből

$$(5) \quad |h_i - h_j| |i - j|^a \geq \frac{2^a - 2}{2^a - 1}.$$

Képezzük sorozatunkat a következő módon:

$$x_i = \frac{2^a - 1}{2^a - 2} h_i.$$

Ez a sorozat kielégíti a feladat feltételeit, mert (4) miatt x_i korlátos:

$$x_i < \frac{2^a - 2}{2^a - 1} \cdot \frac{a}{1 - 2^{-a}} = a \frac{2^a - 2}{2^a - 2 + 2^{-a}} < a,$$

és (1) is teljesül, mivel

$$|x_i - x_j| |i - j|^a = \frac{2^a - 1}{2^a - 2} |h_i - h_j| |i - j|^a \geq \frac{2^a - 1}{2^a - 2} \cdot \frac{2^a - 2}{2^a - 1} = 1,$$

és ezzel a feladatban előírt konstrukciót elvégeztük.

Megjegyzés. Az 1. megoldás módszerével a feladat eredményei finomíthatók, a sorozat elemeire adott korlát értéke is jól becsülhető. Részletesen olvasható erről a KöMaL 1991/8–9 számában (344–347. old.) Harcos Gergely: Megjegyzések az olimpia 6. feladatához c. cikkében. (Az 1. megoldás is a szerzőtől való.)

A megoldásban felhasznált becslés a következő módon bizonyítható: azt kell igazolnunk, hogy ha $\frac{p}{q}$ pozitív racionális szám, akkor

$$\left| \sqrt{2} - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{3q^2}.$$

$q = 1$ -re az állítás nyilvánvalóan igaz, ezért feltesszük, hogy $q \geq 2$. Ha állításunkkal ellentétben

$$\left| \sqrt{2} - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{3q^2}$$

teljesülne valamilyen $\frac{p}{q}$ számra, akkor ebből

$$-\frac{1}{3q^2} \leq \sqrt{2} - \frac{p}{q} \leq \frac{1}{3q^2}$$

és átrendezéssel

$$-\frac{1}{3q} + q\sqrt{2} \leq p \leq \frac{1}{3q} + q\sqrt{2}$$

következnék. Ebből viszont azt kapjuk, hogy

$$-\frac{2\sqrt{2}}{3} + \left(\frac{1}{3q}\right)^2 \leq p^2 - 2q^2 \leq \frac{2\sqrt{2}}{3} + \left(\frac{1}{3q}\right)^2,$$

ez $q \geq 2$ miatt azt jelentené, hogy

$$|p^2 - 2q^2| \leq \frac{2\sqrt{2}}{3} + \left(\frac{1}{3q}\right)^2 \leq \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{36} = \frac{24\sqrt{2} + 1}{36} < 1.$$

Mivel $|p^2 - 2q^2|$ nemnegatív egész, ebből $p^2 - 2q^2 = 0$,

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2}$$

következnék, ami $\sqrt{2}$ irracionális volta miatt ellentmondás, becslésünk ezért helyes.

1992.

1992/1. Határozzuk meg az összes olyan a , b , c egész számot, amelyekre $1 < a < b < c$ és $(a-1)(b-1)(c-1)$ osztója $abc-1$ -nek.

Megoldás. Vezessük be a

$$(1) \quad Q = \frac{abc-1}{(a-1)(b-1)(c-1)}$$

jelölést; a feladat azoknak az a , b , c értékeknek a meghatározása, amelyekre Q egész.

$$\begin{aligned} (1') \quad Q &= \frac{abc}{(a-1)(b-1)(c-1)} - \frac{1}{(a-1)(b-1)(c-1)} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{a-1}\right) \left(1 + \frac{1}{b-1}\right) \left(1 + \frac{1}{c-1}\right) - \frac{1}{(a-1)(b-1)(c-1)}, \end{aligned}$$

ebből

$$(2) \quad Q < \left(1 + \frac{1}{a-1}\right) \left(1 + \frac{1}{b-1}\right) \left(1 - \frac{1}{c-1}\right).$$

(1)-ből következik, hogy ha a, b, c között van páros, akkor a számláló páratlan, és Q csak akkor lehet egész, ha a nevező is páratlan; ez azt jelenti, hogy az a, b, c számhármass minden tagja egyszerre páros vagy páratlan. (1') jobb oldaláról látjuk, hogy $Q > 1$.

Az a nem lehet 3-nál nagyobb. Ha ui. $a \geq 4$, akkor azonos párosságú voltuk miatt $b \geq 6, c \geq 8$, és így (2)-ből

$$Q < \left(1 + \frac{1}{4-1}\right) \left(1 + \frac{1}{6-1}\right) \left(1 - \frac{1}{8-1}\right) = \frac{192}{105} < 2,$$

ami lehetetlen, hiszen Q egész és nagyobb 1-nél; a lehetséges értékei ezért 2 és 3.

α) Ha $a = 2$, az azonos párosság miatt $b \geq 4, c \geq 6$, és ebből (2) alapján

$$Q < \frac{16}{5} < 4$$

következik, azaz $Q = 2$ vagy 3; 2 azonban nem lehet, mert (1)-ből Q páratlan volta következik, tehát ha $a = 2, Q = 3$, és akkor (1) így alakul

$$2bc - 1 = 3(b-1)(c-1),$$

$$(b-3)(c-3) = 5 = 1 \cdot 5,$$

amiből $b = 4, c = 8$ következik, a $(2, 4, 8)$ számhármass tényleg megoldás.

β) Ha $a = 3$, az azonos párosság miatt $b \geq 5, c \geq 7$, és ezért (2)-ből

$$Q < \frac{35}{16} < 3$$

következik, tehát $Q = 2$. Az $a = 3, Q = 2$ értékeket (1)-be helyettesítve kapjuk, hogy

$$2 = \frac{3cb - 1}{2(b-1)(c-1)},$$

$$(b-4)(c-4) = 11 = 1 \cdot 11,$$

ebből $b = 5, c = 15$. A $(3, 5, 15)$ számhármass tényleg kielégíti a feladat feltételeit.

1992/2. Jelölje \mathbf{R} a valós számok halmazát. Határozzuk meg az összes olyan $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvényt, amelyre

$$(1) \quad f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2$$

teljesül \mathbf{R} minden x, y elemére.

E helyen nem érthető félre, ha egyszerűség kedvéért az $(f(x))^2 = f^2(x)$ jelölést használjuk.

1. megoldás. Észrevehetjük, hogy $f(x) = x$ megoldása (1)-nek; megmutatjuk, hogy ez az egyetlen megoldás.

Tegyük fel, hogy létezik olyan valós y , amelyre

$$(2) \quad f(y) < y, \quad \text{azaz} \quad y - f(y) > 0$$

teljesül. Vezessük be az $x^2 = y - f(y)$ jelölést, ezzel $y = x^2 + f(y)$, és ebből (1) alapján

$$f(y) = f(x^2 + f(y)) = y + f^2(x) \geq y,$$

ez azonban ellentmond (2)-nek, és így szükségképpen minden valós y -ra

$$(3) \quad f(y) \geq y.$$

Válasszuk most meg y_0 -t úgy, hogy $y_0 < -f^2(0)$ teljesüljön, és legyen $f(y_0) = a$. Ekkor (3) és (1) felhasználásával kapjuk, hogy

$$a \leq f(a) = f(0^2 + f(y_0)) = y_0 + f^2(0) < 0,$$

tehát $a < 0$, és így

$$a \leq f(a) < 0,$$

amiből

$$(4) \quad a^2 \geq f^2(a)$$

következik.

Legyen most x tetszőleges valós szám. (3), (1) és (4) felhasználásával kapjuk, hogy

$$(5) \quad x + a^2 \leq a^2 + f(x) \leq f(a^2 + f(x)) = x + f^2(a) \leq x + a^2.$$

Ebben az egyenlőtlenségsorozatban a legkisebb és legnagyobb tag egyenlő, ez csak úgy lehetséges, ha (5)-ben mindenütt az egyenlőség teljesül, tehát minden valós x -re

$$f(x) = x,$$

ezt akartuk bizonyítani.

2. megoldás. Legyen a tetszőleges valós szám; megmutatjuk, hogy f felveszi az a értéket, méghozzá tetszőleges x esetén az $x^2 + f(a - f^2(x))$ helyen.

Alkalmazzuk ugyanis (1)-et $y = a - f^2(x)$ szereposztással:

$$f(x^2 + f(a - f^2(x))) = a - f^2(x) + f^2(x) = a,$$

f tehát valóban felvesz minden valós a értéket. Bebizonyítjuk azt is, hogy ha $y_1 \neq y_2$, akkor $f(y_1) \neq f(y_2)$.

Legyen most is x tetszőleges valós szám, (1)-et kétszer alkalmazzuk:

$$f(x^2 + f(y_1)) = y_1 + f^2(x),$$

$$f(x^2 + f(y_2)) = y_2 + f^2(x).$$

Ha $f(y_1) = f(y_2)$ lenne, akkor ebből az utóbbi két egyenlőség alapján $y_1 = y_2$ következne, ami ellentmondás. f tehát a valós számok halmazát kölcsönösen és egyértelműen képezi le önmagára (azaz bijekció).

Alkalmazzuk most (1)-et az (x, y) és a $(-x, y)$ számpárra:

$$f(x^2 + f(y)) = y + f^2(x),$$

$$f(x^2 + f(y)) = y + f^2(-x).$$

A megfelelő oldalak különbségét véve kapjuk, hogy

$$f^2(x) - f^2(-x) = 0,$$

$$(f(x) - f(-x))(f(x) + f(-x)) = 0.$$

$f(x) = f(-x)$ nem lehetséges, mivel f különböző helyeken különböző értékeket vesz fel, ezért

$$f(x) = -f(-x),$$

tehát f páratlan függvény; ebből már az is következik, hogy $f(0) = 0$. Írjunk ezért (1)-ben x helyébe 0-t:

$$(6) \quad f(f(y)) = y.$$

Belátjuk, hogy az f függvény monoton növekvő, azaz ha $x_1 \leq x_2$, akkor $f(x_1) \leq f(x_2)$. Legyen $x_2 = x_1 + x_0^2$ ($x_0 \geq 0$). (1)-ben $x = x_0$, $y = f(x_1)$ helyettesítéssel (6)-ot felhasználva kapjuk, hogy

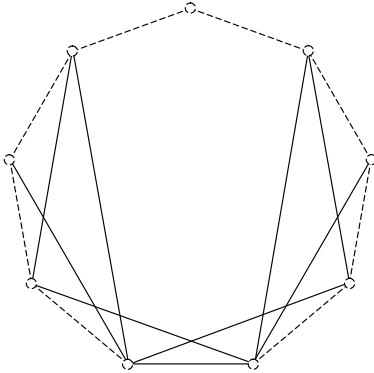
$$f(x_2) = f(x_0^2 + x_1) = f(x_0 + f(f(x_1))) = f(x_1) + f^2(x_0) \geq f(x_1).$$

A monotonitásból már következik, hogy $f(x) = x$. Ha ugyanis feltesszük, hogy $x > f(x)$, akkor a monotonitásból és (6)-ból $f(x) \geq f(f(x)) = x$, azaz $x \leq f(x)$ következne. Ugyanígy, az $x < f(x)$ feltevésből pedig $f(x) \leq f(f(x)) = x$, azaz $x \geq f(x)$ következne, ezért egyedül $f(x) = x$ lehetséges minden valós x -re; (1) egyetlen megoldása ezért $f(x) = x$.

1992/3. Tekintsünk 9 pontot a térben, amelyekből semelyik négy nem fekszik egy síkban. Mindegyik pontpárt összekötjük egy éllel (vagyis egy egyenesszakkasszal), és mindegyik ilyen élt pirosra vagy kékre festünk, vagy pedig színnezetlenül hagyjuk. Határozzuk meg a legkisebb olyan n értéket, amelyre igaz, hogy valahányszor a kiszínezett élek száma pontosan n , mindig teljesül, hogy a kiszínezett élek halmaza szükségképpen tartalmaz egy olyan háromszöget, amelynek mindegyik éle ugyanolyan színű.

Megoldás. Feladatunk a szokásos gráfelméleti fogalmazásban így hangzik: egy 9 csúcsú teljes gráfnak összesen legalább hány élét kell pirosra vagy kékre színezni, hogy bármely színezés mellett legyen a gráfban egyszínű háromszög.

Megmutatjuk, hogy a keresett élszám 33. A 9 csúcsú teljes gráf ugyanis $\binom{9}{2} = 36$ élt tartalmaz, hagyjunk el ebből tetszőleges hármat, és a maradék 33 élt színezzük ki tetszőlegesen két színnel. Ezzel a színezéssel nyilván minden 9 csúcsú gráf megkapható. Válasszunk ki minden elhagyott élen egy csúcsot, hagyjuk el a gráfból ezt a három csúcsot és a belőle induló éleket is.



92/3.1. ábra

A visszamaradt gráfnak 6 csúcsa van, és bármely két csúcsát színezett él köti össze (ún. teljes gráf). Az 1964/4. feladatban bebizonyított (ún. Ramsey-féle) tétel szerint az ilyen gráf mindig tartalmaz egyszínű háromszöget, tehát ugyanez igaz a 9 csúcsú 33 élű gráfra is.

Az 1992/3.1. ábrán bemutatunk egy olyan 9 csúcsú, két színnel színezett 32 élű gráfot, amely nem tartalmaz egyszínű háromszöget, ez azt jelenti, hogy n pontos minimális értéke 33. Ábránkon csak a kék színű élhalmazt rajzoltuk be; meggyőződhetünk, hogy ezek nem alkotnak háromszöget; viszont bármely három

gráfcsúcsot kiválasztva már valamelyik kettőt vagy kék él köt össze, vagy nem köt össze él, tehát nem létezhet a másik színnel sem háromszög. (A teljes gráfból törölt 4 él helyét pontozott vonallal jelöltük.

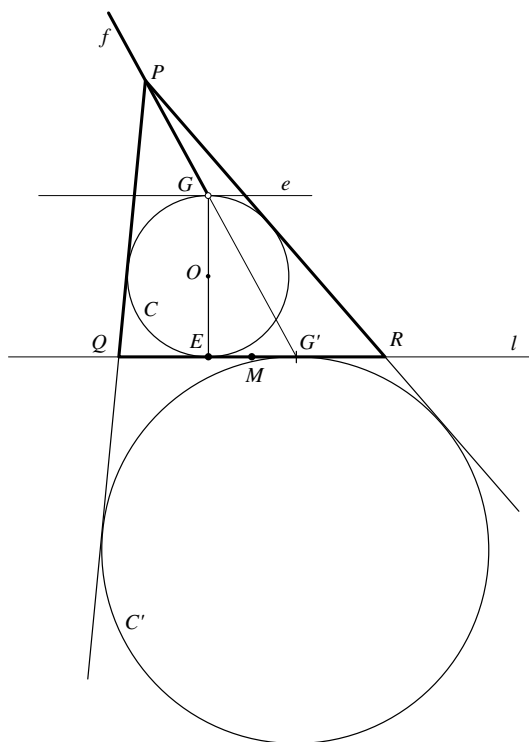
Megjegyzés. A feladat Turán Pál egy nevezetes gráfelméleti tételének felhasználásával tetszőleges pontszámú gráfra is megoldható. Bővebben erről a Kö-MaL 1994/1. számában (18–19. old.).

1992/4. Adott a síkon egy O középpontú C kör, C egy l érintőegyenese és l -nek egy M pontja. Határozzuk meg azoknak a P pontoknak a halmazát, amelyekre teljesül a következő feltétel:

Létezik l -en két pont: Q és R úgy, hogy M a QR szakasz felezőpontja, és C a PQR háromszög beírt köre.

Megoldás. Induljunk ki egy, a feladat feltételeit kielégítő PQR háromszög létezéséből (1992/4.1. ábra). A C kör l -et E -ben érinti, C -nek E -vel átellenes pontja G , a G pontbeli érintőegyenese e .

Nagyítsuk fel a P pontból C -t úgy, hogy a QR oldal külső C' érintőkörébe menjen át. Ez a nagyítás e -t l -be, ezért G -t a C' és l érintési pontjába, G' -be viszi át. Az érintőszakaszok tételéből [19] ismert, hogy $QE = RG' = s - PR$, ahol s PQR területének a fele. (A betűzést úgy választottuk, hogy $PR \geq PQ$ teljesüljön). Ebből következik, hogy E és G' tükrösek M -re (egybe is eshetnek).



92/4.1. ábra

Ábránkon megfigyelhetjük, hogy csupán az eleve adott adatoktól függ az E , M , G' , G pont helyzete, és ennél fogva a GG' egyenes is; a P pont rajta van a GG' egyenesnek G -vel kezdődő és e -nek C -vel ellentétes oldalán levő nyílt f félegyenesén.

Megmutatjuk, hogy f minden pontja lehet P pont. Mivel e -nek C -vel ellentétes oldalán van, a P -ből C -hez húzott két érintő metszi e -t, és ezért l -et is egy Q és R pontban. A szerkesztés szerint C a PQR háromszög beírt köre, s mivel az előzőek szerint PG és l metszéspontja, G' , a hozzáírt kör érintési pontja, $QE = G'R$ és OM a GEG' középvonala, ezért M felezi EG' -t és így a QR oldalt is.

A keresett ponthalmaz tehát azonos az f nyílt félegyenes pontjaival.

1992/5. Legyen S a háromdimenziós tér pontjainak egy véges részhalmaza. Jelölje S_x , S_y , illetve S_z rendre az S pontjainak az yz -, xz -, xy koordinátasíkokon levő merőleges vetületeiből álló halmazokat.

Bizonyítsuk be, hogy

$$|S|^2 \leq |S_x| |S_y| |S_z|,$$

ahol $|A|$ a véges A halmaz elemszámát jelöli.

Megjegyzés. Egy pontnak egy síkra való merőleges vetületén a pontból a síkra bocsátott merőlegesnek a talppontját értjük.

Megoldás. Rövidség kedvéért legyen az S, S_x, S_y, S_z halmaz elemeinek a száma rendre n, a, b, c . A bizonyítandó

$$(1) \quad n^2 \leq abc$$

állítást n szerinti teljes indukcióval igazoljuk.

Ha $n = 1 = a = b = c$, (1) valóban fennáll. Tegyük fel, hogy az állítás igaz minden olyan S halmazra, amelynek a számossága kisebb n -nél, és legyen most $|S| = n$. Ha S pontjai egy síkban vannak, válasszunk olyan koordinátasíkot — mondjuk az xy síkot —, amely nem párhuzamos S pontjainak a síkjával. Ha S pontjai nincsenek egy síkon, válasszunk egy olyan xy -síkkal párhuzamos síkot, amely S pontjait két nem üres részhalmazra vágja szét: S_1 -re és S_2 -re; ezek pontjainak száma n_1 és n_2 ; természetesen $n_1 + n_2 = n$. Legyen S_1 , ill. S_2 vetületi pontjainak a száma az yz -, zx -, xy -koordinátasíkon rendre

$$a_1, b_1, c_1, \quad \text{illetve} \quad a_2, b_2, c_2.$$

Ezekre fennállnak a következő összefüggések:

$$a_1 + a_2 = a, \quad b_1 + b_2 = b, \quad c_1 \leq c, \quad c_2 \leq c.$$

Mivel $n_1 < n$ és $n_2 < n$, az indukciós feltevés értelmében

$$n_1^2 \leq a_1 b_1 c_1 \quad \text{és} \quad n_2^2 \leq a_2 b_2 c_2.$$

Ebből

$$\begin{aligned} n^2 &= (n_1 + n_2)^2 \leq \left(\sqrt{a_1 b_1 c_1} + \sqrt{a_2 b_2 c_2} \right)^2 \leq \\ &\leq \left(\sqrt{a_1 b_1 c} + \sqrt{a_2 b_2 c} \right)^2 = c \left(\sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2} \right)^2. \end{aligned}$$

Alkalmazzuk erre a Cauchy-féle egyenlőtlenséget [22]:

$$n^2 \leq c(a_1 + a_2)(b_1 + b_2) = abc,$$

ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

Megjegyzés. Egyenlőtlenségünkben egyenlőség is állhat, pl. ha a pontok a z -tengellyel párhuzamos egyenesen vannak.

1992/6. Ha n pozitív egész szám, jelölje $S(n)$ a legnagyobb olyan egész számot, amelyre igaz, hogy minden pozitív egész k -ra, amelyre $k \leq S(n)$, n^2 felírható k darab pozitív négyzetszám összegeként.

(a) Bizonyítsuk be, hogy $S(n) \leq n^2 - 14$ minden $n \geq 4$ -re.

(b) Adjunk meg egy olyan n egész számot, amelyre $S(n) = n^2 - 14$.

(c) Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan n egész szám van, amelyre $S(n) = n^2 - 14$.

Megoldás. Hogy világosabb legyen számunkra az $S(n)$ jelentése, legyen pl. $n = 13$. Ebben az esetben $S(13)$ azt a legnagyobb pozitív egészet jelenti, amelyre igaz, hogy $13^2 = 169$ előállítható $1, 2, 3, \dots, S(13)$ darab négyzetszám összegeként. (Négyzetszámon itt és a továbbiakban pozitív négyzetszámot értünk.) Pl. könnyen beláthatjuk, hogy $S(13) \geq 12$, mert $13^2 = 169$ felírható $1, 2, \dots, 12$ négyzetszám összegeként az alábbi módon:

$$\begin{aligned}(1) \quad 169 &\stackrel{1}{=} 13^2 \stackrel{2}{=} 5^2 + 12^2 \stackrel{3}{=} 3^2 + 4^2 + 12^2 \stackrel{4}{=} 4^2 + 5^2 + 2 \cdot 8^2 \stackrel{5}{=} 5^2 + 4 \cdot 6^2 \stackrel{6}{=} \\ &\stackrel{6}{=} 3^2 + 4^2 + 4 \cdot 6^2 \stackrel{7}{=} 5 \cdot 4^2 + 5^2 + 8^2 \stackrel{8}{=} 4 \cdot 3^2 + 5^2 + 3 \cdot 6^2 \stackrel{9}{=} 4^2 + 5 \cdot 3^2 + 3 \cdot 6^2 \stackrel{10}{=} \\ &\stackrel{10}{=} 9 \cdot 4^2 + 5^2 \stackrel{11}{=} 3^2 + 10 \cdot 4^2 \stackrel{12}{=} 1^2 + 4 \cdot 2^2 + 5 \cdot 4^2 + 2 \cdot 6^2;\end{aligned}$$

(az egyenlőség feletti számok az előállításban szereplő négyzetszámok számát jelentik).

Térjünk most rá a feladat három részének a megoldására.

(a) Az állítás igazolására elegendő megmutatnunk, hogy ha $n \geq 4$, n^2 nem állítható elő $n^2 - 13$ négyzetszám összegeként. Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy n^2 felírható $n^2 - 13$ négyzetszám összegeként.

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n^2-13}^2 = n^2$$

alakban, ahol az a_i -k pozitív egészek. Ezt átrendezve az

$$(2) \quad (a_1^2 - 1) + (a_2^2 - 1) + \dots + (a_{n^2-13}^2 - 1) = 13$$

egyenlőséget kapjuk. A zárójelen belüli számok nem negatívak, ezért $a_i^2 - 1 \leq 13$, tehát $a_i^2 - 1$ lehetséges értékei: 0, 3 vagy 8. (2)-ben a 8-asok száma csak 0 vagy 1 lehet, mivel $2 \cdot 8$ már nagyobb 13-nál. Ha (2)-ben nincs 8-as, a bal oldal osztható 3-mal, ami lehetetlen. Ha (2)-ben egy 8-as van, a bal oldali összeg $3s + 2$ alakú, ami nem lehet egyenlő 13-mal, (2) tehát nem állhat fenn; ezzel az (a) állítást bizonyítottuk.

(b) Megmutatjuk, hogy $n = 13$ megfelelő, mert $S(13) = 13^2 - 14 = 155$. Mivel az (a) részben bebizonyítottuk, hogy $S(13) \leq 13^2 - 14 = 155$, elég megmutatnunk, hogy 169 előáll $1, 2, 3, \dots, 155$ négyzetszám összegeként, azaz

$$169 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2,$$

ahol a_i pozitív egész, és k lehetséges értékei: $1, 2, \dots, 155$.

A (2) előállításához hasonlóan írjuk fel ezt az előállítást

$$(3) \quad (a_1^2 - 1) + (a_2^2 - 1) + \dots + (a_k^2 - 1) = 169 - k$$

alakban. Mivel $a_i^2 - 1 < 169$, $a_i^2 - 1$ szóbaeső értékei:

$$(4) \quad 0, 3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, 99, 120, 143, 168.$$

(3)-ban először $(a_1^2 - 1)$ értékét választjuk meg, méghozzá úgy, hogy $a_1^2 - 1$ az a legnagyobb egész legyen, amelyre

$$a_1^2 - 1 \leq 155 - k$$

teljesül. Foglaltuk táblázatba $a_1^2 - 1$ értékeit:

$a_1^2 - 1$	a_1	$169 - k$	k
0	1^2	$14 \leq 169 - k \leq 16$	$153 \leq k \leq 155$
3	2^2	$17 \leq 169 - k \leq 21$	$148 \leq k \leq 152$
8	3^2	$22 \leq 169 - k \leq 28$	$141 \leq k \leq 147$
15	4^2	$29 \leq 169 - k \leq 37$	$132 \leq k \leq 140$
24	5^2	$38 \leq 169 - k \leq 48$	$121 \leq k \leq 131$
35	6^2	$49 \leq 169 - k \leq 61$	$108 \leq k \leq 120$
48	7^2	$62 \leq 169 - k \leq 76$	$93 \leq k \leq 107$
63	8^2	$77 \leq 169 - k \leq 93$	$76 \leq k \leq 92$
80	9^2	$94 \leq 169 - k \leq 112$	$57 \leq k \leq 75$
99	10^2	$113 \leq 169 - k \leq 133$	$36 \leq k \leq 56$
120	11^2	$134 \leq 169 - k \leq 156$	$13 \leq k \leq 35$
143	12^2	$157 \leq 169 - k \leq 168$	$1 \leq k \leq 12$

a_1 fenti megválasztása után a többi a_i -t úgy kell megválasztani, hogy

$$(a_2^2 - 1) + (a_3^2 - 1) + \dots + (a_k^2 - 1) = 169 - k - (a_1^2 - 1)$$

teljesüljön. a_1 választása miatt $14 \leq 169 - k - (a_1^2 - 1) \leq 36$, ezért a továbbiakban ezt a 14 és 36 közé eső számot kell $a^2 - 1$ alakú számok összegeként felírunk. Ez természetesen többféle módon is lehetséges. Pl.: ha $169 - k - (a_1^2 - 1)$ osztható 3-mal, akkor írjuk fel legfeljebb 12 darab 3-as összegeként; ha $3l + 1$ alakú, akkor 2 darab 8-as és legfeljebb 6 darab 3-as összegeként; ha pedig $3l + 2$ alakú, akkor 1 darab 8-as és legfeljebb 9 darab 3-as összegeként.

Így $169 - k - (a_1^2 - 1)$ -et legfeljebb 12 darab $a^2 - 1$ alakú szám összegeként írtuk fel. Ha $k \geq 13$, a többi tagot nullának választva megoldást adtunk (3)-ra; megmutattuk tehát, hogy 169 felírható 13, 14, ..., 155 pozitív négyzetszám összegeként; hogy viszont 1, 2, ..., 12 négyzetszám összegeként is előáll, már a bevezetőben is megmutattuk.

Ezzel igazoltuk, hogy $n = 13$ kielégíti a feladat (b) feltételét.

(c) Ehhez megmutatjuk, hogy ha $S(n) = n^2 - 14$, ($n \geq 8$), akkor $S(2n) = (2n)^2 - 14$. Ebből ugyanis teljes indukcióval már következik feladatunk állítása, mivel bármely nemnegatív egész m -re $n = 13 \cdot 2^m$ is megfelelő.

$m = 0$ -ra (azaz $n = 13$ -ra) $S(n) = n^2 - 14$ teljesülését a (b) részben igazoltuk; ha viszont bevezető állításunk igaz, akkor $n = 2 \cdot 13 \cdot 2^m = 13 \cdot 2^{m+1}$ is megfelelő.

Tegyük fel, hogy $S(n) = n^2 - 14$. Belátjuk, hogy $4n^2$ minden olyan k -ra, amely kielégíti az $1 \leq k \leq 4n^2 - 14$ feltételt, felírható k darab pozitív négyzet-szám összegeként; ebből (a) alapján már következik, hogy

$$S(2n) = 4n^2 - 14.$$

Legyen először

$$(5) \quad 1 \leq k \leq n^2 - 14.$$

Ebben az esetben n^2 -et fel tudjuk írni k darab pozitív négyzetszám összegeként; ha ebben a felbontásban mindegyik négyzetszámot megszorozzuk 4-gyel, $4n^2$ egy felbontását kapjuk.

Legyen most k_1, k_2, k_3, k_4 négy, $n^2 - 14$ -nél nem nagyobb pozitív egész. Feltételünk szerint n^2 -et felbonthatjuk rendre k_1, k_2, k_3, k_4 darab négyzetszám összegére:

$$\begin{aligned} n^2 &= a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{k_1}^2, & n^2 &= b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_{k_2}^2, \\ n^2 &= c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_{k_3}^2, & n^2 &= d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_{k_4}^2. \end{aligned}$$

Ezeket összegezve $4n^2$ -nek $k_1 + k_2 + k_3 + k_4$ négyzetszám összegére való felbontását kapjuk:

$$4n^2 = a_1^2 + \dots + a_{k_1}^2 + b_1^2 + \dots + b_{k_2}^2 + c_1^2 + \dots + c_{k_3}^2 + d_1^2 + \dots + d_{k_4}^2,$$

itt a $k_1 + k_2 + k_3 + k_4$ összegre a

$$(6) \quad 4 \leq k \leq 4(n^2 - 14) = 4n^2 - 56$$

feltétel teljesül.

Végül bontsuk fel n^2 -et rendre $1, 2, \dots, n^2 - 14$ négyzetszám összegére, és minden felbontáshoz adjunk hozzá $3n^2$ darab 1^2 -et. Ezzel $4n^2$ -nek olyan felbontását kapjuk, amelyben a tagok száma

$$(7) \quad 3n^2 + 1 \leq k \leq 4n^2 - 14.$$

Vegyük még észre, hogy ha $n \geq 8$, akkor $4 < n^2 - 14$ és $3n^2 + 1 < 4n^2 - 56$, ezért minden olyan k -ra, amelyre

$$1 \leq k \leq 4n^2 - 14,$$

az (5), (6), (7) feltételek egyike megfelelő, és így valamelyik előállítási módszer is használható.

Ezzel a feladat állításait bizonyítottuk.

1993.

1993/1. Legyen $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$, ahol $n > 1$ egész szám. Bizonyítsuk be, hogy $f(x)$ nem írható fel két legalább elsőfokú polinom szorzataként, ahol mindkét polinom együtthatói egész számok.

1. megoldás. A feladat állításával ellentétében tegyük fel, hogy $f(x)$ felírható két polinom szorzataként $f(x) = g(x)h(x)$ alakban, ahol

$$g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

$$h(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0,$$

ezekben az együtthatók egészek (természetesen nullák is lehetnek). $f(x)$ és $g(x)h(x)$ együtthatóinak az összevetéséből következik, hogy

$$(1) \quad a_0 b_0 = 3,$$

$$(2) \quad a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0,$$

$$(3) \quad a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 = 0,$$

$$a_3 b_0 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_0 b_3 = 0,$$

⋮

$$a_{n-2} b_0 + a_{n-3} b_1 + a_{n-4} b_2 + \dots + a_1 b_{n-3} + a_0 b_{n-2} = 0.$$

(1)-ből következik, hogy a_0 vagy b_0 értéke 3 vagy -3 ; feltehetjük, hogy a g és h polinomokat úgy választottuk, hogy $a_0 = 3$ legyen, ekkor $b_0 = 1$. Ezeket (2)-be helyettesítve kapjuk, hogy a_1 osztható 3-mal; ezt figyelembe véve viszont következik, hogy a_2 is osztható 3-mal, majd hasonló módon nyerjük, hogy az a_3, a_4, \dots, a_{n-2} együtthatók is oszthatók 3-mal.

Mivel a feladat feltétele szerint $h(x)$ legalább elsőfokú, a_n -nek 0-nak kell lennie, különben a $g(x)h(x)$ szorzat $f(x)$ -nél magasabb fokú lenne. $a_{n-1} = 0$ nem lehetséges, mert akkor előbbi eredményünk szerint $g(x)$ minden együtthatója osztható lenne 3-mal, tehát minden egész helyen 3-mal osztható egész lenne az értéke, és ugyanez teljesülne $f(x)$ -re is. Viszont $f(2) = 7 \cdot 2^{n-1} + 3$, ami nyilván nem osztható 3-mal, tehát $a_{n-1} \neq 0$, $g(x)$ ezért $(n-1)$ -edfokú polinom; ebből viszont az következik, hogy $h(x)$ elsőfokú, tehát $h(x) = b_1 x + 1$; az együtthatók összehasonlításából ismét következik, hogy $a_{n-1} b_1 = 1$, tehát $|b_1| = 1$, azaz $h(1) = 0$ vagy 2, tehát páros. Viszont $f(1) = 9$ páratlan, ami ellentmondás, tehát $f(x)$ kívánt szorzattá bontása nem létezik.

2. megoldás. Tegyük fel ismét, hogy az állítással ellentétben léteznék egy $f(x) = g(x)h(x)$ felbontás, ahol g és h legalább elsőfokú egész együtthatós polinomok; feltehetjük továbbá, hogy $g(x)$ főegyütthatója (a legmagasabbfokú tag együtthatója) — és ezért $h(x)$ együtthatója is — 1-gyel egyenlő, tehát

$$g(x) = x^k + a_{k-1} x^{k-1} + a_{k-2} x^{k-2} + \dots + a_1 x + a_0.$$

$f(x)$ és $g(x)h(x)$ együttthatóinak az összehasonlításából következik, hogy az állandó tagok szorzata 3, azaz $|g(0)||h(0)| = 1 \cdot 3$, ezért feltehetjük, hogy

$$(4) \quad |a_0| = |g(0)| = 1.$$

$k = 1$ nem lehetséges, mert akkor $g(x) = x \pm 1$ alakú lenne, tehát 1 vagy -1 gyöke lenne $g(x)$ -nek, tehát $f(x)$ -nek is, ami azonban nem áll fenn, ezért

$$(5) \quad k > 1.$$

Legyenek $g(x)$ gyökhelyei az $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ komplex számok, (ezek egyúttal $f(x)$ -nek is gyökhelyei), így

$$(6) \quad g(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_k).$$

(4)-ből következik, hogy

$$(7) \quad |g(0)| = |\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k| = 1.$$

Mivel $f(\alpha_i) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, k$),

$$\alpha_i^n + 5\alpha_i^{n-1} = -3,$$

$$(8) \quad \alpha_i^{n-1}(\alpha_i + 5) = -3.$$

Képezzük a (8) típusú egyenlőségeket $i = 1, 2, \dots, k$ esetben, majd szorozzuk össze ezek megfelelő oldalait:

$$(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k)^{n-1} (\alpha_1 + 5)(\alpha_2 + 5) \dots (\alpha_k + 5) = (-3)^k,$$

viszont (7)-re való tekintettel ebből

$$|(\alpha_1 + 5)(\alpha_2 + 5) \dots (\alpha_k + 5)| = 3^k$$

következik. Ez (6) alapján azt jelenti, hogy

$$|g(-5)| = |(\alpha_1 + 5)(\alpha_2 + 5) \dots (\alpha_k + 5)| = 3^k.$$

Viszont

$$g(-5)h(-5) = f(-5) = (-5)^n + 5(-5)^{n-1} + 3 = (-5)^{n-1}(-5 + 5) + 3 = 3,$$

$$3^k |h(-5)| = 3, \quad 3^{k-1} |h(-5)| = 1,$$

ami (5) miatt lehetetlen, hiszen $h(-5)$ egész szám. A szorzattábonítás ezek szerint nem létezik; a feladat állítását bizonyítottuk.

1993/2. Legyen D az ABC hegyesszögű háromszög olyan belső pontja, amelyre

$$(1) \quad \angle ADB = \angle ACB + 90^\circ$$

és

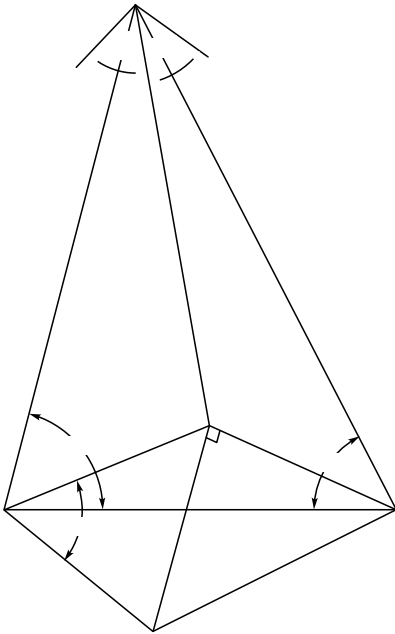
$$(2) \quad AC \cdot BD = AD \cdot BC.$$

teljesül.

(a) Határozzuk meg az $\frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}$ hányados értékét.

(b) Bizonyítsuk be, hogy az ACD , ill. a BCD háromszög körülírt köréhez a C pontban húzott érintők merőlegesek.

1. megoldás. A feladat két része csak lazán függ össze; a (b) rész bizonyításához a (2) feltétel nem szükséges.



93/2.1. ábra

Legyen $\angle CAD = \alpha'$, $\angle CBD = \beta'$; a szokásos jelölések használata mellett vezessük be még az $AD = a'$, $BD = b'$, $CD = c'$ jelöléseket (1993/2.1. ábra). Foglalkozunk először a (b) résszel.

(b) Az ABD háromszögben a szögek összege:

$$180^\circ = \alpha - \alpha' + \beta - \beta' + \gamma + 90^\circ,$$

$$(3) \quad \text{azaz} \quad \alpha' + \beta' = 90^\circ.$$

A kerületi szögek tételéből következik, hogy ha a CD szakasz A -val ellentétes oldalára C -ben felmérjük az α' szöget, az ACD köré írt kör C -beli érintőjét kapjuk. Hasonlóan: ha a CD szakasz B -vel ellentétes oldalára C -ben felmérjük a β' szöget, a BCD háromszög köré írt kör C -beli érintőjét kapjuk. A két érintő egymással bezárt szöge $\alpha' + \beta'$, ami (3) miatt 90° -kal egyenlő; a (b) részt ezzel bebizonyítottuk.

(a) Alkalmazzunk az ABC háromszögre A középpontú α' szögű $\frac{a'}{b}$ arányú forgatva nyújtást, amely AC -t AD -be viszi át. Ennek hatására D képe D' és így $\angle ADD' = \gamma$, $\angle DAD' = \alpha$.

A (2) feltétel jelöléseink szerint

$$(4) \quad bb' = aa'.$$

Mivel DD' a CB szakasz képe, $DD' = a \cdot \frac{a'}{b} = \frac{bb'}{b} = b'$ és $\angle BDD' = 90^\circ$, a DD' egyenlő szárú derékszögű háromszög, és így $BD' = b'\sqrt{2}$. Minthogy $\angle DAD' = \alpha$; azért $\angle BAD' = \alpha'$. Az előbbi forgatva nyújtás az $AB = c$ szakaszt az AD' szakaszba viszi, ezért $AD' = \frac{ca'}{b}$.

Ebből következik, hogy a CAD és BAD' hasonló háromszögek, mert meg-
egyeznek α' szögükben és az ezt közrefogó oldalak arányában. BAD' a CAD -
ból $\frac{c}{b}$ arányú hasonlósággal nyerhető, ezért

$$BD' = \frac{c}{b} \cdot CD = \frac{cc'}{b} = b'\sqrt{2}, \quad \text{ebből} \quad \frac{cc'}{bb'} = \sqrt{2},$$

vagy jelöléseink szerint

$$\frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD} = \sqrt{2},$$

amivel választ adtunk az (a) alatt feltett kérdésre.

2. megoldás. (Csak az (a) feladatrészre.) A D pontból a háromszög AB , BC , CA oldalaira állított merőlegesek talppontjai legyenek rendre a C' , A' , B' belső pontok. (Használjuk az 1993/2.1. és 1993/2.2. ábrák jelöléseit.) Mivel $AC'DB'$ húrnégyszög, a kerületi szögek egyenlőségéből következik, hogy $DC'B' \sphericalangle = \alpha'$; hasonló okokból: $DC'A' \sphericalangle = \beta'$, ezért (3) miatt

$$B'C'A' \sphericalangle = \alpha' + \beta' = 90^\circ,$$

tehát a $B'C'A'$ háromszög derékszögű.

Az $AC'DB'$ húrnégyszög köré írt kör átmérője a' , ezért

$$B'C' = a' \sin \alpha.$$

Ha ABC köré írt körének átmérője: $2R = 1$, akkor $a = \sin \alpha$, és így

$$B'C' = aa'.$$

Hasonló módon kapjuk, hogy $C'A' = bb'$, $A'B' = cc'$. A (2) feltétel (4) alatti alakjából következik, hogy

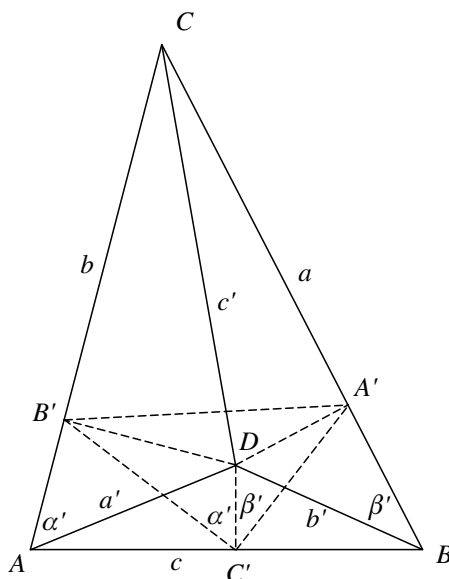
$$B'C' = C'A',$$

ez azt jelenti, hogy $B'C'A'$ egyenlő szárú derékszögű háromszög. Ennélfogva átfogója: $A'B' = C'A' \sqrt{2}$, vagy előbbi eredményünk szerint $cc' = bb' \sqrt{2}$, ebből

$$\frac{cc'}{bb'} = \frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD} = \sqrt{2}.$$

3. megoldás. Ebben a megoldásban inverziót alkalmazunk; ennek segítségével rá tudunk mutatni a feladat (a) és (b) része közötti szorosabb kapcsolatra és a feladat valószínű eredetére is.

Felhasználjuk az inverzió következő tulajdonságát: ha az O középpontú, R sugarú körre vonatkozó inverzió az X és Y pontoknak az X' , ill. Y' pontokat felelteti meg, akkor — ha X , Y , O nincsenek egy egyenesen — az OXY és



93/2.2. ábra

$OY'X'$ háromszögek hasonlóak, és így

$$OXY \sphericalangle = OY'X' \sphericalangle \quad \text{és} \quad OYX \sphericalangle = OX'Y' \sphericalangle,$$

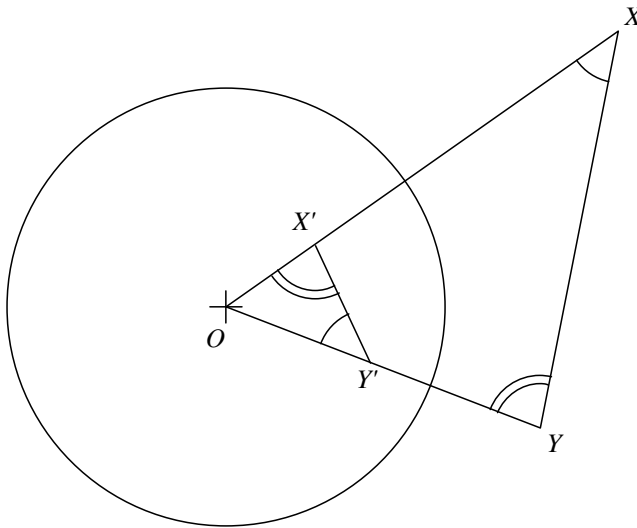
továbbá

$$(5) \quad X'Y' = \frac{R^2 \cdot XY}{OX \cdot OY}.$$

Ez abból következik, hogy $OX \cdot OX' = OY \cdot OY' = R^2$, és ezért

$$\frac{OX}{OY} = \frac{OY'}{OX'}, \quad (1993/2.3. \text{ ábra})$$

az OXY és $OY'X'$ háromszögek tehát megegyeznek egy szögükben és a szöget



93/2.3. ábra

közrefogó oldalak arányában, ezért hasonlóak, és szögeik is rendre egyenlők. A hasonlóság következménye, hogy

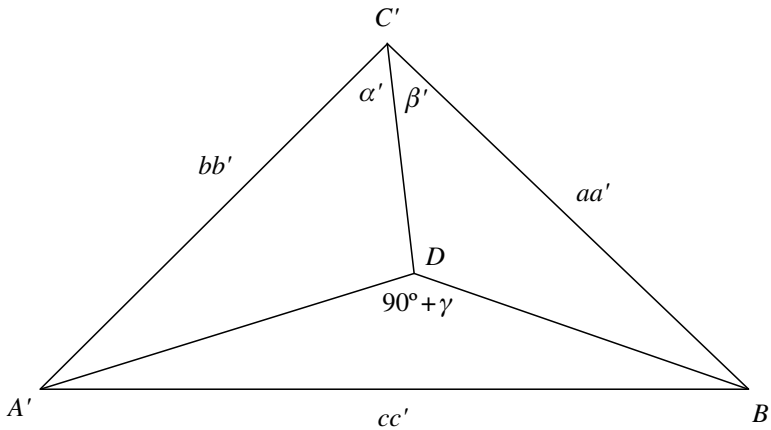
$$\frac{X'Y'}{XY} = \frac{OX'}{OY}, \quad \text{azaz} \quad X'Y' = \frac{OX' \cdot XY}{OY},$$

ha viszont ebben az

$$OX' = \frac{R^2}{OX}$$

helyettesítést elvégezzük, éppen az (5) összefüggést kapjuk. (5) természetesen akkor is fennáll, ha O, X, Y egy egyenesbe esnek.

Alkalmazzunk most az 1993/2.1. ábrán jelölt A, B, C ponthármasra D középpontú $R = \sqrt{a'b'c'}$ sugarú inverziót. Előző megjegyzésünk szerint ez olyan A' ,



93/2.4. ábra

B' , C' ponthármasba megy át, amelyre

$$A'B' = cc', \quad B'C' = aa', \quad C'A' = bb'$$

teljesül (1993/2.4. ábra). Az 1993/2.1. ábra jelöléseit használva az előzőek szerint

$$\alpha' = \angle DAC' = \angle DC'A' \quad \text{és} \quad \beta' = \angle DBC' = \angle DC'B'.$$

Ebből következik, hogy $\angle A'C'B' = \alpha' + \beta'$ és az előző megoldásokban bizonyítottak szerint $\alpha' + \beta' = 90^\circ$, az $A'C'B'$ háromszög derékszögű, és egyenlő szárú, ezért

$$\frac{cc'}{bb'} = \frac{A'B'}{C'A'} = \sqrt{2}.$$

Az ACD , ill. BCD köröket az inverzió az $A'C'$, ill. $B'C'$ egyenesekbe viszi át. Mivel az inverzió szögtartó és $A'C'$, $B'C'$ merőlegesek, ezért merőlegesen metszik egymást az ACD és BCD körök is, ami éppen azt jelenti, hogy a közös C -pontbeli érintők merőlegesek egymásra: ez a (b) alatti bizonyítandó.

Látjuk tehát, hogy az (a) és (b) alatti feltételek szorosabb kapcsolatára éppen az inverzió mutat rá.

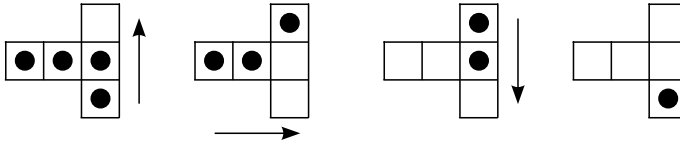
1993/3. Egy végtelen sakktáblán a következő játékot játszunk.

A kiinduló állásban n^2 báb van elhelyezve a sakktáblán egy szomszédos mezőkből álló $n \times n$ -es négyzetben, minden mezőn egy báb áll. A játék egy lépése abban áll, hogy amennyiben egy báb mellett vízszintes vagy függőleges irányban a közvetlenül szomszédos mezőn áll báb, a rákövetkező mező pedig üres, a báb átugorja a szomszéd mezőn álló bábot, és az üres mezőre érkezik. Az átugrott bábot ezután levesszük a tábláról.

Határozzuk meg n azon értékeit, amelyekre elérhető, hogy végül csak egy báb maradjon a táblán.

Megoldás. Megmutatjuk, hogy a feladat célkitűzése akkor és csakis akkor érhető el, ha n nem osztható 3-mal, azaz $3k + 1$, illetve $3k + 2$ alakú. Ehhez először két speciális esetet nézzünk meg.

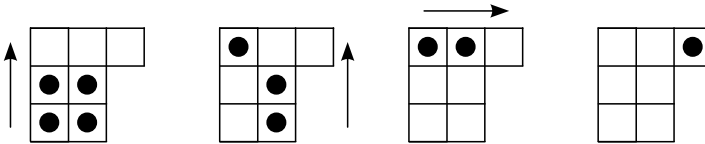
Az a) esetben nézzünk egy 3×1 -es téglalapot, amelynek az egyik szélső



93/3.1. ábra

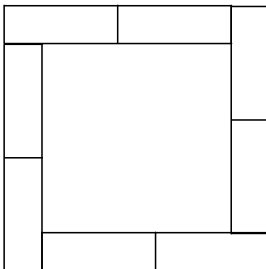
mezőjéhez még csatlakozik mindkét oldalán egy-egy mező, és bennük összesen négy báb helyezkedik el úgy, hogy a 3×1 -es téglalaphoz illeszkedő egyik mező üres. Az 1993/3.1. ábrán látható módon elérhető, hogy az eredeti 3×1 -es téglalap kiürüljön, ehhez 3 lépés szükséges (a bábok helyét egy nagy ponttal, az ugrásokat pedig egy nyíllal jelöltük). Ezt úgy is fogalmazhatjuk, hogy egy 3×1 -es téglalap kiüríthető, ha csatlakozik hozzá az előbbi módon egy üres és egy bábos mező.

A b) esetben nézzünk egy bábokkal teli 2×2 -es négyzetet, és tegyük fel, hogy a négyzethez csatlakozik az 1993/3.2. ábrán látható módon 3 üres mező.



93/3.2. ábra

Ebben az esetben a négyzet 3 lépésben kiüríthető, az egyetlen megmaradó bábu az egyik üres mezőre kerül.



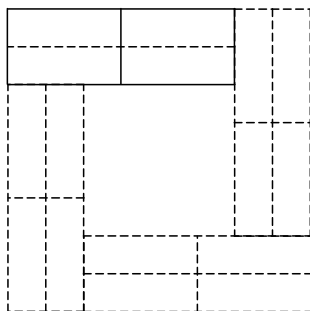
93/3.3. ábra

Most teljes indukcióval bizonyítjuk be, hogy $n = 3k + 1$ és $n = 3k + 2$ esetben elérhető, hogy csak egy báb maradjon a mezőn.

Ha $n = 1$, az állítás nyilvánvaló, ha $n = 2$, a b) eset szerint állításunk ekkor is igaz. Tegyük fel, hogy bizonyítottuk állításunkat minden n -nél kisebb négyzetoldalú mezőre.

Ha $n = 3k + 1$, az $n \times n$ -es bábokkal lefedett négyzet szélét körbefogjuk 3×1 -es téglalapokkal az 1993/3.3-as ábrán látható módon. Az a) esetben leírtak szerint ezeket a téglalapokat „bábtalanítjuk”, ezzel egy $3k + 1 - 2 = 3(k - 1) + 2$

oldalú négyzetet kapunk, ami az indukciós feltevés szerint már kiüríthető úgy, hogy rajta csak egy báb maradjon.



93/3.4 ábra

Ha $n = 3k + 2$, akkor az $n \times n$ -es négyzetnek az 1993/3.4. ábrán látható módon 3×2 -es téglalapokkal szeghetjük be, ezeket a téglalapokat viszont az a)-beli módszerrel 3×1 -es téglalapokra bontva üríthetjük ki, így $3k + 2 - 4 = 3(k - 1) + 1$ oldalú bábokkal fedett négyzethez jutunk, ami az indukciós feltevés szerint már kiüríthető úgy, hogy rajta csak egy báb maradjon; ezzel a teljes indukciós bizonyításunkat befejeztük.

Végül bebizonyítjuk, hogy a $3k \times 3k$ méretű négyzetnél nem érhető el, hogy rajta csak egy báb maradjon. Bontsuk fel most a végtelen sakktablát 3×3 -as négyzetekre, és mindegyik mezőit számozzuk meg az alábbi módon:

↓			
0	1	2	
1	2	0	
2	0	1	

0			0
1	2	0	
2	0	1	

Rakjunk most rá a sakktabla egy $3k \times 3k$ -s négyzetére bábuakat. A 0-s, az 1-es és 2-es mezőkön lévő bábuok száma nyilván egyenlő lesz. Hajtsunk most végre egy lépést, ezzel két mezőről eltűnnek a bábuok, viszont báb kerül egy olyan mezőre, amelyen eddig nem volt. Ha pl. táblázatunk nyíllal jelölt 1-es mezőjéről jobbra indulunk, akkor egy 1-es és egy 2-es mezőről eltűnik egy-egy bábu, egy 0-s mezőn viszont egy új helyzetű bábu jelenik meg. Ez azt jelenti, hogy bárholn is indulunk el a végrehajtható lépéssel, a 0-s, 1-es, 2-es „talpszámmal” rendelkező bábuok száma 1-gyel változik (két esetben csökken, egy esetben nő), s mivel kezdetben azonos számú bábu állt minden típusú mezőn, az azonos talpszámmal rendelkező bábuok számának a paritása mindig meg fog egyezni. Ezért nem lehet, hogy csak egyetlen egy bábu maradjon fenn, pl. egy 0-s mezőn, mert

akkor páratlan számú bábnak kell állnia az 1-es és a 2-es mezőkön is, tehát a lépések nem vezethetnek el oda, hogy a táblán mindössze egyetlen báb maradjon.

Állításunkat ezzel igazoltuk.

1993/4. Jelölje a sík három P , Q , R pontjára $m(PQR)$ a PQR háromszög magasságainak minimumát (amennyiben P , Q , R egy egyenesen van, legyen $m(PQR)=0$).

Legyenek adottak az A , B , C pontok a síkon. Bizonyítsuk be, hogy a sík tetszőleges X pontjára

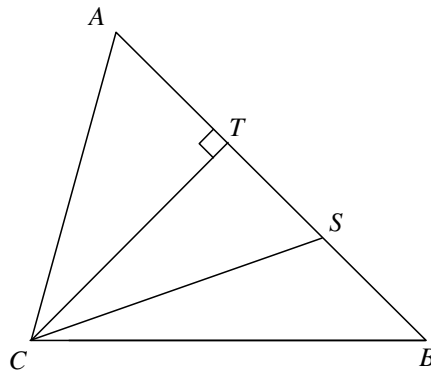
$$m(ABC) \leq m(ABX) + m(AXC) + m(XBC).$$

Megoldás. A következőkben egy szakaszhalmaz „leghosszabb szakasza” jellegű kifejezéssel a szakaszhalmaz leghosszabb szakaszainak egyikét kívánjuk megjelölni.

Felhasználjuk a következő segédítélet: ha az S pont az AB szakasz belső pontja, akkor $m(ABC) \geq m(ASC)$.

Ennek bizonyításához elegendő megmutatnunk, hogy $m(ABC)$ nem kisebb az ASC háromszög valamelyik magasságánál, hiszen akkor nem kisebb annak legkisebb magasságánál sem.

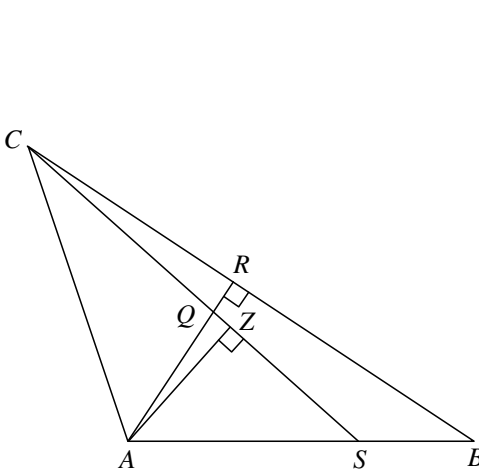
Tegyük fel először, hogy az ABC -nek AB a leghosszabb oldala (1993/4.1. ábra). Minthogy a háromszög legkisebb magassága a legnagyobb oldalra merőle-



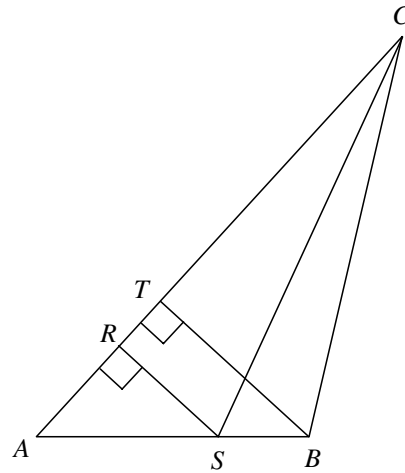
93/4.1. ábra

ges, az ABC legrövidebb magassága a C -ből induló CT magasság, ez egyúttal az ASC magassága is, ezért az állítás ebben az esetben igaz.

Legyen most BC az ABC leghosszabb oldala. Az ABC legrövidebb magasságának, AR -nek az egyenese CS -t metszi egy Q pontban, mert CS elválasztja A -t BC -től (1993/4.2. ábra). ASC A -hoz tartozó magasságának a talponti pontja legyen Z . Az AZQ derékszögű háromszögből $AZ < AQ < AR$, ami ismét állításunkat bizonyítja.



93/4.2. ábra



93/4.3. ábra

Végül, ha AC az ABC leghosszabb oldala, akkor BT a legkisebb magassága, és S -ből az AC -re állított merőlegesre $SR < BT$. Ezért (1993/4.3. ábra)

$$m(ASC) = SR < BT = m(ABC).$$

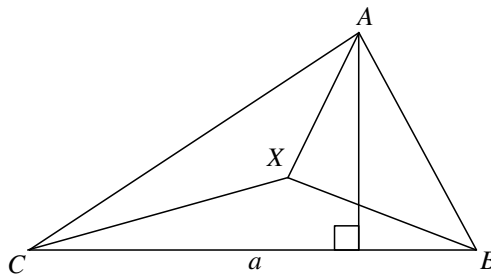
Tételünket most három részletben bizonyítjuk attól függően, hogy az X pont az ABC háromszög

1. belsejében vagy határán;
2. a hozzáírt köröket tartalmazó síkrészekben, az ún. U -tartományban;

vagy pedig

3. a háromszög szögeinek csúcshögeit tartalmazó, ún. V -tartományban helyezkedik el.

1. Legyen X az ABC belsejében vagy határán, és tegyük fel, hogy a szokásos jelöléseket használva $a \geq b \geq c$ (1993/4.4. ábra). Ebben az esetben ABC



93/4.4. ábra

területét kétféle módon felírva kapjuk:

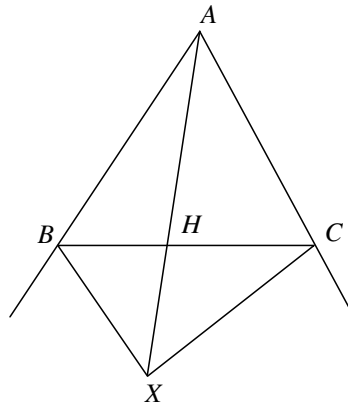
$$(1) \quad 2T_{ABC} = a \cdot m(ABC) = a_1 \cdot m(ABX) + a_2 \cdot m(AXC) + a_3 \cdot m(XBC),$$

ahol a_1, a_2, a_3 rendre az ABX, AXC, ABC háromszögek leghosszabb oldalát jelöli. Mivel egy háromszögben elhelyezhető leghosszabb szakasz nem lehet nagyobb a háromszög leghosszabb oldalánál, $a_1 \leq a, a_2 \leq a, a_3 \leq a$, és így (1)-ből

$$a \cdot m(ABC) \leq a \cdot m(ABX) + a \cdot m(AXC) + a \cdot m(XBC)$$

következik, ebből viszont minden tagot a -val osztva a bizonyítandó állítás következik.

2. Legyen most X egy U tartományban; pl. az A -t nem tartalmazóban (1993/4.5. ábra), és legyen az AX, BC egyenesek metszéspontja H . Segéd-



93/4.5. ábra

tételünk szerint

$$(2) \quad m(ABH) \leq m(ABX) \quad \text{és} \quad m(AHC) \leq m(AXC).$$

Az 1. lépésben bizonyítottakat alkalmazzuk most az ABC háromszögre és a H pontra:

$$(3) \quad m(ABC) \leq m(ABH) + m(AHC) + m(HBC).$$

Vegyük most figyelembe (2)-t és azt, hogy $m(HBC) = 0$; (3)-ból kapjuk:

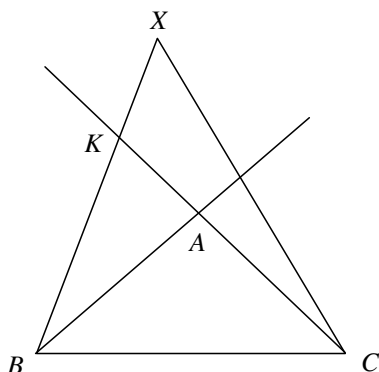
$$m(ABC) \leq m(ABX) + m(AXC) + 0.$$

Mivel pedig $m(XBC) \geq 0$, ebből a bizonyítandó

$$m(ABC) \leq m(ABX) + m(AXB) + m(XBC)$$

következik.

3. Végül essék X pl. az $A \triangleleft$ csúcsszögéhez tartozó V -tartományba, beleértve a háromszögoldalakat, pl. AB meghosszabbítását is (1993/4.6. ábra).



93/4.6. ábra

Jelölje a BX és AC egyenes metszéspontját K . Segéd-tételünk szerint

$$(4) \quad m(ABC) \leq m(KBC) \quad \text{és} \quad m(KBC) \leq m(XBC),$$

s mivel $m(ABX) \geq 0$, $m(AXC) \geq 0$, (4)-ből következik a bizonyítandó

$$m(ABC) \leq m(ABX) + m(AXC) + m(XBC)$$

állítás; tételünket ezzel minden esetre bizonyítottuk.

1993/5. Legyen $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Állapítsuk meg, létezik-e olyan $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ függvény, amelyre

$$(1) \quad f(1) = 2,$$

$$(2) \quad f(f(n)) = f(n) + n \quad \text{minden } n \in \mathbf{N}\text{-re}$$

és

$$(3) \quad f(n) < f(n+1) \quad \text{minden } n \in \mathbf{N}\text{-re}.$$

1. megoldás. Jelölje az

$$y^2 - y - 1 = 0$$

egyenlet pozitív gyökét a , $a = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) = 1,6180\dots$, tehát

$$(4) \quad a^2 - a - 1 = 0.$$

Vezessük be a

$$g(n) = an, \quad f(n) = \left[g(n) + \frac{1}{2} \right] = \left[an + \frac{1}{2} \right]$$

jelöléseket. Megmutatjuk, hogy $f(n)$ kielégíti a feladat feltételeit. (4) miatt

$$(5) \quad g(g(n)) - g(n) - n = 0.$$

Mivel $f(1) = [1,6180 \dots + 0,5] = 2$, az (1) feltétel teljesül; továbbá $a > 1$ miatt

$$f(n+1) = \left[an + \frac{1}{2} + a \right] \geq \left[an + \frac{1}{2} + 1 \right] = \left[an + \frac{1}{2} \right] + 1 = f(n) + 1 > f(n),$$

ezzel (3) teljesülését is beláttuk.

Minthogy (2)-t $n + f(n) - f(f(n)) = 0$ alakban is írhatjuk, és f egész értékű függvény, (2) igazolásához elég megmutatnunk, hogy

$$|n + f(n) - f(f(n))| < 1, \quad \text{minden } n \in \mathbf{N}\text{-re.}$$

Előrebocsátjuk, hogy $g(n)$ irracionális volta miatt

$$(6) \quad |f(n) - g(n)| < \frac{1}{2},$$

továbbá $g(n_1) - g(n_2) = a(n_1 - n_2)$ ($n_1 \in \mathbf{N}$, $n_2 \in \mathbf{N}$) és (5)-ből $n = g(g(n)) - g(n)$; ezeket figyelembe véve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} n + f(n) - f(f(n)) &= g(g(n)) - g(f(n)) + g(f(n)) - f(f(n)) + f(n) - g(n) = \\ &= a(g(n) - f(n)) - (g(n) - f(n)) + g(f(n)) - f(f(n)) = \\ &= (a - 1)(g(n) - f(n)) + g(f(n)) - f(f(n)). \end{aligned}$$

Ebből

$$\begin{aligned} |n + f(n) - f(f(n))| &\leq (a - 1)|g(n) - f(n)| + |g(f(n)) - f(f(n))| < \\ &< (a - 1)\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{a}{2} < 1, \end{aligned}$$

amivel (2) teljesülését bizonyítottuk; létezik tehát a feladat feltételeit kielégítő $f(n)$ függvény.

2. megoldás. Feladatunk megoldásához felhasználjuk az

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 2, \quad u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

rekurzióval értelmezett ún. Fibonacci-sorozatot. Ennek a szigorúan növekedő, egészekből álló sorozatnak a kezdő elemei (szokás ezeket Fibonacci számoknak is nevezni):

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 2, \quad u_3 = 3, \quad u_4 = 5, \quad u_5 = 8, \quad u_6 = 13, \quad u_7 = 21, \quad \dots$$

Először megadunk egy eljárást, amivel minden pozitív egészet egyértelműen előállítunk Fibonacci-számok összegeként úgy, hogy az összegben nincs két szomszédos Fibonacci-szám. Egytagú összeget is megengedünk. Állításunkat teljes indukcióval bizonyítjuk. A pozitív egészek előállításai így kezdődnek:

$$\begin{aligned} 1 &= u_1 = 1, \quad 2 = u_2 = 2, \quad 3 = u_3 = 3, \quad 4 = u_1 + u_3 = 1 + 3, \quad 5 = u_4, \\ 6 &= u_1 + u_4 = 1 + 5, \quad \dots \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy állításunk igaz minden olyan pozitív egészre, amely kisebb n -nél (n pozitív egész).

Ha $n = u_k$, akkor ez az előállítás. Ha n nem Fibonacci-szám, létezik olyan k , amelyre

$$(7) \quad u_k < n < u_{k+1}$$

teljesül. Ebből $n < u_{k+1} = u_k + u_{k-1} < 2u_k$ miatt

$$0 < n - u_k < u_k < n$$

következik, $n - u_k$ tehát n -nél kisebb pozitív egész, és így az indukciós feltevés szerint előáll

$$n - u_k = u_{i_1} + u_{i_2} + \dots + u_{i_s}$$

alakban, tehát

$$(8) \quad n = u_{i_1} + u_{i_2} + \dots + u_{i_s} + u_k,$$

ahol u_{i_s} és u_k nem szomszédos Fibonacci-számok; ellenkező esetben u_i .

$$n = u_{i_1} + u_{i_2} + \dots + u_{k+1}$$

következnék, ami ellentmond (7)-nek. Ez azt jelenti, hogy minden n -hez hozzárendelhetünk egy (8) típusú összeget.

Bebizonyítjuk, hogy a (8) alatti előállítás egyértelmű. Eljárásunk miatt ehhez elegendő megmutatnunk, hogy u_k -nak szerepelnie kell az előállításban. Tegyük fel u_i , hogy ezzel ellentétben létezik egy

$$n = u_{i_1} + u_{i_2} + \dots + u_{i_s} + u_{i_{s+1}}$$

előállítás, amely nem tartalmazza u_k -t, és így $u_{i_{s+1}} < u_k$, azaz $u_{i_{s+1}} \leq u_{k-1}$.

Ha k páros, azaz $k - 1$ páratlan, mivel az előállításban nincsenek szomszédos sorozatelemek,

$$\begin{aligned} n &= u_{i_1} + u_{i_2} + \dots + u_{i_{s+1}} < (1 + u_1) + u_3 + u_5 + \dots + u_{k-1} = \\ &= (u_2 + u_3) + u_5 + \dots + u_{k-1} = (u_4 + u_5) + \dots + u_{k-1} = u_k \leq n, \end{aligned}$$

ami ellentmondás. Ha k páratlan, azaz $k - 1$ páros:

$$\begin{aligned} n &= u_{i_1} + u_{i_2} + \dots + u_{i_{s+1}} < (u_1 + u_2) + u_4 + u_6 + \dots + u_{k-1} = \\ &= (u_3 + u_4) + u_6 + \dots + u_{k-1} = u_k \leq n, \end{aligned}$$

ami szintén ellentmondás; a (8) előállítás tehát egyértelmű.

Értelmezzük most ennek segítségével az f függvényt. Ha n -et (8) alakban állítottuk elő, legyen

$$(9) \quad f(n) = u_{i_1+1} + u_{i_2+1} + \dots + u_{i_s+1} + u_{k+1}.$$

Meg kell mutatnunk, hogy az így értelmezett f kielégíti az (1)–(3) feltételeket.

$$f(1) = f(u_1) = u_2 = 2,$$

(1) tehát teljesül.

$$\begin{aligned} f(f(n)) &= f(u_{i_1+1} + u_{i_2+1} + \dots + u_{i_s+1} + u_{k+1}) = \\ &= u_{i_1+2} + u_{i_2+2} + \dots + u_{i_s+1} + u_{k+2} = \end{aligned}$$

$$= (u_{i_1+1} + u_{i_2+1} + \dots + u_{i_s+1} + u_{k+1}) + (u_{i_1} + u_{i_2} + \dots + u_{i_s} + u_k) = \\ = f(n) + n,$$

ezzel (2) teljesülését is igazoltuk.

(3)-at teljes indukcióval bizonyítjuk.

$$f(1) = f(u_1) = 2 < f(u_2) = u_3 = 3,$$

a kezdő értékre tehát (3) teljesül.

Tegyük fel, hogy (3) fennáll minden n -nél kisebb pozitív egész esetén, és valamilyen k -ra $u_k \leq n < u_{k+1}$.

Két esetet különböztetünk meg:

A) ha $n + 1 < u_{k+1}$;

B) ha $n + 1 = u_{k+1}$.

A) Az indukciós feltevésünk azt is jelenti, hogy ha n' és n'' n -nél kisebb pozitív egészek és $n' < n''$, akkor

$$(10) \quad f(n') < f(n''),$$

ti. az indukciós feltevést alkalmazva, ha $n'' = n' + e$ (e pozitív egész)

$$f(n') < f(n' + 1) < f(n' + 2) < \dots < f(n' + e).$$

Bevezető megjegyzésünk szerint n , ill. $n + 1$ előállítható

$$(11) \quad \begin{aligned} n &= u_{i_1} + u_{i_2} + \dots + u_{i_s} + u_k = n' + u_k, & (n' < n) \\ n + 1 &= u_{j_1} + u_{j_2} + \dots + u_{j_r} + u_k = n'' + u_k & (n'' < n) \end{aligned}$$

alakban. Azt kell igazolnunk, hogy $f(n) < f(n + 1)$, azaz

$$(12) \quad u_{i_1+1} + u_{i_2+1} + \dots + u_{i_s+1} + u_{k+1} < u_{j_1+1} + u_{j_2+1} + \dots + u_{j_r+1} + u_{k+1},$$

vagyis

$$u_{i_1+1} + u_{i_2+1} + \dots + u_{i_s+1} < u_{j_1+1} + u_{j_2+1} + \dots + u_{j_r+1},$$

ami f definíciója szerint azt jelenti, hogy

$$f(n') < f(n''),$$

ez viszont (10) miatt valóban teljesül, tehát ebben az esetben (3) is fennáll.

B) A (11) alatti jelölést megtartva $f(n) < f(n + 1)$ most azt jelenti, hogy

$$(13) \quad u_{i_1+1} + u_{i_2+1} + \dots + u_{i_s+1} + u_{k+1} < u_{k+2} = u_k + u_{k+1},$$

azaz

$$u_{i_1+1} + u_{i_2+1} + \dots + u_{i_s+1} < u_k,$$

azaz f definíciója szerint azt jelenti, hogy

$$f(n') < f(u_{k-1}),$$

ami az indukciós feltevés és $n' < n$, $u_{k-1} < n$ miatt szintén teljesül, amivel a feladat állítását bizonyítottuk.

Megjegyezzük, hogy $u_k = n$ esetén $u_{i_1} + \dots + u_{i_s}$ helyébe 0-t kell írunk, és ekkor (12), ill. (13) nyilvánvalóan teljesül.

1993/6. Legyen $n > 1$ egész szám.

Van n lámpánk: L_0, L_1, \dots, L_{n-1} , amelyek egy kör mentén vannak elhelyezve. Mindegyik lámpa BEkapcsolt (BE) vagy Kikapcsolt (KI) állapotban van. Lépések egy $S_0, S_1, \dots, S_i, \dots$ sorozatát hajtjuk egymás után végre. Az S_j lépés csak az L_j lámpa állapotát befolyásolja (a többi lámpa állapotát változatlanul hagyja) a következőképpen:

Ha L_{j-1} BE van kapcsolva, S_j az L_j lámpa állapotát BE-ről KI-re, ill. KI-ről BE-re változtatja; ha L_{j-1} KI van kapcsolva, S_j az L_j lámpa állapotát változatlanul hagyja.

A lámpákat mod n számozzuk, azaz $L_{-1} = L_{n-1}$, $L_0 = L_n$, $L_1 = L_{n+1}$ stb.

A kiinduló állásban minden lámpa BE van kapcsolva.

Bizonyítsuk be, hogy

- (a) van olyan egész $M(n)$ szám, hogy $M(n)$ lépés után az összes lámpa ismét BE van kapcsolva;
- (b) ha n 2^k alakú, akkor minden lámpa BE van kapcsolva $n^2 - 1$ lépés után;
- (c) ha n $2^k + 1$ alakú, akkor minden lámpa BE van kapcsolva $n^2 - n + 1$ lépés után.

Megoldás. (a) Foglaljuk táblázatba a feladatban leírt kapcsolási előírásokat:

	L_{j-1}	L_j	L_{j-1}	L_j	L_{j-1}	L_j	L_{j-1}	L_j
S_j előtt:	BE	BE	BE	KI	KI	BE	KI	KI
S_j után:	BE	KI	BE	BE	KI	BE	KI	KI

Ebből a táblázatból világos, hogy az S_j utáni állapotról egyértelműen lehet következtetni az S_j előtti állapotra. Mivel az n lámpából álló együttesnek csak véges sok állapota lehet, valamelyik állapotnak ismétlődnie kell, s mivel egy állapot az előzőeket is egyértelműen meghatározza, a kezdeti állapotnak is ismétlődnie kell, tehát bizonyos számú lépés után — feladatunk ezt $M(n)$ -nel jelöli — ismét minden lámpa BE lesz kapcsolva.

A továbbiak céljára értelmezzük az a_0, a_1, \dots sorozatot a következő módon:

$$(1) \quad a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 1, \quad a_k = a_{k-1} + a_{k-n} \quad (k \geq n).$$

Táblázatunkból ellenőrizhetők, hogy ha $a_k \equiv 1 \pmod{2}$, akkor a k -edik lámpa a $k - n$ -edik lépés után BE van kapcsolva, ha viszont $a_k \equiv 0 \pmod{2}$, akkor KI van kapcsolva. (Emlékeztetünk rá, hogy a feladat szerint a lámpákat mod n számozzuk.)

Az (1) alatti rekurzióhoz tartozó karakterisztikus egyenlet

$$x^k = x^{k-1} + x^{k-n},$$

amit

$$(2) \quad x^n - x^{n-1} - 1 = 0$$

alakban is írhatunk. Ennek az egyenletnek nincs többszörös gyöke (l. megjegyzésünket), ezért ha gyökei $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, akkor a rekurziós sorozatok elméletéből ismert, hogy megfelelő c_i állandókkal

$$(3) \quad a_k = c_1 \alpha_1^k + c_2 \alpha_2^k + \dots + c_n \alpha_n^k.$$

(b) Térjünk most rá a (b) feladatrész bizonyítására. Legyen n 2-nek valamilyen pozitív egész kitevős hatványa, és legyen α (2)-nek egy tetszőleges gyöke, tehát $\alpha^n = \alpha^{n-1} + 1$.

Induljunk ki α^{n^2+k} vizsgálatából. Egyrészt:

$$\begin{aligned} \alpha^{n^2+k} &= \alpha^k \cdot \alpha^{n^2} = \alpha^k (\alpha^n)^n = \alpha^k (\alpha^{n-1} + 1)^n = \\ &= \alpha^k \left(\alpha^{n(n-1)} + \binom{n}{1} \alpha^{(n-1)(n-1)} + \dots + \binom{n}{n-1} \alpha^{n-1} + 1 \right), \end{aligned}$$

másrészt:

$$\alpha^{n^2+k} = \alpha^k \cdot \alpha^{n^2} = \alpha^k \cdot \alpha^{n^2-n} \cdot \alpha^n = \alpha^k \cdot \alpha^{n^2-n} (\alpha^{n-1} + 1) = \alpha^k (\alpha^{n^2-1} + \alpha^{n(n-1)}).$$

E két azonosság különbségéből kapjuk, hogy

$$0 = \alpha^k \left(\binom{n}{1} \alpha^{(n-1)^2} + \dots + \binom{n}{n-1} \alpha^{n-1} + 1 - \alpha^{n^2-1} \right).$$

Ennek felhasználásával adódik (3)-ra tekintettel, hogy

$$\begin{aligned} &\binom{n}{1} a_{(n-1)^2+k} + \dots + \binom{n}{n-1} a_{n-1+k} + a_k - a_{n^2-1+k} = \\ &= \binom{n}{1} \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i^{(n-1)^2+k} + \dots + \binom{n}{n-1} \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i^{n-1+k} + \sum_{i=1}^n c_i \alpha_1^k - \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i^{n^2-1+k} = \\ &= \sum_{i=1}^n c_i \left(\binom{n}{1} \alpha_i^{(n-1)^2+k} + \dots + \binom{n}{n-1} \alpha_i^{n-1+k} + \alpha_i^k - \alpha_i^{n^2-1+k} \right) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Mivel n 2-hatvány, a fenti kifejezésben szereplő binomiális együtthatók párosak, és így előző eredményünk következménye, hogy

$$\begin{aligned} 0 &= \binom{n}{1} a_{(n-1)^2+k} + \dots + \binom{n}{n-1} a_{n-1+k} + a_k - a_{n^2-1+k} \equiv \\ &\equiv a_k - a_{n^2-1+k} \pmod{2}, \\ &a_k \equiv a_{n^2-1+k} \pmod{2}. \end{aligned}$$

De $k=0, 1, \dots, n-1$ -re $a_k=1$, ezért

$$a_{n^2} \equiv a_{n^2+1} \equiv \dots + a_{n^2+n-1} \equiv 1 \pmod{2},$$

amit bizonyítanunk kellett.

(c) Legyen most $n-1$ 2-hatvány; a (b) alatti jelöléseket és meggondolásokat használva induljunk ki α^{n^2-n+k} vizsgálatából. Egyrészt

$$\begin{aligned} \alpha^{n^2-n+k} &= \alpha^k \cdot \alpha^{n^2-n} = \alpha^k (\alpha^n)^{n-1} = \alpha^k (\alpha^{n-1} + 1)^{n-1} = \\ &= \alpha^k \left(\alpha^{(n-1)^2} + \binom{n-1}{1} \alpha^{(n-2)(n-1)} + \dots + \binom{n-1}{n-2} \alpha^{n-1} + 1 \right). \end{aligned}$$

Másrészt:

$$\begin{aligned} \alpha^{n^2-n+k} &= \alpha^k \cdot \alpha^{n^2-n} = \alpha^k \cdot \alpha^{(n-1)^2} \cdot \alpha^{n-1} = \alpha^k \cdot \alpha^{(n-1)^2} (\alpha^n - 1) = \\ &= \alpha^k (\alpha^{n^2-n+1} - \alpha^{(n-1)^2}). \end{aligned}$$

E két azonosság különbségéből kapjuk:

$$0 = \alpha^k \left(2\alpha^{(n-1)^2} + \binom{n-1}{1} \alpha^{(n-2)(n-1)} + \dots + \binom{n-1}{n-2} \alpha^{n-1} + 1 - \alpha^{n^2-n+1} \right).$$

A (b) alatti meggondolások analógiájára itt azt kapjuk, hogy

$$0 = 2a_{(n-1)^2+k} + \binom{n-1}{1} a_{(n-2)(n-1)+k} + \dots + \binom{n-1}{n-2} a_{n-1+k} + a_k - a_{n^2-n+1+k}.$$

Az itt szereplő binomiális együtthatók párosak, ezért

$$a_k \equiv a_{n^2-n+1+k} \pmod{2} \quad \text{minden } k\text{-ra.}$$

Mivel $a_1 = \dots = a_n = 1$, ezért

$$a_{n^2-n+2} \equiv a_{n^2-n+3} \equiv \dots \equiv a_{n^2+1} \equiv 1 \pmod{2},$$

és éppen ezt kellett bizonyítanunk.

Megjegyzés. Megoldásunk közben felhasználtuk, hogy az

$$x^n - x^{n-1} - 1 = 0$$

polinomnak nincs többszörös gyöke. Ha ti. lenne ilyen, akkor az a derivált polinomnak: $nx^{n-1} - (n-1)x^{n-2} = x^{n-2}(nx - (n-1))$ -nek is gyöke lenne, viszont ennek gyökei: 0 és $\frac{n-1}{n}$, nem elégítik ki az eredeti polinomot.

1994.

1994/1. Legyenek m és n pozitív egészek, a_1, a_2, \dots, a_m pedig az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz különböző elemei. Tegyük fel, hogy valahányszor $a_i + a_j \leq n$ teljesül valamilyen i, j értékekre, ahol $1 \leq i \leq j \leq m$, akkor létezik olyan k ($1 \leq k \leq m$), hogy

$$a_i + a_j = a_k.$$

Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_m}{m} \geq \frac{n+1}{2}.$$

Megoldás. Jelöljük az $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ halmazt A -val; feltehetjük, hogy elemei $a_1 > a_2 > \dots > a_m$ formában vannak rendezve. Az A minden a_i eleméhez társként hozzárendeljük az a_{m-i+1} elemet, így a_{m-i+1} társa a_i ; és ha m páratlan, a középső $a_{\frac{m+1}{2}}$ elem társa önmaga.

Megmutatjuk először, hogy bármelyik elemnek és társának az összege legalább $n+1$. Ha ui. ezzel ellentétben valamely i -re ($1 \leq i \leq m$) $a_i + a_{m-i+1} < n+1$, azaz $a_i + a_{m-i+1} \leq n$ teljesülne, akkor A rendezettsége miatt

$$(1) \quad a_i < a_i + a_m < a_i + a_{m-1} < \dots < a_i + a_{m-i+1} \leq n$$

következnék, ami a feladat feltételei szerint azt jelenti, hogy az (1) alatt felsorolt i darab összeg mind A -beli elemet állít elő, amelyek nagyobbak a_i -nél, holott A -ban a_i -nél csak $i-1$ nagyobb elem van. Ezért

$$\begin{aligned} a_1 + a_m &\geq n+1, \\ a_2 + a_{m-1} &\geq n+1, \\ &\vdots \\ a_m + a_1 &\geq n+1. \end{aligned}$$

Ezeket összegezve a

$$2(a_1 + a_2 + \dots + a_m) \geq m(n+1)$$

egyenlőtlenséget kapjuk, ami a bizonyítandóval egyenértékű.

1994/2. Az ABC egyenlő szárú háromszögben $AB = AC$. Tegyük fel, hogy

(i) M a BC szakasz felezőpontja, O pedig az AM egyenesnek az a pontja, amelyre teljesül, hogy OB merőleges AB -re;

(ii) Q a BC szakasz tetszőleges belső pontja;

(iii) E az AB egyenes egy pontja, F pedig az AC egyenes egy pontja, amelyre teljesül, hogy E , Q és F különbözőek és egy egyenesen van.

Bizonyítsuk be, hogy OQ akkor és csak akkor merőleges EF -re, ha $QE = QF$.

Ha az AB és AC egyenesek a parabola tengelyére szimmetrikus parabolaérintők, akkor minden parabolaérintőnek az AB és AC érintők közé eső szakaszát felezi a parabola csúcsérintője.

Ennek ti. az az oka, hogy az EF típusú egyenesek annak a parabolának az érintői, amelynek csúcsérintője BC és fókusza O .

1994/3. Tetszőleges pozitív egész k esetén jelölje $f(k)$ az $A_k = \{k+1, k+2, \dots, 2k\}$ halmaz olyan elemeinek a számát, amelyek kettes alapú számrendszerben való felírásában pontosan három darab 1-es számjegy található.

(a) Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész m -hez létezik legalább egy olyan pozitív egész k , hogy $f(k) = m$.

(b) Határozzuk meg mindazokat a pozitív egész m -eket, amelyekre pontosan egy olyan k létezik, amelyre $f(k) = m$.

Megoldás. Egyszerűség kedvéért nevezzünk „jó”-nak egy pozitív egészet, ha kettes számrendszerbeli alakjában pontosan három 1-es van, azaz három nemnegatív egész kitevős 2 alapú hatvány összege. k nyilván akkor és csakis akkor jó, ha $2k$ is jó.

(a) Vessük össze az A_k és A_{k+1} halmazok jó elemeinek a számát.

$$A_k = \{k+1, k+2, k+3, \dots, 2k-1, 2k, \dots\},$$

$$A_{k+1} = \{k+2, k+3, \dots, 2k-1, 2k, 2k+1, 2k+2\}.$$

E két halmaz csak a $k+1$, ill. a $2k+1, 2k+2$ elemekben különbözik. Mivel $k+1$ és $2k+2$ egyszerre jó, különbséget csak $2k+1$ okozhat, azaz

$$f(k+1) - f(k) = 0, \quad \text{ha } 2k+1 \text{ nem jó,}$$

$$f(k+1) - f(k) = 1, \quad \text{ha } 2k+1 \text{ jó.}$$

Ha tehát k értékét 1-gyel növeljük, $f(k)$ vagy változatlan marad, vagy pedig 1-gyel nő, ez akkor és csakis akkor következik be, ha $2k+1$ jó.

Számítsuk most ki $f(2^n)$ értékét. Mivel 2^{n+1} nem jó, az $[1, 2^{n+1}]$ intervallumban ugyanannyi jó szám van, mint $[1, 2^{n+1} - 1]$ -ben Ezek a számok a 2-es számrendszerben (ha az elején is megengedünk 0-kat) $(n+1)$ -jegyűek, közülük pontosan 3 darab 1-es van, számuk tehát $\binom{n+1}{3}$. Hasonlóan: az $[1, 2^n]$ intervallumban $\binom{n}{3}$ jó szám van, tehát az

$$A_{2^n} = \{2^n + 1, 2^n + 2, \dots, 2^{n+1}\}$$

intervallum jó számainak a száma

$$f(2^n) = \binom{n+1}{3} - \binom{n}{3} = \binom{n}{2}.$$

Mivel $f(4) = f(2^2) = 1$, és előző eredményünk szerint az f függvény tetszőleges nagy értéket felvesz és egyszerre csak 1-et „ugorhat”, f felveszi az összes pozitív egész értéket.

(b) Az $f(k) = m$ egyenletnek adott m esetén akkor van egyetlen megoldása, ha f valamilyen k értékre $f(k) = m$ és a k helyen f szigorúan monoton nő, azaz az előzőek szerint

$$f(k+1) - f(k) = f(k) - f(k-1) = 1.$$

Mint láttuk, ennek az a feltétele, hogy $2k+1$ és $2k-1$ is jó legyen. Ha $2k-1$ jó, akkor 2-es számrendszerbeli alakjában az első és utolsó jegye 1-es, és közben még egy helyen van benne 1-es. Ennek viszont az utolsó előtti helyen kell állnia, mert ha nem ott állna, akkor 2-t (azaz 10_2 -t) hozzáadva, $2k+1$ már 4 darab 1-est tartalmazna, ami nem lenne jó. Ezek szerint

$$2k-1 = 2^a + 2 + 1, \quad (a \geq 3),$$

ebből

$$k = 2^{a-1} + 2 = 2^n + 2 \quad (n \geq 2).$$

Megfordítva is igaz, ha $k = 2^n + 2$, akkor $2k+1$, $2k-1$ jók.

Most már csak $f(2^n + 2)$ értékét kell meghatároznunk, azaz az

$$A_{2^n+2} = \{2^n + 3, 2^n + 4, \dots, 2^{n+1} + 4\}$$

halmazban a jó számok számát. Mivel

$$2^n, 2^n + 1, 2^n + 2, 2^{n+1}, 2^{n+1} + 1, 2^{n+1} + 2, 2^{n+1} + 4$$

nem jó, $2^{n+1} + 3$ viszont jó, az A_{2^n+2} halmazban eggyel több jó szám van, mint a

$$\{2^n + 1, 2^n + 2, \dots, 2^{n+1}\}$$

halmazban. Mint láttuk, ebben $\binom{n}{2}$ a jó számok száma, ezért

$$f(2^n + 2) = \binom{n}{2} + 1;$$

az $f(k) = m$ egyenletnek akkor van egyetlen megoldása, ha $m = \binom{n}{2} + 1$.

1994/4. Határozzuk meg az összes olyan pozitív egészekből álló (m, n) rendezett párt, amelyre

$$(1) \quad \frac{n^3 + 1}{mn - 1}$$

is egész szám.

Megoldás. Megmutatjuk először, hogy ha (1) valamilyen (m, n) párra egész, akkor egész (n, m) -re is. Mivel m^3 és $mn - 1$ relatív prímek, $n^3 + 1$ akkor és csakis akkor osztható $mn - 1$ -gyel, ha $m^3(n^3 + 1)$ is osztható. Viszont

$$m^3(n^3 + 1) = m^3 n^3 - 1 + m^3 + 1 = (mn - 1)(m^2 n^2 + \dots + 1) + m^3 + 1,$$

ezért $m^3(n^3 + 1)$ akkor és csakis akkor osztható $mn - 1$ -gyel, ha $m^3 + 1$ is osztható, ha tehát (1) egy (n, m) párra egész, akkor egész az (m, n) párra is. A következőkben feltehetjük, hogy $m \geq n$.

Legyen először $m = n$. Ebben az esetben (1)

$$\frac{n^3 + 1}{n^2 - 1} = n + \frac{1}{n - 1}$$

alakba írható. Ez viszont akkor egész, ha $n = 2$, tehát a $(2, 2)$ pár megoldás.

Legyen most $m > n$. Ha $n = 1$, $\frac{2}{m - 1}$ akkor lehet egész, ha $m = 2$ vagy $m = 3$, tehát az $(1, 2)$, $(1, 3)$ párok megoldások. Ha $n \geq 2$, tegyük fel, hogy (1) értéke egy e egész, ekkor

$$n^3 + 1 = emn - e, \quad m = \frac{n^3 + 1 + e}{en},$$

m ezért csak akkor lehet egész, ha $1 + e$ osztható n -nel, tehát $1 + e = kn$, $e = kn - 1$ (k pozitív egész), ezért

$$kn - 1 = \frac{n^3 + 1}{mn - 1} < \frac{n^3 + 1}{n^2 - 1} = n + \frac{1}{n - 1},$$

ebből

$$(k - 1)n < 1 + \frac{1}{n - 1}.$$

Mivel itt a jobb oldalon 2-nél kisebb szám áll, az egyenlőtlenség csak akkor teljesülhet, ha $k = 1$, tehát

$$n^3 + 1 = (n - 1)(mn - 1),$$

ebből

$$m = \frac{n^2 + 1}{n - 1} = n + 1 + \frac{2}{n - 1},$$

ez viszont csak akkor lehet egész, ha $n = 2$ vagy $n = 3$, a hozzájuk tartozó m érték mindkét esetben 5, tehát a $(2, 5)$, $(3, 5)$ párok megoldások.

A feladat összes megoldása ezért (figyelembe véve bevezető megjegyzésünket):

$$(2, 2), \quad (1, 2), \quad (1, 3), \quad (2, 5), \quad (3, 5), \\ (2, 1), \quad (3, 1), \quad (5, 2), \quad (5, 3).$$

1994/5. Legyen S a (-1) -nél nagyobb valós számok halmaza. Határozzuk meg az összes olyan $f: S \rightarrow S$ függvényt, amelyre teljesül a következő két feltétel:

(i) $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$ minden $x, y \in S$ -re;

(ii) $\frac{f(x)}{x}$ szigorúan monoton növekvő a $-1 < x < 0$, ill. $x > 0$ intervallumok mindegyikén.

Megoldás. Legyen $x = y \in S$. A függvényegyenlet ebben az esetben így alakul:

$$(1) \quad f(x + (1+x)f(x)) = x + (1+x)f(x).$$

Vizsgáljuk most az

$$(2) \quad f(u) = u$$

egyenlet megoldásait. (1) azt jelenti, hogy ennek $u = x + (1+x)f(x)$ mindig megoldása. Ha $u \neq 0$, akkor (2)

$$(3) \quad \frac{f(u)}{u} = 1$$

alakba írható. Viszont az $\frac{f(u)}{u}$ függvény szigorú monotonitása miatt a $] -1, 0[$ és a $]0, +\infty[$ intervallumok mindegyikében az 1 értéket legfeljebb egyszer veheti fel.

Tegyük fel, hogy valamilyen u -ra $f(u) = u$, $u \in] -1, 0[$, (1) ekkor $x = u$ helyettesítéssel

$$f(u^2 + 2u) = u^2 + 2u$$

alakba megy át.

Megfigyelhetjük, hogy ha $u \in] -1, 0[$, akkor $u^2 + 2u \in] -1, 0[$ és ha $u \in]0, +\infty[$, akkor $u^2 + 2u \in]0, \infty[$, tehát nem létezhet olyan u_1, u_2 megoldaspár, hogy $u_1 \in] -1, 0[$, $u_2 \in]0, \infty[$ és $u_1^2 + 2u_1 = u_2$ és $u_2^2 + 2u_2 = u_1$.

Mivel a $] -1, 0[$ intervallumban (2) csak egyetlen u -ra teljesülhet, ha $u^2 + 2u \in] -1, 0[$ akkor

$$u^2 + 2u = u,$$

de ennek megoldásai nincsenek $] -1, 0[$ -ban, tehát ebben az intervallumban (2) nem teljesülhet. Ezzel azonos módon láthatjuk be, hogy (2) a $]0, +\infty[$ intervallumban sem teljesül, $f(u) = u$ tehát csak $u = 0$ esetben állhat fenn.

Ebből következik, hogy (1)-ben

$$x + (1+x)f(x) = 0 \quad x \in S,$$

azaz

$$(4) \quad f(x) = -\frac{x}{1+x},$$

ezért egyedül ez lehet függvényegyenletünk megoldása. Be kell még látnunk, hogy ez valóban megoldás.

I. $f(x)$ értelmezve van S -ben, és

$$f(x) = -1 + \frac{1}{1+x}$$

miatt, ha $x \in S$, akkor $f(x) > -1$, tehát $f(x) \in S$.

II.

$$\frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{1+x}$$

valóban szigorúan monoton növekvő, ha $x > -1$.

III.

$$y + f(x) + yf(x) = y - \frac{x}{1+x} - \frac{xy}{1+x} = \frac{y-x}{1+x},$$

$$x + f(y) + xf(y) = \frac{x-y}{1+y},$$

$$f\left(\frac{x-y}{1+y}\right) = -\frac{\frac{x-y}{1+y}}{1+\frac{x-y}{1+y}} = -\frac{x-y}{1+x} = \frac{y-x}{1+x},$$

tehát $f(x) = -\frac{x}{1+x}$ kielégíti a függvényegyenletet is, aminek ez az egyetlen megoldása.

1994/6. Mutassuk meg, hogy létezik olyan pozitív egész számokból álló A halmaz, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

a prímszámok tetszőleges végtelen S halmazához létezik olyan $k \geq 2$ és két pozitív egész: $m \in A$ és $n \notin A$, hogy m és n mindegyike S k darab különböző elemének a szorzata.

Megoldás. Értelmezzük az A halmazt a következő módon: Az A tartalmazza az összes olyan pozitív egészet, amelyek kielégítik a következő feltételeket.

a) A minden elemének prímtényezősz felbontásában a prímek első hatványon szerepelnek;

b) A minden elemének annyi prímtényezője van, mint amekkora a legkisebb prímosztója.

Legyen most $S = \{p_1, p_2, \dots\}$, ahol $p_1 < p_2 < p_3 < \dots <$ tetszőleges prímek.

Válasszuk k -t p_1 -nek ($p_1 \geq 2$), és legyen

$$m = p_1 p_2 \dots p_{p_1}, \quad n = p_2 p_3 \dots p_{p_1+1}.$$

m és n mindegyike S p_1 darab különböző elemének a szorzata; A definíciója szerint $m \in A$ teljesül, viszont n nem lehet A -ban, mivel A minden olyan elemének, amelynek legkisebb prímtényezője p_2 , p_2 számú prímtényezője van, n -nek viszont csak p_1 , és $p_1 \neq p_2$.

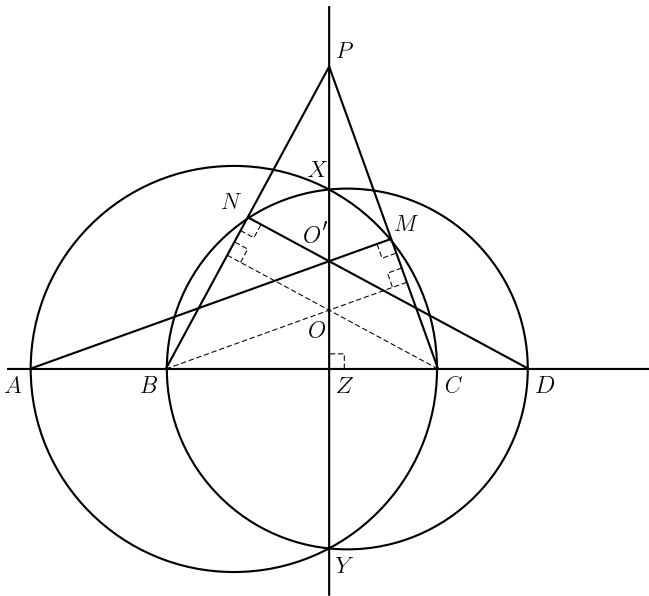
A fenti módon szerkesztett k , m , n értékek tehát kielégítik a feladat feltételeit.

1995.

1995/1. Legyen A, B, C, D egy egyenes négy különböző pontja, amelyek ebben a sorrendben fekszenek az egyenesen. Az AC , ill. BD átmérők fölé rajzolt körök metszéspontjai legyenek X és Y . Az XY egyenes metszéspontja a BC egyenessel legyen Z , legyen továbbá P az XY egyenes egy Z -től különböző pontja. A CP egyenes metszéspontjai az AC átmérőjű körrel legyenek C és M , a BP egyenes metszéspontjai a BD átmérőjű körrel legyenek B és N . Bizonyítsuk be, hogy az AM , DN és XY egyenesek egy ponton mennek át.

1. megoldás. Legyen a BPC háromszög magasságpontja O , ez nyilván rajta van az XY egyenesen, hiszen XY merőleges BC -re. (1995/1.1. ábra). Z rajta van az AC , ill. BD átmérőjű körök hatványvonalán, ezért a rájuk vonatkozó hatványa megegyezik:

$$ZA \cdot ZC = ZB \cdot ZD, \quad \text{azaz} \quad \frac{ZA}{ZB} = \frac{ZD}{ZC} = \lambda.$$



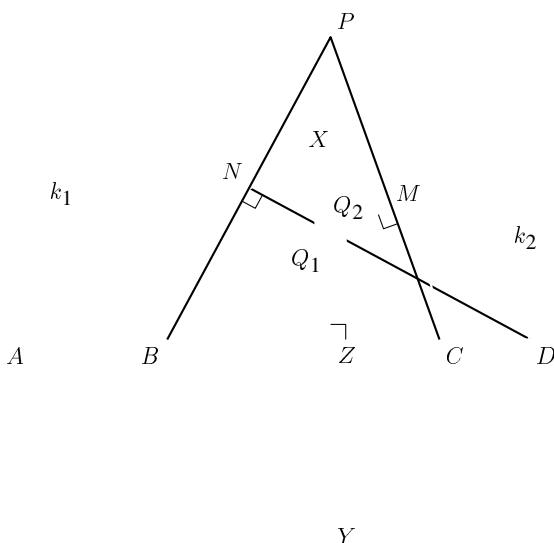
1995/1.1. ábra

AM párhuzamos BO -val és DN párhuzamos CO -val, mivel ugyanazokra az egyenesekre merőlegesek. Alkalmazzunk a BOC háromszögre Z középpontú λ arányú nagyítást, ez B -t az A -ba és a BO egyenest az AM egyenesbe, C -t a D -be és a CO egyenest a DN egyenesbe viszi át, következésképpen a BO és CO egyenesek metszéspontját, O -t, az AM és DN egyenesek metszéspontjába,

O' -be viszi, ezért Z , O , O' egy egyenesen vannak, ami éppen azt jelenti, hogy az AM , DN és XY egyenesek átmennek az O' ponton.

2. megoldás. Legyenek az AC , ill. BD átmérőjű körök k_1 , ill. k_2 (1995.1.2. és 3. ábrák). Messe az AM egyenes XY -t Q_1 -ben, DN pedig Q_2 -ben. Azt kell bizonyítanunk, hogy Q_1 és Q_2 azonosak. Thálesz tételéből következik, hogy $AMC \sphericalangle$ és $BND \sphericalangle$ derékszög. A Q_1C szakasz az M és Z pontokból derékszögben látszik, ezért Z, C, M, Q_1 egy k_3 körön vannak; teljesen hasonló indoklással következik, hogy Z, B, N, Q_2 egy k_4 kör négy pontja. P tehát rajta van a (k_1, k_2) , (k_1, k_3) és (k_2, k_4) körpárok hatványvonalain, ezért megegyezik hatványa a k_3 és k_4 körökre is, azaz

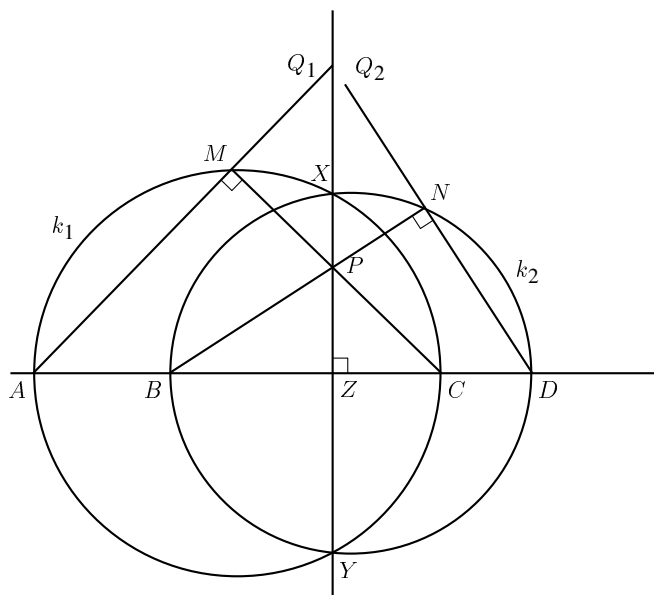
$$PQ_1 \cdot PZ = PQ_2 \cdot PZ, \quad \text{amiből} \quad PQ_1 = PQ_2.$$



1995/1.2. ábra

Mivel pedig Q_1 és Q_2 az XY egyenesen P -nek azonos oldalán vannak, $Q_1 \equiv Q_2$; ezt kellett bizonyítanunk.

Megjegyzés. P két különböző elhelyezkedési lehetőségét két ábrán mutattuk be; ezek különbözősége azonban a bizonyítás menetét nem befolyásolja.



1995/1.3. ábra

1995/2. Legyenek a, b, c olyan pozitív valós számok, amelyekre $abc = 1$ teljesül. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

1. megoldás. Jelölje a bal oldali összeget S , és alkalmazzuk a Cauchy-egyenlőtlenséget [22] a

$$\left(\sqrt{\frac{1}{a^3(b+c)}}, \sqrt{\frac{1}{b^3(c+a)}}, \sqrt{\frac{1}{c^3(a+b)}} \right) \quad \text{és} \quad \left(\sqrt{\frac{b+c}{bc}}, \sqrt{\frac{c+a}{ca}}, \sqrt{\frac{a+b}{ab}} \right)$$

számhármassokra:

$$\left(\sqrt{\frac{1}{a^3bc}} + \sqrt{\frac{1}{ab^3c}} + \sqrt{\frac{1}{abc^3}} \right)^2 \leq S \left(\frac{b+c}{bc} + \frac{c+a}{ca} + \frac{a+b}{ab} \right),$$

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 \leq 2S \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right);$$

azaz

$$S \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

Alkalmazzuk most a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$S \geq \frac{3}{2} \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{3} \geq \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{abc}} = \frac{3}{2}.$$

Egyenlőség az utolsó lépés miatt csak $a = b = c$ esetben teljesülhet, s ekkor valóban teljesül is.

2. megoldás. Vezessük be az $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$ jelöléseket, ezekkel $xyz = 1$. E jelölésekkel a bal oldalnak pl. az első tagja:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} = \frac{x^3}{\frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = \frac{x^3 yz}{y+z} = \frac{x^2}{y+z}.$$

Végezzük el most mindhárom tagra az ilyen típusú átalakítást:

$$(1) \quad S = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2},$$

ezt fogjuk bizonyítani.

Alkalmazzuk most a súlyozott számtani és harmonikus közép közötti egyenlőtlenséget [40] az $\frac{x}{y+z}$, $\frac{y}{z+x}$, $\frac{z}{x+y}$ számokra és rendre az x , y , z súlyokra:

$$\frac{S}{x+y+z} = \frac{x \frac{x}{y+z} + y \frac{y}{z+x} + z \frac{z}{x+y}}{x+y+z} \geq \frac{x+y+z}{x \frac{y+z}{x} + y \frac{z+x}{y} + z \frac{x+y}{z}},$$

azaz

$$S \geq \frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)} = \frac{x+y+z}{2}.$$

Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget, és vegyük figyelembe, hogy $xyz = 1$

$$S \geq \frac{3}{2} \frac{x+y+z}{3} \geq \frac{3}{2} \sqrt[3]{xyz} = \frac{3}{2},$$

ezzel az egyenlőtlenséget bizonyítottuk; egyenlőség csak $x = y = z$, azaz $a = b = c$ esetben teljesülhet.

3. megoldás. Egyenlőtlenségünknek számos és sokirányú általánosítása ismeretes; ezek közül mutatunk most be egyet, ennek bizonyítása az eredeti egyenlőtlenség bizonyítását is tartalmazza.

A feltételek változtatlansága mellett kössük ki, hogy $\beta \geq 2$, ekkor teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$\frac{1}{a^\beta(b+c)} + \frac{1}{b^\beta(c+a)} + \frac{1}{c^\beta(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Vezessük be az $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$ helyettesítést, ezzel (ugyanúgy, mint előző megoldásunkban) egyenlőtlenségünk az

$$\frac{x^{\beta-1}}{y+z} + \frac{y^{\beta-1}}{z+x} + \frac{z^{\beta-1}}{x+y} \geq \frac{3}{2}$$

alakba megy át; egyszerűség kedvéért legyen $\alpha = \beta - 1$ ($\alpha \geq 1$, a bizonyítandó tehát:

$$S_\alpha = \frac{x^\alpha}{y+z} + \frac{y^\alpha}{z+x} + \frac{z^\alpha}{x+y} \geq \frac{3}{2} \quad (\alpha \geq 1).$$

Ezt először $\alpha = 1$ esetben bizonyítjuk be (itt nem szükséges az $xyz = 1$ kikötés).

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} = \frac{x+y+z}{y+z} + \frac{x+y+z}{z+x} + \frac{x+y+z}{x+y} - 3 = \\ &= 3(x+y+z) \cdot \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y} - 3. \end{aligned}$$

Alkalmazva a számtani és harmonikus közép közötti egyenlőtlenséget:

$$S_1 \geq 3(x+y+z) \frac{3}{y+z+z+x+x+y} - 3 = \frac{9(x+y+z)}{2(x+y+z)} - 3 = \frac{3}{2}.$$

Tegyük most fel, hogy $x \geq y \geq z$, ebből $x^{\alpha-1} \geq y^{\alpha-1} \geq z^{\alpha-1}$ is következik, továbbá az

$$\frac{x}{y+z} \geq \frac{y}{z+x} \geq \frac{z}{x+y}$$

egyenlőtlenségek is, mert pl. mivel $x \geq y$, $y+z \leq z+x$ és $\frac{1}{y+z} \geq \frac{1}{z+x}$, tehát

$$\frac{x}{y+z} \geq \frac{y}{x+z}.$$

Felhasználjuk most az ún. Csebisev-egyenlőtlenséget, mely szerint, ha

$$a_1, a_2, \dots, a_n \quad \text{és} \quad b_1, b_2, \dots, b_n$$

a valós számoknak két egyformán rendezett véges sorozata, akkor

$$\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{n} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}.$$

(Ha a sorozatok rendezettsége ellentett, akkor az egyenlőtlenség iránya megfordul.) Egyenlőség csak $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ vagy $b_1 = b_2 = \dots = b_n$ esetén áll fenn.

A Csebisev-egyenlőtlenséget tehát az

$$x^{\alpha-1}, y^{\alpha-1}, z^{\alpha-1} \quad \text{és} \quad \frac{x}{y+z}, \frac{y}{z+x}, \frac{z}{x+y}$$

számhármassokra alkalmazva kapjuk, hogy

$$S_{\alpha} \geq S_1 \frac{x^{\alpha-1} + y^{\alpha-1} + z^{\alpha-1}}{3} \geq \frac{3}{2} \frac{x^{\alpha-1} + y^{\alpha-1} + z^{\alpha-1}}{3}.$$

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenségből és az $xyz = 1$ feltételből

$$S_{\alpha} \geq \frac{3}{2} \sqrt[3]{(xyz)^{\alpha-1}} = \frac{3}{2},$$

és egyenlőség csak $x = y = z$, azaz $a = b = c$ estén teljesül.

1995/3. Határozzuk meg az összes olyan $n > 3$ egész számot, amelyre létezik a síkon n pont: A_1, A_2, \dots, A_n és r_1, r_2, \dots, r_n valós számok, amelyekre a következő két feltétel teljesül:

- (i) az A_1, A_2, \dots, A_n pontok közül semelyik három sem fekszik egy egyenesen;
- (ii) minden i, j, k számhármassra ($1 \leq i < j < k \leq n$) az $A_i A_j A_k$ háromszög területe $r_i + r_j + r_k$ -val egyenlő.

Megoldás. Megmutatjuk, hogy a feladat két feltétele csak $n = 4$ esetében teljesíthető.

Ha $n = 4$, az egységoldalú négyzet négy csúcsa legyen A_1, A_2, A_3, A_4 , és legyen $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = \frac{1}{6}$. Ebben az esetben bármely három pont által meghatározott háromszög területe $3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$. (Négyzet helyett egységnyi területű paralelogramma is megfelel.)

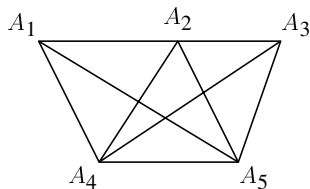
A továbbiakhoz először egy segédtelet bizonyítunk: öt pont esetén nem lehet két r_i egyenlő. Tegyük fel ui., hogy $r_4 = r_5$. Ebben az esetben az $A_1 A_2 A_4$ területe $r_1 + r_2 + r_4$, az $A_1 A_2 A_5$ területe is $r_1 + r_2 + r_4$, ami azt jelenti, hogy $A_1 A_2$ párhuzamos $A_4 A_5$ -tel. Ugyanezt a gondolatmenetet alkalmazva az $A_2 A_3 A_4$ és $A_2 A_3 A_5$ háromszögekre kapjuk, hogy $A_2 A_3$ is párhuzamos $A_4 A_5$ -tel, ez azonban lehetetlen, mert azt jelentené, hogy A_1, A_2, A_3 egy egyenesen vannak (1995/3.1. ábra).

Tegyük most fel, hogy van a síkon öt pont a megadott feltételekkel. Ha ezek konvex burka ötszög (1995/3.2. ábra), az $A_1 A_2 A_3 A_4$ négyszög területe az $A_1 A_2 A_3$ és $A_1 A_4 A_3$ háromszögek területösszegével és ugyanakkor $A_2 A_3 A_4$ és $A_4 A_1 A_2$ területösszegével is egyenlő, tehát

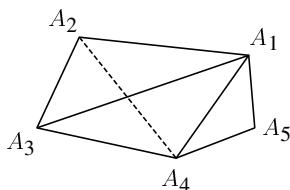
$$r_1 + r_2 + r_3 + r_1 + r_4 + r_3 = r_2 + r_3 + r_4 + r_4 + r_1 + r_2,$$

azaz

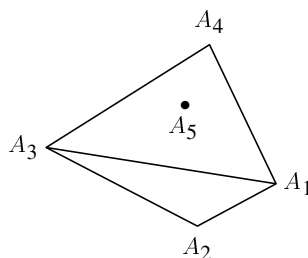
$$r_1 + r_3 = r_2 + r_4.$$



1995/3.1. ábra



1995/3.2. ábra



1995/3.3. ábra

Ugyanezt alkalmazva az $A_1A_2A_3A_5$ konvex négyszögre, kapjuk, hogy

$$r_1 + r_3 = r_2 + r_5,$$

amiből $r_4 = r_5$ következne, ez viszont segédteételünk szerint lehetetlen.

Ha az öt pont konvex burka négyszög, pl. $A_1A_2A_3A_4$ és A_5 pl. az $A_1A_3A_4$ háromszög belső pontja (1995/3.3. ábra), akkor előző megfontolásunkat az $A_1A_2A_3A_4$ és $A_1A_2A_3A_5$ négyszögekre alkalmazva ismét az ellentmondásos $r_4 = r_5$ eredményre jutunk.

Végül, ha a konvex burok az $A_1A_2A_3$ háromszög, akkor az $A_1A_2A_4$, $A_2A_3A_4$ és $A_3A_1A_4$ háromszögek területösszege megegyezik $A_1A_2A_5$, $A_2A_3A_5$ és $A_3A_1A_5$ háromszögek területösszegével, azaz

$$r_1 + r_2 + r_5 + r_2 + r_3 + r_5 + r_3 + r_1 + r_5 = r_1 + r_2 + r_4 + r_2 + r_3 + r_4 + r_3 + r_1 + r_4,$$

azaz

$$r_5 = r_4,$$

ami ismét ellentmondás, tehát nincs olyan öt pont, amely kielégítené a feladat feltételeit.

1995/4. Határozzuk meg azt a maximális x_0 értéket, amelyre létezik a pozitív valós számoknak olyan $x_0, x_1, \dots, x_{1995}$ sorozata, amely kielégíti az alábbi két feltételt:

- (i) $x_0 = x_{1995};$
 (ii) $x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \frac{1}{x_i}$

minden $i = 1, 2, \dots, 1995$ esetén.

Megoldás. Hozzuk először az (ii) alatti képzési szabályt használhatóbb alakra úgy, hogy x_i -ben másodfokú egyenletté alakítsuk át:

$$x_i^2 - \left(\frac{x_{i-1}}{2} + \frac{1}{x_{i-1}} \right) x_i + \frac{1}{2} = 0,$$

ebből

$$(1) \quad x_i = \frac{x_{i-1}}{2} \quad \text{vagy} \quad (2) \quad x_i = \frac{1}{x_{i-1}}.$$

Ezek szerint a sorozat x_0 kezdő tagjából kiindulva a sorozat tagjait az előző tagból vagy felezéssel, vagy pedig reciprokképzéssel kapjuk meg. Ezek szerint a sorozat bármelyik tagja vagy

$$(3) \quad x_i = 2^k x_0, \quad \text{vagy} \quad x_i = \frac{2^k}{x_0}$$

alakú, ahol k valamilyen (pozitív, negatív vagy nulla) egészszet jelöl.

(i) szerint az 1995-ik képzési lépés után vagy

$$(4) \quad x_{1995} = 2^k x_0 = x_0, \quad \text{vagy} \quad (5) \quad x_{1995} = \frac{2^k}{x_0} = x_0, \quad \text{azaz } x_0^2 = 2^k$$

valamelyikének kell teljesülnie. Hogy x_0 -ból x_{1995} -höz eljuthassunk az (1) és (2) képzési szabályokat összesen 1995-ször, tehát páratlan sokszor kell alkalmaznunk. (4)-hez csak úgy juthatunk el, ha (2)-t páros sokszor alkalmazzuk, tehát (1)-et páratlan sokszor. Mivel (1) alkalmazása 2 kitevőjét valamilyen irányban 1-gyel változtatja meg és a kiindulásnál $x_0 = 2^0 x_0$ szerepel, ezért (4) fennállása esetén k páratlan, tehát $2^k \neq 1$. Mivel azonban $x_0 > 0$, (4)-ből ebben az esetben $2^k = 1$ következne, ami ellentmondás, tehát (4) nem állhat fenn.

Hogy (5)-höz juthassunk el, a (2) képzési szabályt legalább egyszer alkalmazni kell, és így (1)-et legfeljebb 1994-szer, ezért (5)-ben 2^k legfeljebb 2^{1994} lehet, ami azt jelenti, hogy x_0^2 maximuma legfeljebb 2^{1994} , és így

$$x_0 \leq \sqrt{2^{1994}} = 2^{997}.$$

Viszont $x_0 = 2^{997}$ lehetséges; ebben az esetben a tagok képzésére az első 1994 esetben (1)-et, az utolsó esetben pedig (2)-t kell alkalmazni; a maximális x_0 -lal képzett sorozat tehát:

$$x_0 = 2^{997}, \quad x_1 = 2^{996}, \quad \dots, \quad x_{997} = 2^0 = 1, \quad x_{998} = 2^{-1}, \quad \dots, \quad x_{1994} = 2^{-997}, \\ x_{1995} = 2^{997}.$$

Megjegyzés. A sorozat néhány kezdő elemének a felírásával meggyőződhetünk róla, hogy

$$x_i = 2^{k_i} x_0^{\varepsilon_i},$$

ahol $|k_i| \leq i$ és $\varepsilon_i = (-1)^{i+k_i}$, ezt teljes indukcióval formálisan be is bizonyíthatjuk, de következik az általunk használt gondolatmenetből is.

1995/5. Legyen $ABCDEF$ olyan konvex hatszög, amelyre

$$AB = BC = CD, \quad DE = EF = FA$$

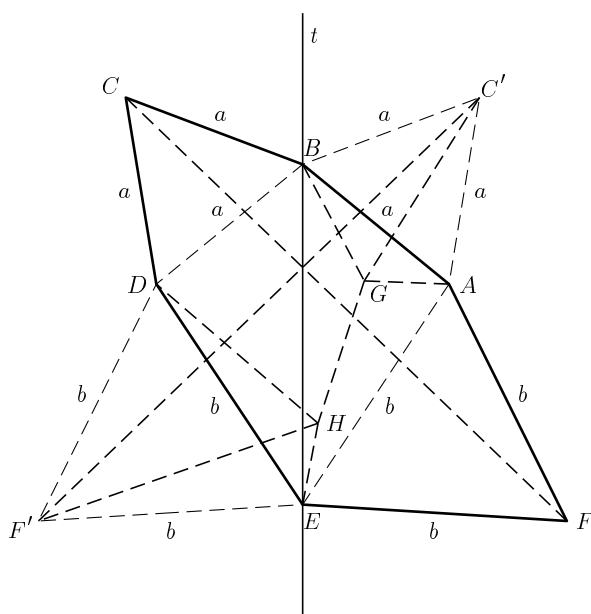
és

$$\angle BCD = \angle EFA = 60^\circ$$

teljesül. Legyen G és H a hatszög két olyan belső pontja, amelyekre $\angle AGB = \angle DHE = 120^\circ$. Bizonyítsuk be, hogy

$$(1) \quad AG + GB + GH + DH + HE \geq CF.$$

Megoldás. Legyen $AB = a$, $AE = b$. A feladat feltételei szerint BCD a oldalú, EFA pedig b oldalú szabályos háromszögek. Szerkesszünk az AB , ill. DE fölé kifelé $AC'B$, ill. $DF'E$ szabályos háromszögeket (1995/5.1. ábra). Mivel $ABDE$ deltoid, amelynek két oldala a , két oldala b hosszúságú, a teljes alakzat szimmetrikus a deltoid $BE = t$ szimmetriatengelyére. Ebből következik, hogy CF egyenlő a tükörképével, $C'F'$ -vel.



1995/5.1 ábra

G és H rajta vannak az $AC'B$, ill. $DF'E$ szabályos háromszögek köré írt körön, és ismert összefüggés szerint [43]

$$GC' = AG + GB, \quad HF' = DH + HE,$$

ezért az (1) bal oldalán levő összeg egyenlő a $C'GHF'$ töröttvonal hosszával. Mivel a töröttvonal hossza legalább akkora, mint $C'F'$, (1) bal oldali összege legalább akkora, mint $C'F' = CF$, amivel a feladat állítását bebizonyítottuk.

(1)-ben egyenlőség csakis akkor állhat fenn, ha H és G a $C'F'$ -n vannak.

1995/6. Legyen p páratlan prímszám. Határozzuk meg az $\{1, 2, \dots, 2p\}$ halmaz olyan A részhalmazainak a számát, amelyekre teljesül, hogy

- (i) A -nak p eleme van,
- (ii) A elemeinek az összege osztható p -vel.

Megoldás. Vágjuk szét a $H = \{1, 2, \dots, 2p\}$ halmazt két p elemű részhalmazra:

$$A = \{1, 2, \dots, p\}, \quad B = \{p+1, p+2, \dots, 2p\}.$$

Legyen most C a H -nak A -tól és B -től különböző p elemű részhalmaza; ez szükségképpen tartalmaz A -beli és B -beli elemeket is, legyenek az A -beli elemei

$$a_1, a_2, \dots, a_n \quad (1 \leq n \leq p-1).$$

Adjunk most hozzá C -nek minden A -beli eleméhez 1-et, és vegyük a kapott számok p -vel való osztási maradékát (azaz: a számokat mod p írjuk fel), a 0 maradék helyett azonban p -t szerepeltessünk. Az így módosított C részhalmazt jelölje C_1 . Hasonlóan: ha az a_i számokhoz 2-t, 3-at, \dots , p -t adunk hozzá és az előbbi értelemben mod p számolunk, rendre a C_2, C_3, \dots, C_p halmazokat kapjuk; itt nyilván C_p azonos C -vel. A C_i -k természetesen H -nak p elemű részhalmazai és egy osztályt alkotnak, közülük bármelyikből a mondott eljárással valamennyi C_i előáll és csakis a felsorolt C_i részhalmazok, más C -ből kiindulva ezek nem kaphatók meg.

Jelölje H egy tetszőleges p elemű C részhalmazában az elemek összegét $s(C)$; pl. $s(A) = \frac{p(p+1)}{2}$, $s(B) = s(A) + p^2$. $s(A)$ és $s(B)$ osztható p -vel, mert p páratlan. Mivel C_i és C_{i+1} elemeinek az összege n -nel különbözik, ha $i > j$

$$s(C_i) - s(C_j) \equiv (i - j)n \pmod{p}.$$

Viszont $i - j < p$ és $n < p$ miatt $(i - j)n$ nem osztható p -vel, ezért az $s(C_i)$ számok különböző maradékosztályba tartoznak mod p , s mivel a C_i részhalmazok száma éppen p , van közülük pontosan egy, amelyben $s(C_i) \equiv 0 \pmod{p}$, azaz elemeinek az összege osztható p -vel.

H -nak A -n és B -n kívül $\binom{2p}{p} - 2$ p elemű részhalmaza van, s ezek a fentiek szerint $\frac{1}{p} \left(\binom{2p}{p} - 2 \right)$ osztályba sorolhatók, és minden osztályban pontosan egy részhalmaz elemösszege osztható p -vel, H olyan p elemű részhalmazainak a száma (A -val és B -vel együtt), amelyekben az elemek összege osztható p -vel:

$$\frac{\binom{2p}{p} - 2}{p} + 2.$$

Megjegyzés. Feladatunk érdekes számelméleti mellékeredménye, hogy $\binom{2p}{p} - 2$ mindig osztható p -vel, ha p páratlan prím, mivel az előbbi eredmény kombinatorikai jelentésénél fogva mindig egész szám.

1996.

1996/1. Legyen $ABCD$ egy téglalap alakú tábla, amelynek oldalhosszai: $AB=20$, $BC=12$. A táblát felbontjuk 20×12 egységnégyzetre. Legyen r egy adott pozitív egész szám. Egy bábuval akkor és csakis akkor léphetünk valamelyik négyzetről egy másik négyzetre, ha a két négyzet középpontjának a távolsága \sqrt{r} . A feladat az, hogy olyan lépéssorozatot találjunk, amivel a bábuval eljuthatunk arról a négyzetről, amelynek egyik csúcsa A , arra a négyzetre, amelynek egyik csúcsa B .

- (a) Mutassuk meg, hogy a feladatnak nincs megoldása, ha r osztható 2-vel vagy 3-mal.
- (b) Mutassuk meg, hogy a feladat megoldható, ha $r=73$.
- (c) Van-e megoldása a feladatnak $r=97$ esetén?

Megoldás. A négyzetekre felosztott téglalapot a szemléletesség céljából egyszerűen sakktáblának tekintjük, és a könnyebb fogalmazás céljából az $ABCD$ téglalapot úgy helyezzük el a koordináta-rendszerben, hogy az A csúcsú kis négyzet középpontja az origó, a B csúcsúé a $(19, 0)$ pont, a D csúcsúé pedig a $(11, 0)$ legyen.

(a) Legyen r páros, és tegyük fel, hogy a bábu lépése a $\mathbf{v}(x, y)$ vektorral való eltolást jelent. Mivel $x^2 + y^2 = r$ páros, két négyzetszám összege csak akkor lehet páros, ha mindkettő párossága megegyezik, ezért x és y egyszerre páros vagy páratlan. A következőkben minden elmozdulást egy vízszintes (azaz az x tengellyel párhuzamos) és egy függőleges (az y tengellyel párhuzamos) elmozdulás eredőjének fogunk fel).

Színezzük a sakktábla mezőit a szokásos módon feketére és fehérre, és tegyük fel, hogy A mezője fekete. Ha x és y páros, a vízszintes és függőleges elmozdulások fekete mezőről fekete mezőre viszik a bábút; ha x és y páratlanok, akkor a vízszintes elmozdulás feketéről fehérre, a függőleges fehérről feketére visz, tehát az elmozdulás mindkét esetben fekete mezőn végződik. Mivel pedig B mezője fehér, a bábu nem juthat el oda.

Ha r 3-mal osztható, mivel a négyzetszámok $3k$ vagy $3k+1$ alakúak, $r = x^2 + y^2$ csak akkor lehet 3-mal osztható, ha x is és y is osztható 3-mal. Bontsuk most fel a végtelen sakktáblát 3×3 -as négyzetekre, és ezek mezőit színezzük három színnel az alábbi minta szerint:

Az A színe 1-es legyen, a B -é ebben az esetben 2-es. Minden vízszintes és függőleges elmozdulás (hosszuk 3-mal osztható) a kiindulási mezővel azonos színű mezőre vezet, ezért A -ból nem lehet eljutni B -be.

2	3	1
3	1	2
1	2	3

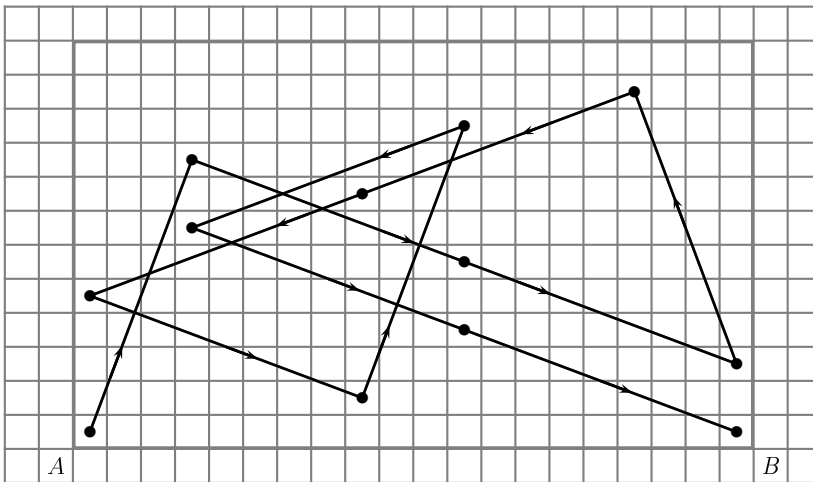
A

(b) $r = 73$ két négyzetszám összegére csak $73 = 8^2 + 3^2$ alakban bontható fel, ezért a lehetséges lépésvektorok:

$$(3, 8), (8, 3), (-8, 3), (3, -8), (-3, 8), (8, -3), (-3, -8), (-8, -3)$$

Ilyen vektorok összegeként kell a $(19, 0)$ -t megkapnunk ügyelve arra, hogy mindig a téglalapon belül maradjunk. Némi próbálkozás után találunk ilyen lépéssorozatot, a bábú egymást követő helyzeteit adjuk meg, föléljük írva, hogy melyik lépésvektort alkalmazzuk (1996/1.1. ábra).

$$\begin{aligned} (0, 0) &\xrightarrow{(3, 8)} (3, 8) \xrightarrow{(8, -3)} (11, 5) \xrightarrow{(8, -3)} (19, 2) \xrightarrow{(-3, 8)} (16, 10) \xrightarrow{(-8, -3)} (8, 7) \rightarrow \\ &\xrightarrow{(-8, -3)} (0, 4) \xrightarrow{(8, -3)} (8, 1) \xrightarrow{(3, 8)} (11, 9) \xrightarrow{(-8, -3)} (3, 6) \xrightarrow{(8, -3)} (11, 3) \xrightarrow{(8, -3)} (19, 0). \end{aligned}$$

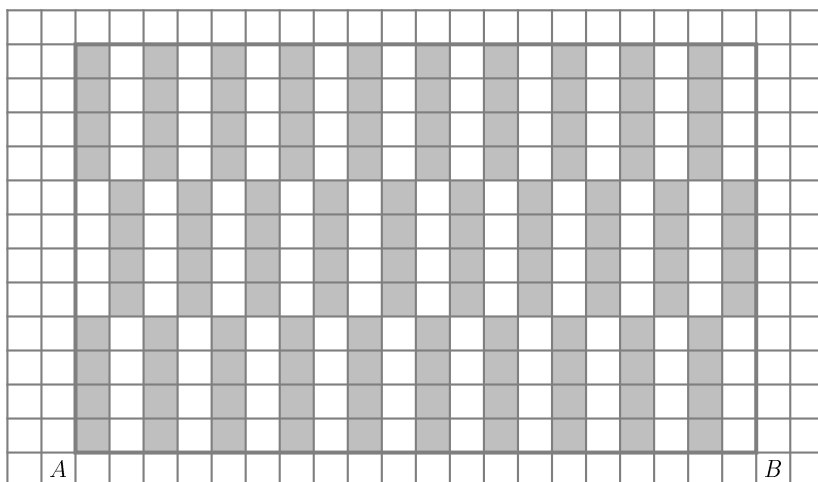


96/1.1. ábra

(c) 97 két négyzetszám összegeként $9^2 + 4^2$ alakban állítható elő, tehát a lehetséges elmozdulások vízszintesen jobbra vagy balra, függőlegesen lefelé vagy fölfelé 4, ill. 9 lehet. Színezzük a téglalap mezőit az 1996/1.2. ábrának megfelelően; A mezője fekete, B mezője fehér.

Ennél a színezésnél a bábú fekete mezőről indulna vízszintesen 4-et lépve fekete mezőre, innen függőlegesen 9-et lépve fekete mezőre jut; vízszintesen 9-et lépve feketéről fehérre, innen függőlegesen 4-et lépve ismét fekete mezőre jut.

Ha viszont függőlegesen 4-et lép, feketéről fehér mezőre lép, innen vízszintesen 9-et lépve fekete mezőre ér. Végül: ha fekete mezőről függőlegesen 9-et



96/1.2. ábra

lép, feketére ér, innen vízszintesen 4-et lépve ismét fekete mezőn köt ki, tehát minden esetben fekete mezőről indulva fekete mező a végeredmény, ezért A -ból nem juthat B -be.

Megjegyzés. Viszonylag egyszerűen bebizonyítható, hogy a (b) részben megadott 11 lépéses út a legrövidebb, ami a lépésszámot tekintve A -ból B -be vezet, és az egyes lépéseket ki lehet „számítani”; a megoldás ezt nem követelte meg; a legtöbben néhány próbálkozás árán gyorsan eljutottak egy megoldáshoz; természetesen más megoldások is léteznek.

1996/2. Legyen P az ABC háromszög olyan belső pontja, amelyre

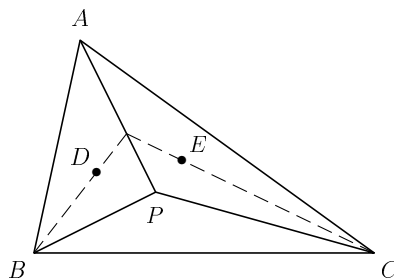
$$(1) \quad \angle APB < \angle ACB < \angle APC < \angle ABC <$$

teljesül. Legyen D , ill. E az APB , ill. APC háromszögek beírt körének középpontja. Mutassuk meg, hogy az AP , BD és CE egyenesek egy ponton mennek át.

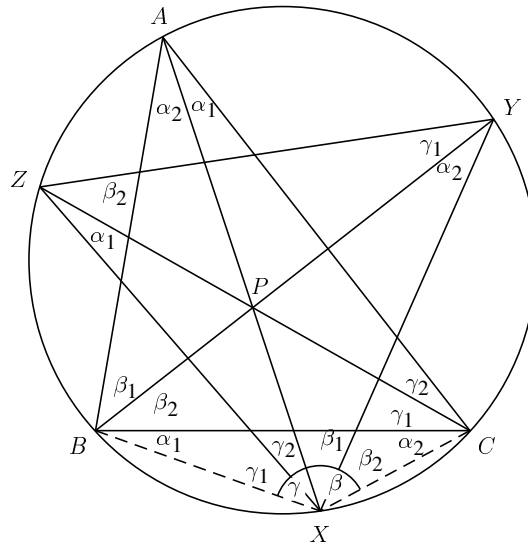
1. megoldás. Mivel D és E beírt körök középpontjai, ezért BD az ABP -nek, CE pedig az ACP -nek felezője; ezek akkor és csakis akkor metszik egymást az AP szakaszon, ha mindkettő ugyanolyan arányban, tehát a szögfelezőtétel szerint az őket közrefogó oldalak arányában osztják ketté az AP szakaszt (1996/2.1. ábra). Ennek az a feltétele, hogy

$$(2) \quad \frac{AB}{PB} = \frac{AC}{PC}, \quad \text{azaz} \quad \frac{AB}{AC} = \frac{PB}{PC},$$

a következőkben ennek bizonyítására törekszünk.



96/2.1. ábra



96/2.2. ábra

Az ABC köré írt kört az AP , BP , CP egyenesek másodszor az X , Y , Z pontokban metszik (1996/2.2. ábra). Ugyanezek az egyenesek az ABC α , β , γ szögeit az ábránkon látható módon α_1 , α_2 ; β_1 , β_2 ; γ_1 , γ_2 részekre osztják fel. A kerületi szögek egyenlőségéből következik, hogy az XYZ háromszög szögei:

$$X\angle = \beta_1 + \gamma_2, \quad Y\angle = \alpha_2 + \gamma_1, \quad Z\angle = \alpha_1 + \beta_2.$$

Az $APB\angle$ -et az ACP és BCP háromszögek egy-egy külső szögének összegével előállítva kapjuk, hogy

$$APB\angle - ACB\angle = \alpha_1 + \gamma_2 + \beta_2 + \gamma_1 - \gamma_1 - \gamma_2 = \alpha_1 + \beta_2.$$

Hasonló módon nyerjük, hogy

$$APC\angle - ABC\angle = \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 - \beta_1 - \beta_2 = \alpha_2 + \gamma_1,$$

amiből (1) alapján

$$(3) \quad \alpha_1 + \beta_2 = \alpha_2 + \gamma_1$$

következik. Ez azonban azt jelenti, hogy az XYZ háromszögben $Z\angle = Y\angle$, tehát a háromszög egyenlő szárú:

$$(4) \quad XY = ZX.$$

Vegyük még észre, hogy az ABP és YXP , ill. ACP és ZXP hasonló háromszögpárok, mivel egy páron belül a szögek rendre megegyeznek. A hasonlóság miatt

$$\frac{AB}{PB} = \frac{XY}{XP}, \quad \text{ill.} \quad \frac{AC}{PC} = \frac{ZX}{XP},$$

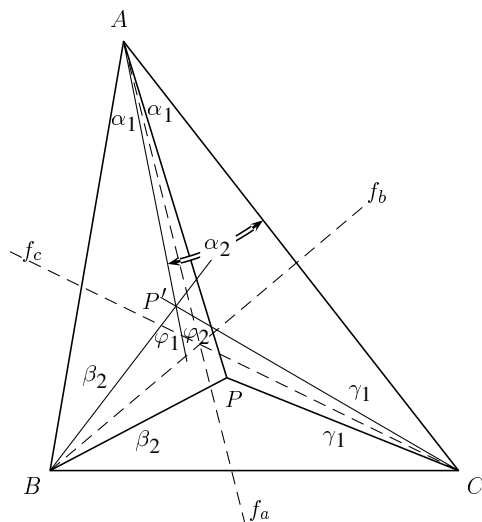
amiből (4) miatt a bizonyítandó $\frac{AB}{PB} = \frac{AC}{PC}$ következik.

2. megoldás. Felhasználjuk az előző megoldás néhány részeredményét. Az 1996/2.2. ábra viszonyait megfigyelve észrevehetjük, hogy a PBX , ill. PCX háromszögekben $PXB \sphericalangle = \gamma$ és $PXC \sphericalangle = \beta$, továbbá $PBX \sphericalangle = \alpha_1 + \beta_2$, $PCX \sphericalangle = \alpha_2 + \gamma_1$, és ezért (3) miatt $PBX \sphericalangle = PCX \sphericalangle$. A szinusztételt a PBX , PCX , majd az ABC háromszögre alkalmazva kapjuk, hogy

$$\frac{PB}{PC} = \frac{PB}{PX} \cdot \frac{PX}{PC} = \frac{\sin \gamma}{\sin PBX \sphericalangle} \cdot \frac{\sin PCX \sphericalangle}{\sin \beta} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{AB}{AC},$$

ami (2) alapján éppen a bizonyítandóval egyenértékű.

3. megoldás. A feladat egy érdekes összefüggésére mutatott rá Frenkel Péter versenydolgozatában. Felhasználjuk a következő tételt [41]: ha P az ABC háromszög belső pontja, és ha a PA egyenest tükrözzük az $A \sphericalangle$ felezőjére, PB -t a $B \sphericalangle$ felezőjére és PC -t a $C \sphericalangle$ felezőjére, a tükörképek egy ponton mennek át.



96/2.3. ábra

A PA , PB , PC egyenesek az ABC háromszög szögeit az 1996/2.2. ábrán lévő módon osztják fel. Tükrözzük most a PA , PB , PC egyeneseket a bevezetőben ismertetett tétel szerint a háromszög f_a , f_b , ill. f_c szögfelezőjére, a tükörképek e tétel szerint egy P' pontban metszik egymást (1996/2.3. ábra). A tükrözés miatt $P'BA \sphericalangle = \beta_2$ és $P'CA \sphericalangle = \gamma_1$. Az AP' egyenes a $BP'C \sphericalangle$ -et a φ_1 és φ_2 részekre osztja; a külsőszög-tétel szerint

$$\varphi_1 = \alpha_1 + \beta_2, \quad \varphi_2 = \alpha_2 + \gamma_1,$$

ez (3) miatt azt jelenti, hogy $\varphi_1 = \varphi_2$, tehát az AP' egyenes a $BP'C \sphericalangle$ felezője.

Legyen a $BP'C$ háromszög szögfelezőinek a metszéspontja K . Tükrözzük a KA , KB , KC egyeneseket rendre az ABC háromszög f_a , f_b , f_c szögfelezőire,

bevezető tételünk szerint ezek a tükörképek egy pontban metszik egymást. A KA egyenes azonos a $P'A$ egyenessel, ennek tükörképe f_a -ra a PA egyenes; a KB szögfelező tükörképe a DB szögfelező, a KC szögfelező tükörképe az EC szögfelező, mivel a szög tükrözésekor a szögfelező szögfelezőbe megy át. Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

Megjegyzés. A (2) alatti összefüggés azt jelenti, hogy a feladat feltételeit kielégítő P pont B -től és C -től mért távolságainak az aránya c/b -vel egyenlő. Az ilyen pontok pedig az ún. Apollóniosz-körön vannak rajta; ennek az átmérője az A csúcshoz tartozó belső és külső szögfelezők BC -vel alkotott metszéspontjai közötti szakasszal egyenlő.

1996/3. Legyen $S = \{0, 1, \dots\}$ a nemnegatív egész számok halmaza. Határozzuk meg az összes olyan f függvényt, ami S -en van értelmezve és az értékei is S -ből valók, és amire teljesül

$$(1) \quad f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$$

minden S -beli m, n elemre.

Megoldás. Ha $m = n = 0$, (1)-ből

$$f(f(0)) = f(f(0)) + f(0)$$

következik, ami azt jelenti, hogy $f(0) = 0$. Legyen most $m = 0$, (1) így alakul

$$f(f(n)) = f(f(0)) + f(n) = f(n);$$

f lényeges tulajdonságát kaptuk meg ezzel:

$$(2) \quad f(f(n)) = f(n).$$

Ezzel (1) így írható:

$$(3) \quad f(m + f(n)) = f(m) + f(n),$$

a továbbiakban f -nek ezt a tulajdonságát használjuk fel.

Az $f(x)$ azonosan nulla függvény kielégíti (1)-et, további vizsgálatainkból ezt az esetet kizárjuk. Az x helyet f fixpontjának mondjuk, ha $f(x) = x$. (2)-ből következik, hogy f -nek minden $f(n)$ érték fixpontja. Legyen f legkisebb pozitív fixpontja a , tehát $f(a) = a$. Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy ka is fixpont, ha k pozitív egész. $k = 1$ -re az állítás azonos a definícióval; tegyük fel, hogy $f((k-1)a) = (k-1)a$.

(3)-ban $m = a$, $n = (k-1)a$ helyettesítéssel:

$$f(ka) = f(a + f((k-1)a)) = f(a) + f((k-1)a) = a + (k-1)a = ka,$$

tehát ka is fixpont.

Megmutatjuk, hogy f összes fixpontja ka alakú, ahol $k \geq 1$ egész. Legyen ui. $b = aq + r$ ($q > 0$ egész, r egész, $0 \leq r < a$) fixpont. Az előbbieket szerint qa

fixpont, ezért (3) felhasználásával

$$b = f(b) = f(aq + r) = f(r + f(aq)) = f(r) + f(aq) = f(r) + aq,$$

azaz

$$aq + r = f(r) + aq, \quad \text{tehát} \quad f(r) = r.$$

Mivel azonban $r < a$ és a a legkisebb pozitív fixpont, $r = 0$, tehát $b = aq$; ez azt jelenti, hogy f minden fixpontja a -nak pozitív egész többszöröse. Minthogy azonban minden $f(n)$ érték fixpont, ezért minden $f(n)$ ka alakú.

Ha $0 \leq i < a$, legyen $f(i) = n_i a$ (n_i pozitív egész, $n_0 = 0$). Végül, ha n tetszőleges egész és $n = ka + i$ alakú, ahol $0 \leq i < a$, akkor (3)-ból

$$f(n) = f(ka + i) = f(i + f(ka)) = f(i) + f(ka) = n_i a + ka,$$

tehát

$$(4) \quad f(n) = f(ka + i) = (n_i + k)a, \quad (0 \leq i < a).$$

Ennek alapján megadhatjuk az (1)-et kielégítő függvényeket. Adjunk meg egy tetszőleges pozitív egész a -t, amelyről kikötjük, hogy f legkisebb pozitív fixpontja legyen, és adjunk meg tetszőlegesen S -ből az $f(1) = n_1$, $f(2) = n_2$, \dots , $f(a-1) = n_{a-1}$ értékeket, és legyen $f(0) = 0$.

Megmutatjuk, hogy a fenti kikötések mellett a (4) alatti függvények az (1) megoldásai. Hogy csak ezek lehetnek megoldások, azt már beláttuk, hogy viszont az így értelmezett f függvények kielégítik (1)-et azt most látjuk be. Legyen ui .

$$m = k_1 a + i, \quad n = k_2 a + j \quad (0 \leq i, j < a).$$

Ebben az esetben

$$\begin{aligned} f(m + f(n)) &= f(k_1 a + i + n_j a + k_2 a) = f((k_1 + k_2 + n_j)a + i) = \\ &= (k_1 + k_2 + n_i + n_j)a, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(f(m)) + f(n) &= f((k_1 + n_i)a) + f(k_2 a + j) = (k_1 + n_i)a + (k_2 + n_j)a = \\ &= (k_1 + k_2 + n_i + n_j)a, \end{aligned}$$

tehát (1) valóban teljesül.

Megjegyzés. Mivel $n = ka + i$ esetén $k = \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor$, (4)-et így is írhatjuk:

$$f(n) = \left(\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor + n_i \right) a.$$

1996/4. a és b olyan pozitív egész számok, amelyekre teljesül az, hogy $15a + 16b$ és $16a - 15b$ mindegyike négyzetszám. Határozzuk meg ezen két négyzetszám minimumának legkisebb lehetséges értékét.

Megoldás. Legyen $15a + 16b = r^2$, $16a - 15b = s^2$ (r és s egész). Ebből

$$\begin{aligned} r^4 + s^4 &= 225(a^2 + b^2) + 256(a^2 + b^2) + 2 \cdot 15 \cdot 16ab - 2 \cdot 15 \cdot 16ab = \\ &= 481(a^2 + b^2) = 13 \cdot 37(a^2 + b^2). \end{aligned}$$

Mivel $(13, 37) = 1$, $r^4 + s^4$ osztható 13-mal és 37-tel is.

Egy egész szám negyedik hatványának 13-mal való osztási maradékai

$$0, \quad 1, \quad 3, \quad 9$$

lehetnek; ez a negyedik hatványok vizsgálatából egyszerűen adódik. Két negyedik hatvány összege ezek szerint csak akkor adhat 0 maradékot 13-mal osztva, ha eredetileg is oszthatók 13-mal.

Az egész számok negyedik hatványának 37-tel való osztási maradékai:

$$0, \quad 1, \quad 7, \quad 9, \quad 10, \quad 12, \quad 16, \quad 26, \quad 33, \quad 34$$

lehetnek, ezek szerint két negyedik hatvány összege csak akkor osztható 37-tel, ha az összeadandók is oszthatók vele. Így tehát $r^4 + s^4$ csak akkor lehet 37-tel és 13-mal osztható, ha r és s is osztható velük, tehát szorzatukkal, 481-gyel is; ezért

$$r \geq 481, \quad s \geq 481.$$

r és s legkisebb értéke 481 lehet, ez azonban meg is felel, mert a

$$15a + 16b = 481^2,$$

$$16a - 15b = 481^2$$

egyenletrendszernek van pozitív egész megoldása:

$$a = 481 \cdot 31 = 14\,911, \quad b = 481.$$

A két négyzetszám minimumának legkisebb értéke ezért

$$481^2 = 231\,361.$$

Megjegyzés. Annak bizonyítását, hogy $x^4 + y^4$ csak akkor osztható 13-mal, illetve 37-tel, ha x és y külön-külön is osztható velük, kevesebb számolással is elvégezhetjük a Fermat-féle kongruencia-tétel felhasználásával [32].

Világos, hogy ha $x^4 + y^4$ osztható 13-mal és x, y közül az egyik osztható 13-mal, akkor a másiknak is oszthatónak kell lennie. Tegyük fel ezért, hogy egyik sem osztható 13-mal, viszont $x^4 + y^4 \equiv 0 \pmod{13}$, azaz $x^4 \equiv -y^4$; ebből viszont $x^{12} \equiv -y^{12}$ következik. A Fermat-kongruenciátétel szerint azonban

$$x^{12} \equiv 1 \quad \text{és} \quad y^{12} \equiv 1 \pmod{13},$$

ezért $1 \equiv -1$, azaz $2 \equiv 0$, ami viszont lehetetlenség, ezért x -nek és y -nak is oszthatónak kell lennie 13-mal.

Hasonlóan juthatunk ellentmondásra abból a feltevésből is, hogy $x^4 + y^4 \equiv 0 \pmod{37}$, de x és y nem osztható 37-tel. Ez ui. azt jelentené, hogy $x^4 \equiv -y^4$, azaz $x^{36} \equiv -y^{36}$, holott ismét a Fermat-kongruenciátételt alkalmazva kapjuk, hogy

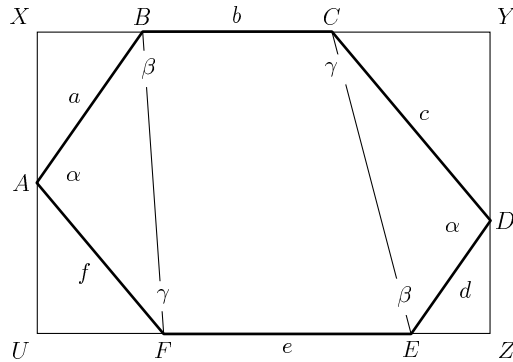
$$x^{36} \equiv 1 \quad \text{és} \quad y^{36} \equiv 1 \pmod{37},$$

ami az előzőhöz hasonló ellentmondásra vezet.

1996/5. Az $ABCDEF$ konvex hatszögre teljesül, hogy AB párhuzamos ED -vel, BC párhuzamos FE -vel és CD párhuzamos AF -fel. Jelölje R_A , R_C , ill. R_E az FAB , BCD , DEF háromszögek körülírt köreinek a sugarát, és jelölje p a hatszög területét. Bizonyítsuk be, hogy

$$(1) \quad R_A + R_C + R_E \geq \frac{p}{2}.$$

Megoldás. A szemközti oldalak párhuzamosságából következik, hogy $A\angle = D\angle = \alpha$, $B\angle = E\angle = \beta$ és $C\angle = F\angle = \gamma$. Szerkesszünk téglalapot a hatszöghöz pl. úgy, hogy a BC és EF egyenesekre az A és D csúcsokból merőlegességeket állítunk (1996/5.1. ábra), az így kapott téglalap legyen $XYZU$.



96/5.1. ábra

Vezessük be az $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DE = d$, $EF = e$, $FA = f$ jelöléseket; ezekkel

$$XA = a \sin \beta, \quad AU = f \sin \gamma, \quad YD = c \sin \gamma, \quad DZ = d \sin \beta.$$

Mivel $BF \geq XU = YZ$, $2BF \geq XU + YZ$, azaz

$$2BF \geq XA + AU + YD + DZ = (a + d) \sin \beta + (c + f) \sin \gamma.$$

Az FAB háromszög köré írt kör sugara:

$$R_A = \frac{BF}{2 \sin \alpha} = \frac{2BF}{4 \sin \alpha} \geq \frac{1}{4} \left((a + d) \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} + (c + f) \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \right).$$

Hasonló módon kapjuk, hogy

$$R_C \geq \frac{1}{4} \left((c + f) \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} + (b + e) \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \right),$$

$$R_E \geq \frac{1}{4} \left((b + e) \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} + (a + d) \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \right).$$

E három egyenlőtlenség összegzéséből nyerjük, hogy

$$4(R_A + R_C + R_E) \geq$$

$$\geq (a+d) \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} + \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \right) + (c+f) \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} + \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \right) + (b+e) \left(\frac{\sin \gamma}{\sin \beta} + \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \right).$$

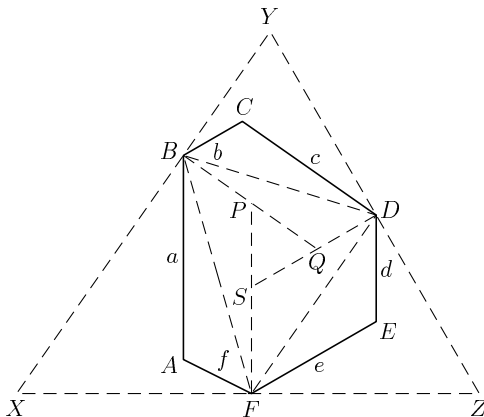
Mivel egy pozitív számnak és reciprokanak az összege legalább 2,

$$4(R_A + R_C + R_E) \geq 2(a+b+c+d+e+f) = 2p,$$

$$R_A + R_C + R_E \geq \frac{p}{2},$$

ezt kellett bizonyítanunk; egyenlőség csak szabályos hatszög esetén áll fenn.

Megjegyzés. Feladatunk tétele szoros kapcsolatban van az Erdős–Mordell egyenlőtlenséggel, ill. annak egy általánosításával [33].



96/5.2. ábra

Szerkesszük meg hatszögünk belsejében az $FABP$, $BCDQ$, $DEFS$ paralelogrammákat, majd állítsunk merőlegeseket az F , B , D csúcsokban rendre a PF , QB , SD egyenesekre, ezek egy XYZ háromszöget zárnak közre (X a PF -re és QB -re merőleges egyenesek, Y a QB -re és SD -re merőleges egyenesek metszéspontja) (1996/5.2. ábra).

Az $XFPB$ négyszög húrnégyszög, mert F -ből és B -ből PX derékszögben látszik. A húrnégyszög

köré írt körének sugara azonos az FPB háromszög és a vele egybevágó FAB háromszög köré írt körének a sugarával, R_A -val, viszont PX ennek a körnek az átmérője, tehát $PX = 2R_A$. Hasonlóan kapjuk, hogy $QY = 2R_C$ és $SZ = 2R_E$. Ábránkról megfigyelhetjük, hogy $PF = a$, $SF = d$, $QB = c$, $PB = f$, $SD = e$, $QD = b$.

Az (1) tételt

$$2R_A + 2R_C + 2R_E \geq a + b + c + d + e + f$$

alakba átírva, és az előbb felsorolt egyenlőségekből adódó helyettesítéseket elvégezve kapjuk, hogy

$$(2) \quad PX + QY + SZ \geq PF + SF + QB + PB + SD + QD,$$

ami az Erdős–Mordell egyenlőtlenség egy általánosítása:

Ha az XYZ háromszögben F , B , D a ZX , XY , YZ oldalak egy-egy belső pontja és ezekben a pontokban a pontokat tartalmazó oldalakra merőlegeseket állítunk úgy, hogy az F -ben és B -ben állított merőlegesek a P pontban, a B -ben és D -ben állított merőlegesek a Q pontban, a D -ben és F -ben állított merőlegesek az S pontban metszik egymást (P , Q , S belső pontok), akkor (2) teljesül.

Ha a hatszög középpontosan szimmetrikus, azaz szemközti oldalai párhuzamosak és egyenlők, akkor $P \equiv Q \equiv S$, tehát (2) éppen az Erdős–Mordell egyenlőtlenséggel azonos.

Feladatunk megoldása ezek szerint az Erdős–Mordell egyenlőtlenségnek és általánosításának a bizonyítását is jelenti. Lehetséges azonban (2)-nek közvetlen bizonyítása is, ebből viszont feladatunknak a megoldása is következik [42].

1996/6. Legyenek n, p, q olyan pozitív egészek, amelyekre teljesül: $n > p + q$. Legyenek továbbá x_0, x_1, \dots, x_n olyan egész számok, amelyek kielégítik az alábbi feltételeket:

(a) $x_0 = x_n = 0$;

(b) minden i egész számra, amire $1 \leq i \leq n$, igaz az $x_i - x_{i-1} = p$ vagy az $x_i - x_{i-1} = -q$ állítás.

Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan (i, j) indexpár, amire $i < j$ és $(i, j) \neq (0, n)$, és amire fennáll: $x_i = x_j$.

Megoldás. p és q legnagyobb közös osztója valamennyi x_i -nek osztója, mivel $x_1 = x_1 - x_0 = p$ vagy $-q$ -ből x_1 -re igaz az állítás, és ebből minden x_i -re következik teljes indukcióval. Ezért p -t, q -t és minden x_i -t (p, q) -val elosztva a feladat feltételei továbbra is teljesülnek, ezért feltehetjük, hogy p és q relatív prímek, azaz $(p, q) = 1$.

Induljunk ki a következő összegből:

$$(x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_2 - x_1) + (x_1 - x_0) = 0.$$

Tegyük fel, hogy ebben k számú zárójelben p , $n - k$ számúban pedig $-q$ áll, tehát $pk - q(n - k) = 0$. Mivel $(p, q) = 1$, ez azt jelenti, hogy q osztója k -nak, tehát $k = aq$ (a pozitív egész). Ebből $apq - q(n - aq) = 0$,

$$(1) \quad n = a(p + q),$$

s mivel $n > p + q$, $a > 1$.

Vezessük most be az

$$y_i = x_{i+p+q} - x_i \quad (i = 0, 1, \dots, n - (p + q))$$

jelölést; a továbbiakban az y_i -ket fogjuk vizsgálni; a feladat állításának bizonyítására elegendő megmutatni, hogy van nullával egyenlő y_i , hiszen akkor $x_i = x_{i+p+q}$.

Legyen az

$$y_i = (x_{i+p+q} - x_{i+p+q-1}) + (x_{i+p+q-1} - x_{i+p+q-2}) + \dots \\ \dots + (x_{i+2} - x_{i+1}) + (x_{i+1} - x_i)$$

$p+q$ tagú összegben a p értékű zárójelek száma r , a $-q$ értékűek száma ezért $p+q-r$, ezért

$$(2) \quad y_i = rp - (p+q-r)q = (p+q)(r-q),$$

ez azt jelenti, hogy minden y_i osztható $(p+q)$ -val. Vizsgáljuk most meg az $y_{i+1} - y_i$ különbséget:

$$y_{i+1} - y_i = (x_{i+p+q+1} - x_{i+1}) - (x_{i+p+q} - x_i) = (x_{i+p+q+1} - x_{i+p+q}) - (x_{i+1} - x_i).$$

Mivel az utóbbi két zárójel mindegyikében p vagy $-q$ áll

$$y_{i+1} - y_i = \begin{cases} 0, \\ \text{vagy } p+q, \\ \text{vagy } -(p+q), \end{cases}$$

azaz

$$(3) \quad y_{i+1} - y_i = c(p+q), \quad \text{ahol } c=0 \text{ vagy } 1 \text{ vagy } -1.$$

Nézzük most a következő összeget, figyelembe véve, hogy (1) miatt $x_n - x_{n-(p+q)} = x_{a(p+q)} - x_{(a-1)(p+q)}$:

$$(x_{p+q} - x_0) + (x_{2(p+q)} - x_{p+q}) + (x_{3(p+q)} - x_{2(p+q)}) + \dots + (x_{a(p+q)} - x_{(a-1)(p+q)}) = 0,$$

azaz

$$y_0 + y_{p+q} + y_{2(p+q)} + y_{3(p+q)} + \dots + y_{n-(p+q)} = 0.$$

Ez az egyenlőség azt jelenti, hogy nem lehet valamennyi y_i azonos előjelű. Ebből következik, hogy a

$$(4) \quad y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-(p+q+1)}, y_{n-(p+q)}$$

sorozatban vagy van olyan pozitív tag, amely után nem pozitív tag következik, vagy pedig van olyan negatív, amely után nem negatív tag jön a sorozatban. Tegyük fel pl. hogy $y_k > 0$ és $y_{k+1} \leq 0$ és (3) alapján $y_k = c_1(p+q)$, $y_{k+1} = c_2(p+q)$, $c_1 > 0$, $c_2 \leq 0$ egészek, ezért $c_2 - c_1 < 0$. (2) miatt

$$y_{k+1} - y_k = (c_2 - c_1)(p+q) = -(p+q),$$

tehát $c_2 - c_1 = -1$, $c_1 = c_2 + 1$, ez viszont azt jelenti, hogy

$$0 < c_2 + 1 \leq 1,$$

amiből $c_2 = 0$ következik, tehát $y_{k+1} = 0$; ezt kellett bizonyítanunk.

Hasonlóan kapjuk ugyanezt az eredményt, ha a (4) sorozatban van olyan negatív tag, amely után nemnegatív tag következik.

Megjegyzések. 1. A feladatban megjelölt tulajdonsággal rendelkezik pl. a következő sorozat ($n=15$, $p=3$, $q=2$, $a=3$):

$$0, 3, 6, 9, 7, \quad 5, 8, 11, 9, 7, \quad 10, 8, 6, 4, 2, \quad 0.$$

2. Megoldásunk során természetsszerűleg felmerül a kérdés, hogy hogyan lehet arra rájönni, hogy éppen az y_i -k bevezetése célravezető. Ez a lépés az első

pillanatban valóban mesterkéltnak tűnik, de ha megkísérünk pl. (1) figyelembe vételével egy, a feladat követelményeinek eleget tevő sorozatot készíteni (mint pl. előző sorozatunk), akkor annak a vizsgálata rávezet arra, hogy a $p + q$ távolságra levő tagok között kell első sorban az egyenlőket keresnünk.

1997.

1997/1. A sík egész koordinátájú pontjai egységnégyzetek csúcsai. Ezeket a négyzeteket váltakozva fehérre és feketére színezzük (mint a sakktablán).

Pozitív egészek tetszőleges (m, n) párja esetén tekintsünk egy olyan derékszögű háromszöget, amelynek csúcsai egész koordinátájúak és amelynek befogói, amelyek hossza m és n , a négyzetek éleire illeszkednek.

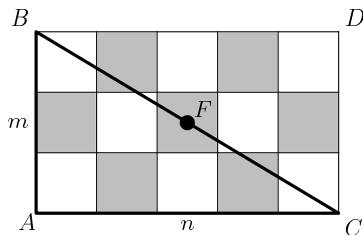
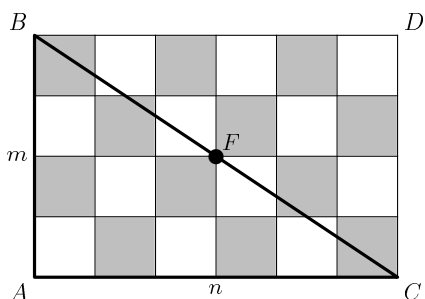
Legyen S_1 a háromszög fekete színű részének az összterülete, S_2 pedig a fehér színű rész összterülete. Legyen

$$f(m, n) = |S_1 - S_2|.$$

- Számítsuk ki $f(m, n)$ -et minden olyan m és n pozitív egész szám esetén, amelyek vagy mindketten párosak, vagy mindketten páratlanok.
- Bizonyítsuk be, hogy $f(m, n) \leq \frac{1}{2} \max(m, n)$ minden m és n -re.
- Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan c állandó, hogy $f(m, n) < c$ minden (m, n) párra teljesüljön.

Megoldás. (a) Egyszerűség kedvéért egy $XYZU \dots$ sokszög által lefedett fekete területet jelölje $S_1(XYZU \dots)$, a lefedett fehér területet $S_2(XYZU \dots)$. Legyen $AB = m$, $AC = n$, egészítsük ki az ABC derékszögű háromszöget az átfogó F felezőpontjára való tükrözéssel $ABDC$ téglalappá. Mivel páros befogók esetén AC felezőpontja rácspont, páratlan befogók esetén rácsnégyzet közép-pontja, a tükrözés minden négyzetet vele azonos színű négyzetbe visz át, azaz azonos színű területeket feleltet meg egymásnak (1997/1.1. ábra), ezért

$$S_1(ABC) = S_1(DCB) \quad \text{és} \quad S_2(ABC) = S_2(DCB).$$



97/1.1. ábra

Tehát:

$$S_1(ABC) = \frac{1}{2}S_1(ABDC) \quad \text{és} \quad S_2(ABC) = \frac{1}{2}S_1(ABDC).$$

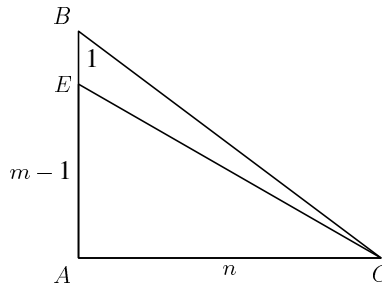
Ebből következik, hogy

$$f(m, n) = |S_1(ABC) - S_2(ABC)| = \frac{1}{2}|S_1(ABDC) - S_2(ABDC)|.$$

Ha m és n páros, a téglalapban ugyanannyi a fekete és fehér mezők száma; ha mindkettő páratlan, a téglalap területe is páratlan, és így az egyik színű mezőből eggyel több van, mint a másikkól.

$$f(m, n) = \begin{cases} 0, & \text{ha } m \text{ és } n \text{ páros,} \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } m \text{ és } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

(b) Mivel m és n értéke legalább 1, ezért az állítás (a)-ból következik, ha m és n párossága megegyezik.



97/1.2. ábra

Tegyük fel ezért, hogy n páros és m páratlan. Válasszunk AB -n olyan E pontot, hogy $BE = 1$ legyen (1997/1.2. ábra). Ebben az esetben $EA = m - 1$, s mivel $m - 1$ és n páros, $f(m - 1, n) = 0$. Továbbá:

$$S_1(ABC) = S_1(AEC) + S_1(EBC), \quad S_2(ABC) = S_2(AEC) + S_2(EBC).$$

Ebből

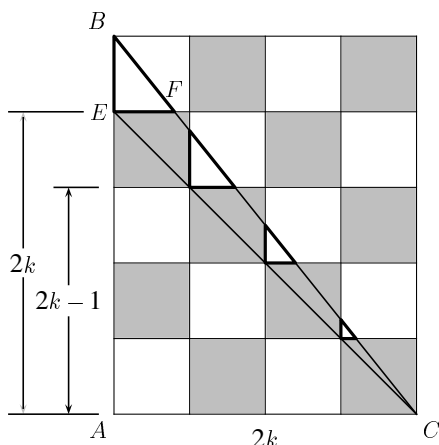
$$\begin{aligned} f(m, n) &= |S_1(ABC) - S_2(ABC)| = |S_1(EBC) - S_2(EBC)| \leq \\ &\leq EBC \text{ területe} = \frac{n}{2} \leq \frac{1}{2} \max(m, n), \end{aligned}$$

ami bizonyítandó volt.

(c) Lényegében azt kell megmutatnunk, hogy $f(m, n)$ nem korlátos, tehát akármilyen nagy pozitív értéket felvehet. Megmutatjuk, hogy ez lehetséges pl. $m = 2k + 1$, $n = 2k$ esetén (k pozitív egész).

Ugyanúgy, mint a (b) résznél, válasszunk AB -n egy E pontot, amelyre $BE = 1$ teljesül; ebben az esetben $AC = AE = 2k$, és

$$f(2k+1, 2k) = |S_1(EBC) - S_2(EBC)|.$$



97/1.3. ábra

Figyeljük meg az 1997/1.3. ábrát; feltehetjük, hogy az ACE egyenlő szárú derékszögű háromszög CE átfogója fekete mezőkön halad végig; számítsuk ki az EBC háromszögben a fehér mezők összterületét. Az ábrán BEF -fel jelölt háromszög hasonló ABC -hez, és ugyanez igaz az EBC -ben található összes fehér háromszögre. Mivel $BE = 1$ és $EF = \frac{2k}{2k+1}$, BEF területe $\frac{k}{2k+1}$. A sorban egymást követő fehér háromszögek BEF -nek

$$\frac{2k-1}{2k}, \frac{2k-2}{2k}, \frac{2k-3}{2k}, \dots, \frac{1}{2k}$$

arányú kicsinyítettjei, tehát területük BEF területének

$$\left(\frac{2k-1}{2k}\right)^2, \left(\frac{2k-2}{2k}\right)^2, \left(\frac{2k-3}{2k}\right)^2, \dots, \left(\frac{1}{2k}\right)^2$$

szeresei. A szóban forgó fehér háromszögek összterülete tehát

$$\begin{aligned} S_2(EBC) &= \frac{k}{2k+1} \left(1 + \left(\frac{2k-1}{2k}\right)^2 + \left(\frac{2k-2}{2k}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2k}\right)^2 \right) = \\ &= \frac{k}{(2k+1)4k^2} \left((2k)^2 + (2k-1)^2 + \dots + 1^2 \right) = \\ &= \frac{1}{4k(2k+1)} \frac{2k(2k+1)(4k+1)}{6} = \frac{4k+1}{12}. \end{aligned}$$

Mivel az EBC területe k , benne a fekete háromszögek összterülete:

$$S_1(EBC) = k - \frac{4k+1}{12} = \frac{8k-1}{12}.$$

Ebből

$$f(2k+1, 2k) = \frac{8k-1}{12} - \frac{4k+1}{12} = \frac{2k-1}{6},$$

ami k növelésével tetszőleges nagy lehet, tehát $f(m, n)$ valóban nem korlátos.

1997/2. Az ABC háromszögben az A -nál levő szög a legkisebb. A háromszög körülírt körét a B, C pontok két ívre bontják. Legyen U annak a B és C közötti ívnek a belső pontja, amelyik nem tartalmazza A -t.

AB és AC felezőmerőlegese az AU egyenest a V , ill. W pontban metszi. A BV és CW egyenesek metszéspontja T . Bizonyítsuk be, hogy

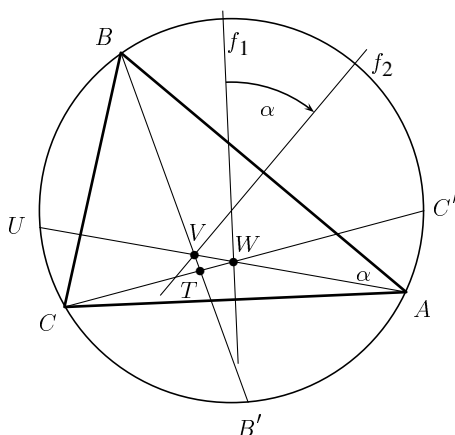
$$AU = TB + TC.$$

Megoldás. Jelölje BV és CW metszéspontjait a körülírt körrel B' , ill. C' (1997/2.1. ábra), és legyen AC felezőmerőlegese f_1 , AB felezőmerőlegese pedig f_2 .

Mivel CC' tükörképe f_1 -re AU , és AU tükörképe f_2 -re BB' , ezért $CC' = AU = BB'$. Viszont egy körben két egymást metsző egyenlő húr végpontjai szimmetrikus trapézot alkotnak, ennél fogva $CB'C'B$ szimmetrikus trapéz és így $TC = TB'$, következésképpen

$$AU = BB' = TB + TB' = TB + TC,$$

ami bizonyítandó volt.



97/2.1. ábra

Megjegyzés. Mivel f_1 -et f_2 -be α szögű elforgatás viszi át, a felhasznált két tükrözés egymásutánja 2α szögű elforgatást eredményez. Ha $\alpha = 90^\circ$, ez éppen 180° -os elforgatás, tehát ebben az esetben CC' és BB' párhuzamosak vagy egybeesnek; az előbbi esetben ezért T nem mindig létezik. Az $\angle A = \alpha$ -ra tett kikötés éppen T létezését biztosítja.

1997/3. Legyenek x_1, x_2, \dots, x_n olyan valós számok, amelyek kielégítik az

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| = 1$$

és az

$$|x_i| \leq \frac{n+1}{2} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

feltételeket.

Bizonyítsuk be, hogy x_1, x_2, \dots, x_n -nek van olyan y_1, y_2, \dots, y_n permutációja, amire

$$|y_1 + 2y_2 + 3y_3 + \dots + ny_n| \leq \frac{n+1}{2}.$$

Megoldás. Abból indulunk ki, hogy bármely permutációból eljuthatunk bármely permutációba véges sok olyan lépéssel, amelynél két szomszédos elemet cserélünk fel. Vezessük be x_1, x_2, \dots, x_n permutációira a $P_0, P_1, \dots, P_\omega$ jelöléseket, ahol $P_0 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ és $P_\omega = (x_n, x_{n-1}, \dots, x_1)$; a P_{i+1} permutáció P_i -ből két szomszédos elem felcserélésével jön létre. Egyszerűség kedvéért legyen $\frac{n+1}{2} = r$, és ha $P_i = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, akkor

$$S(P_i) = y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n.$$

Vizsgáljuk most meg $S(P_i)$ értékváltozásait. Figyeljük meg, hogy

$$\begin{aligned} S(P_0) + S(P_\omega) &= (x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n) + (x_n + 2x_{n-1} + \dots + nx_1) = \\ &= (n+1) \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = 2r(x_1 + x_2 + \dots + x_n), \end{aligned}$$

ezért

$$(1) \quad |S(P_0) + S(P_\omega)| = 2r.$$

Ha $|S(P_0)| \leq r$ vagy $|S(P_\omega)| \leq r$, akkor állításunkat bizonyítottuk; tegyük fel ezért, hogy

$$|S(P_0)| > r \quad \text{és} \quad |S(P_\omega)| > r,$$

ez azonban (1) miatt csak úgy lehetséges, ha $S(P_0)$ és $S(P_\omega)$ különböző előjelűek. Feltehetjük, hogy

$$(2) \quad S(P_0) < -r \quad \text{és} \quad S(P_\omega) > r.$$

Vizsgáljuk most a P_i és P_{i+1} permutációkat. Legyen

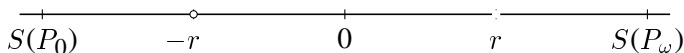
$$P_i = (y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_k, y_{k+1}, y_{k+2}, \dots, y_n)$$

$$P_{i+1} = (y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, y_k, y_{k+2}, \dots, y_n)$$

típusú; ebben az esetben

$$\begin{aligned} |S(P_{i+1}) - S(P_i)| &= |k(y_{k+1} - y_k) + (k+1)(y_k - y_{k+1})| = \\ &= |y_k - y_{k+1}| \leq |y_k| + |y_{k+1}| \leq 2r. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy az $S(P_0), S(P_1), \dots, S(P_\omega)$ sorozatban bármely két szomszédos tag különbsége nem nagyobb $2r$ -nél; mivel azonban (2) szerint $S(P_0)$ és $S(P_\omega)$ a $[-r, r]$ intervallumnak különböző oldalán helyezkednek el,



az $S(P_i)$ sorozatban $S(P_0)$ -ból $S(P_\omega)$ -ba $2r$ -nél nem nagyobb lépésekkel juthatunk el, kell lennie a sorozatban olyan $S(P_j)$ tagnak, amely a $[-r, r]$ intervallumba esik, tehát

$$|S(P_j)| \leq r,$$

amit éppen bizonyítanunk kellett.

1997/4. Egy $n \times n$ -es mátrixot (négyzetes táblázatot), amelynek elemei az $S = \{1, 2, \dots, 2n-1\}$ halmazból valók, ezüst mátrixnak nevezzük, ha minden $i = 1, 2, \dots, n$ esetén az i -edik sor és az i -edik oszlop együtt tartalmazza S valamennyi elemét. Bizonyítsuk be, hogy

- (a) nem létezik ezüst mátrix, ha $n = 1997$;
- (b) végtelen sok olyan n van, amire létezik ezüst mátrix.

Megoldás. (a) Megmutatjuk, hogy páratlan n ($n > 1$) esetén nem létezik ezüst mátrix, tehát $n = 1997$ esetén sem.

		i		j		
i					x	
j						

97/4.1. ábra

Nevezzük el k -adik keresztnek a mátrix k -adik sorának és k -adik oszlopának az együttesét ($k = 1, 2, \dots, n$); a feltétel szerint mindig egy kereszt tartalmazza S minden elemét. Legyen x az S -nek olyan eleme, amely nincs benne a mátrix főátlójában; ilyen x van, mivel S $2n-1$ elemű, a főátlóban viszont csak n elem van.

Válasszuk ki pl. az i -edik keresztet, ez tartalmazza az x elemet, mondjuk az i -edik sor j -edik oszlopában (1997/4.1. ábra), de ekkor x -et a j -edik kereszt is tartalmazza, ugyanazt az x -et azonban más kereszt nem, így x révén az i -edik keresztet egyértelműen hozzákapsolódik a j -edik kereszt és fordítva: az x a j -edik keresztet az i -ediket kapcsolja hozzá, és ebben a kereszt-párban nincs több x . Válasszunk most egy újabb, mondjuk i' -edik keresztet, ez tartalmazza x -et, és az előbbi módon i' -höz hozzákapsol egy j' -t. Ez az eljárás a kereszteteket párokba osztja, s mivel a keresztetek száma a főátló elemszámával, n -nel egyenlő, n -nek szükségképpen párosnak kell lennie, $n = 1997$ esetén tehát nem létezik ezüst mátrix.

(b) Megadunk egy ezüst mátrix szerkesztési módszert, amellyel végtelen sok ezüst mátrix állítható elő; pontosabban: minden $n = 2^k$ (k pozitív egész) értékhez rendelhető ezüst mátrix. Eljárásunk lényege, hogy megmutatjuk: minden $n \times n$ -es mátrixból szerkeszthetünk $2n \times 2n$ -es mátrixot.

Induljunk ki egy n -edrendű A ezüst mátrixból; képezzük a B mátrixot úgy, hogy ennek minden eleméhez hozzáadunk $2n$ -et, majd a C mátrixot úgy, hogy

B főátlójában az elemek helyébe mindenütt $2n$ -et írunk. Ezekből a $2n \times 2n$ -es mátrixot a következő alakzat szerint állítjuk össze:

$$D = \begin{bmatrix} A & B \\ C & A \end{bmatrix}.$$

Például ($n = 2$ -ből indulva):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 7 & 5 \\ 4 & 6 & 1 & 2 \\ 7 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Egy D -beli kereszt A -beli része tartalmazza az $1, 2, \dots, 2n - 1$ számokat, B és C -beli része pedig a $2n, 2n + 1, \dots, 4n - 1$ számokat, tehát a fenti szerkesztés ezüst mátrixot állít elő.

Megjegyzés. Az „ezüst” jelző a mátrixok körében meglehetősen szokatlan; ez az elnevezés azt az olimpiai hagyományt követi, hogy ha egy feladat erre lehetőséget ad, valamilyen módon utaljanak a rendező ország egy jellegzetességére; pl. Finnországban, ill. Lengyelországban a pontokat a finn, ill. lengyel zászló színeire: fehérre és kékre, ill. fehérre és pirosra színezték; Argentína a latin nyelvekben ezüstöst, ezüstben bővelkedőt jelent.

1997/5. Határozzuk meg az összes olyan egészekből álló (a, b) párt, ahol $a \geq 1$, $b \geq 1$, amelyek kielégítik az

$$(1) \quad a^{b^2} = b^a$$

egyenletet.

Megoldás. Tegyük fel, hogy a és b megoldásai (1)-nek, és legyen $(a, b) = d$, tehát $a = du$, $b = dv$, u, v pozitív egész, $(u, v) = 1$. Ezzel (1)

$$(du)^{d^2v^2} = (dv)^{du}$$

$$(2) \quad (du)^{dv^2} = (dv)^u$$

alakba megy át. Vizsgáljunk külön most három esetet, aszerint, hogy

$$(a) \quad dv^2 = u, \quad (b) \quad dv^2 > u, \quad (c) \quad dv^2 < u.$$

(a) (2) ebben az esetben ilyen alakú

$$(du)^u = (dv)^u, \quad \text{azaz} \quad u = v.$$

Mivel u és v relatív prímek, $u = v = 1$ és $dv^2 = u$ -ból $d = 1$ következik. Ebből $a = b = 1$, s ezek valóban megoldások.

(b) Ha $dv^2 > u$, akkor $dv^2 - u \geq 1$, ezzel (2)-ből

$$(3) \quad d^{dv^2-u} \cdot u^{dv^2} = v^u$$

következik, ez azt jelenti, hogy u osztója v -nek; mivel azonban $(u, v) = 1$, $u = 1$, tehát (3) a

$$(4) \quad d^{dv^2-1} = v$$

alakot veszi fel. Ha $d = 1$, akkor szükségképpen $v = 1$, ez azonban ellentmond a $dv^2 - u \geq 1$ feltételnek, tehát $d = 1$ nem lehetséges. Ha $d \geq 2$,

$$d^{dv^2-1} \geq 2^{2v^2-1},$$

ez azonban nem lehetséges, mert $2^{2v^2-1} > v$, és így (4)-gyel ellentmondásba kerülünk, a (b) eset tehát nem következhet be.

(c) Ha $dv^2 < u$, akkor $u - dv^2 \geq 1$. (2) ebben az esetben

$$u^{dv^2} = d^{u-dv^2} \cdot v^u$$

alakban írható fel. Most v osztója u -nak, ami $(u, v) = 1$ miatt csak $v = 1$ esetben következhet be, előbbi egyenletünk ezért

$$(5) \quad u^d = d^{u-d}$$

egyenletbe megy át; itt szükségképpen $u > d$, de akkor $d < u - d$, tehát $u > 2d$.

Legyen most p az u -nak egy tetszőleges prímosztója; (5) miatt p d -nek is osztója. Legyenek α és δ azok a legnagyobb egész kitevők, amelyekre $p^\alpha \mid u$ és $p^\delta \mid d$. (5) bal oldalán a p prím αd , jobb oldalán $\delta(u - d)$ hatványon szerepel, ezért, figyelembe véve, hogy $u > 2d$,

$$\alpha d = \delta(u - d) > \delta d,$$

tehát $\alpha > \delta$. Ez azt jelenti, hogy d minden prímszámhatvány osztója osztja u -t is, azaz d osztója u -nak:

$$(6) \quad u = kd,$$

ahol $u > 2d$ miatt $k \geq 3$.

Helyettesítsük a (6) alatti értéket (5)-be:

$$(7) \quad \begin{aligned} (kd)^d &= d^{kd-d}, \\ k &= d^{k-2}. \end{aligned}$$

$d = 1$ nyilván nem lehetséges, mivel $k \geq 3$. Ha $k = 3$, akkor (7)-ből $d = 3$, (6)-ból $u = 9$ következik, amiből $a = 27$, és $v = 1$ miatt $b = 3$; a $(27, 3)$ pár megoldása (1)-nek.

Ha $k = 4$, (7)-ből $d = 2$, (6)-ból $u = 8$ és $a = 16$, $b = 2$ következik; a $(16, 2)$ pár is kielégíti (1)-et.

Ha $k \geq 5$, $d \geq 2$ miatt $d^{k-2} \geq 2^{k-2}$; viszont az exponenciális függvény tulajdonságai miatt ebben az esetben $2^{k-2} > k$ ($k \geq 5$). (7) ezek szerint $k \geq 5$ esetén már nem teljesülhet.

(1) összes megoldásai ezek szerint a következő számpárok:

$$(1, 1), \quad (27, 3), \quad (16, 2).$$

1997/6. Minden pozitív egész n esetén jelölje $f(n)$ azt, hogy n hányféleképpen állítható elő nemnegatív egész kitevős 2-hatványok összegeként.

Azokat az előállításokat, amelyek csak az összeadandók sorrendjében különböznek, azonosnak tekintjük. Pl. $f(4)=4$, mert a 4 számot a következő négyféle módon állíthatjuk elő:

$$4; \quad 2+2; \quad 2+1+1; \quad 1+1+1+1.$$

Bizonyítsuk be, hogy minden $n \geq 3$ egész számra

$$2^{\frac{n^2}{4}} < f(2^n) < 2^{\frac{n^2}{2}}.$$

1. Megoldás. Először az f függvénnyel kapcsolatban két rekurzív összefüggést vezetünk be.

Ha $n=2k+1$ (k pozitív egész), n minden előállításában szerepel 1-es; egy 1-est elhagyva $2k$ egy előállítását kapjuk meg, és megfordítva: $2k$ egy előállításához egy 1-est hozzáadva $2k+1$ előállítását kapjuk meg. Ez azt jelenti, hogy $2k$ és $2k+1$ előállításai között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető, ezért

$$(1) \quad f(2k+1) = f(2k) \quad (k=1, 2, \dots)$$

Ha viszont $n=2k$, az előállításokat két, közös elem nélküli halmazba oszthatjuk: az első halmazhoz tartozókban szerepel összeadandóként az 1-es, a másodikhoz tartozókban nem. A első előállításáiból egy 1-est elhagyva $2k-1$ egy előállítását kapjuk meg (ugyanúgy, mint az előbb), tehát ezek száma $f(2k-1)$. Ha viszont a második halmazban minden előállításban a tagokat 2-vel elosztjuk, (azaz megfelezzük), k egy előállítását kapjuk, és k minden előállításából 2-vel való szorzással $2k$ egy előállítását kapjuk meg, tehát ezek száma $f(k)$. Ez azt jelenti, hogy

$$(2) \quad f(2k) = f(2k-1) + f(k).$$

(1) és (2) összevetéséből adódik, hogy

$$\begin{aligned} f(2k) - f(2k-2) &= f(k), \\ f(2k-2) &= f(2k-1) = f(2k) - f(k) < f(2k) = f(2k+1). \end{aligned}$$

ez azt jelenti, hogy az f függvény növekvő (nem csökkenő).

Értelemszerűen $f(1)=1$, és egyöntetűség kedvéért vezessük be az $f(0)=1$ megállapodást, majd (2) $f(2k) - f(2k-2) = f(k)$ alakjában végezzük el rendre

a $k = 1, 2, \dots, n$ helyettesítést:

$$\begin{aligned} f(2) - f(0) &= f(1), \\ f(4) - f(2) &= f(2), \\ &\vdots \\ f(2n) - f(2n-2) &= f(n). \end{aligned}$$

Ezek összegzéséből kapjuk, hogy

$$(3) \quad f(2n) = f(0) + f(1) + \dots + f(n) \quad (n \text{ tetszőleges nemnegatív egész}).$$

Használjuk most fel f nemcsökkenő voltát:

$$\begin{aligned} f(2n) &= 2 + (f(2) + f(3) + \dots + f(n)) \leq 2 + (n-1)f(n), \\ (4) \quad f(2n) &\leq nf(n). \end{aligned}$$

Alkalmazzuk most ezt az alapvető összefüggést kiindulva $n = 2^{n-1}$ -ből a $2^{n-1}, 2^{n-2}, \dots, 2^1$ esetekre:

$$\begin{aligned} f(2^n) &\leq 2^{n-1} f(2^{n-1}) \leq 2^{n-1} \cdot 2^{n-2} f(2^{n-2}) \leq \dots \leq \\ &\leq 2^{(n-1)+(n-2)+\dots+1} f(2) = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot 2 = 2^{\frac{n^2-n+2}{2}}. \end{aligned}$$

Mivel pedig $n^2 - n + 2 < n^2$, ha $n \geq 3$,

$$f(2^n) < 2^{\frac{n^2}{2}},$$

ezzel a feladatban szereplő felső becslést bebizonyítottuk.

Az alsó becslés igazolására figyeljük meg először, hogy ha a és b azonos párosságú egészek és $b \geq a \geq 0$, akkor

$$(5) \quad f(b+1) - f(b) \geq f(a+1) - f(a).$$

Ha ui. a és b párosak, (1) szerint mindkét oldalon 0 áll; ha viszont a és b páratlanok, (2)-nek $f(2k) - f(2k-1) = f(k)$ alakjából $b = 2k-1$, ill. $a = 2k-1$ helyettesítéssel:

$$f(b+1) - f(b) = f\left(\frac{b+1}{2}\right), \quad f(a+1) - f(a) = f\left(\frac{a+1}{2}\right)$$

következik, amiből $b+1 \geq a+1$ miatt f monotonitása alapján éppen (5)-öt kapjuk.

Legyen most r páros és alkalmazzuk egymás után (5)-öt az

$$(a, b) = (r, r), (r-1, r+1), \dots, (r-k+1, r+k-1)$$

párokra, majd összegezzük az egyenlőtlenségeket:

$$\begin{aligned} f(r+1) - f(r) &\geq f(r+1) - f(r), \\ f(r+2) - f(r+1) &\geq f(r) - f(r-1), \\ &\vdots \\ f(r+k) - f(r+k-1) &\geq f(r-k+2) - f(r-k+1). \end{aligned}$$

Az összegezés eredménye:

$$f(r+k) - f(r) \geq f(r+1) - f(r-k+1).$$

Mivel (1)-ből r páros volta miatt $f(r+1)=f(r)$ következik, eredményünk így is írható:

$$f(r+k) + f(r-k+1) \geq 2f(r) \quad (k=1, 2, \dots, r)$$

Írjuk most ezt fel k megengedett értékeire:

$$\begin{aligned} f(r+1) + f(r) &\leq 2f(r), \\ f(r+2) + f(r-1) &\leq 2f(r), \\ &\vdots \\ f(r+r) + f(1) &\leq 2f(r). \end{aligned}$$

Ezeket összegezve kapjuk, hogy

$$f(1) + f(2) + \dots + f(2r) \geq 2rf(r).$$

A bal oldalon (3) szerint $f(4r) - f(0) = f(4r) - 1$ áll, ezért

$$f(4r) - 1 \geq 2rf(r),$$

tehát

$$(6) \quad f(4r) > 2rf(r), \quad \text{ha } r \geq 2 \text{ páros.}$$

Ha $r = 2^{m-2}$ ($m \geq 3$), (6) a következő alakot veszi fel:

$$(7) \quad f(2^m) > 2^{m-1} f(2^{m-2}).$$

Könnyen ellenőrizhetjük, hogy (7) $m=2$ esetben is fennáll; hiszen $f(4) = 4 \geq 2f(0) = 2$.

Most már rátérhetünk az alsó becslés igazolására. Alkalmazzuk (7)-et az $m = n, n-1, \dots, n-2s+2$ értékekre ($n \geq 2s$):

$$\begin{aligned} f(2^n) &\geq 2^{n-1} f(2^{n-2}) > 2^{n-1} \cdot 2^{n-3} f(2^{n-4}) > \dots \\ &> 2^{(n-1)+(n-2)+\dots+(n-2s+1)} f(2^{n-2s}) = 2^{s(n-s)} \cdot f(2^{n-2s}). \end{aligned}$$

Ha n páros, válasszuk s -nek $\frac{n}{2}$ -t:

$$f(2^n) > 2^{\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2}} f(2^0) = 2^{\frac{n^2}{4}},$$

ha n páratlan, legyen $s = \frac{n-1}{2}$:

$$f(2^n) > 2^{\frac{n-1}{2} \cdot \frac{n+1}{2}} f(2^1) = 2^{\frac{n^2-1}{4}} \cdot 2 = 2^{\frac{n^2+3}{4}} > 2^{\frac{n^2}{4}},$$

ezzel az alsó becslést is bizonyítottuk. (Egyébként nyilvánvaló, hogy ez $n=1$ -re is teljesül.)

2. megoldás. A feladat felső becslésére közvetlen módszert is adhatunk. Legyen 2^n szóban forgó előállítása

$$(8) \quad 2^n = a_0 \cdot 2^0 + a_1 \cdot 2^1 + \dots + a_n \cdot 2^n,$$

ahol az a_i -k nemnegatív egészek. (8) egy megoldását kapjuk, ha a_j helyébe 2^{n-j} -t írunk, a_i helyébe pedig 0-t, ha $i \neq j$ ($j=0, 1, 2, \dots, n$), így (8)-nak $n+1$ előállítását kapjuk. A többi megoldás számát felülről becsljük:

a_1 értéke lehet $0, 1, 2, \dots, 2^{n-1} - 1$, tehát 2^{n-1} féle;

a_2 értéke lehet $0, 1, 2, \dots, 2^{n-2} - 1$, tehát 2^{n-2} féle;

\vdots

a_{n-2} értéke lehet $0, 1, 2, 3 = 2^2 - 1$, tehát 2^2 féle;

a_{n-1} értéke lehet $0, 1 = 2^1 - 1$, tehát 2^1 féle;

(egy ilyen értékválasztás a_0 értékét már meghatározza).

A fentiek tartalmazzák (8) összes lehetséges helyes megoldását (ennél természetesen többet is), ezért

$$\begin{aligned} f(n) &< n+1 + 2 \cdot 2^2 \cdot \dots \cdot 2^{n-1} = n+1 + 2^{\frac{n(n-1)}{2}} = \\ &= n+1 + 2^{\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

Viszont, ha $n \geq 3$,

$$f(n) < n+1 + 2^{\frac{n^2}{2}-1} = \frac{1}{2}(2n+2) + \frac{1}{2}2^{\frac{n^2}{2}}.$$

Mivel $n=3$ esetén $2n+2 < 2^{\frac{n^2}{2}}$, hiszen $2^3 < 2^{4,5}$; ha viszont $n > 3$, $2n+2$ lineárisan növekszik, $2^{\frac{n^2}{2}}$ pedig exponenciálisan, ezért az előbbi egyenlőtlenség $n \geq 3$ esetén nyilvánvalóan teljesül. Ennélfogva

$$f(n) < \frac{1}{2} \cdot 2^{\frac{n^2}{2}} + \frac{1}{2} \cdot 2^{\frac{n^2}{2}} = 2^{\frac{n^2}{2}},$$

ami bizonyítandó volt.

Az alsó becsléshez felhasználjuk az 1. megoldás néhány részeredményét. Először megmutatjuk, hogy f a páros egészek halmazán gyengén konvex, ami

itt azt jelenti, hogy

$$(9) \quad 2f(2k) \leq f(2k-2l) + f(2k+2l) \quad (l \leq k).$$

Ez ti. (3) miatt egyenértékű a következőkkel:

$$2(f(0) + f(1) + \dots + f(k-l) + \dots + f(k)) \leq (f(0) + f(1) + \dots + f(k-l)) + \\ + (f(0) + f(1) + \dots + f(k-l) + \dots + f(k) + \dots + f(k+l)),$$

$$f(k-l+1) + f(k-l+2) + \dots + f(k) \leq f(k+1) + f(k+2) + \dots + f(k+l),$$

ez viszont f nem csökkenő volta miatt igaz (l. 1. megoldást), hiszen $f(k-l+i) \leq f(k+i)$ ($i=1, 2, \dots, l$).

Az alsó becslést most már n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. $f(2^1) = 2 > 2^{\frac{1}{4}}$, $f(2^2) = 4 > 2^{\frac{4}{4}} = 2$, $n=1, 2$ -re tehát az állítás igaz, tegyük fel, hogy

$$(10) \quad f(2^{n-2}) > 2^{\frac{(n-2)^2}{4}},$$

megmutatjuk, hogy ebből viszont következik az állítás igaz volta n -re is.

Induljunk ki $f(2^n)$ (3) alatti előállításából, és alkalmazzuk ebben az összeg minden második tagjára (1)-et:

$$\begin{aligned} f(2^n) &= \\ &= f(2^{n-1}) + f(2^{n-1}-1) + f(2^{n-1}-2) + f(2^{n-1}-3) + \dots + f(1) + f(0) = \\ &= f(2^{n-1}) + 2f(2^{n-1}-2) + 2f(2^{n-1}-4) + \dots \\ &\quad \dots + 2f(2^{n-1} - (2^{n-2}-2)) + 2f(2^{n-1}-2^{n-2}) + \dots \\ &\quad \dots + 2f(2) + 2f(0) = \\ &= [f(2^{n-1}) + f(0)] + 2[f(2^{n-1}-2) + f(2)] + 2[f(2^{n-1}-4) + f(4)] + \dots \\ &\quad \dots + 2[f(2^{n-1} - (2^{n-2}-2)) + f(2^{n-2}-2)] + 2f(2^{n-2}) + f(0). \end{aligned}$$

A 2^{n-3} darab szögletes zárójelbeli kifejezésre alkalmazzuk (9)-et:

$$\begin{aligned} f(2^n) &\geq 2f(2^{n-2}) + 4f(2^{n-2}) + \dots + 4f(2^{n-2}) + 2f(2^{n-2}) + 1 > \\ &> 4 \cdot 2^{n-3} f(2^{n-2}). \end{aligned}$$

Alkalmazzuk most erre a (10) indukciós feltevést:

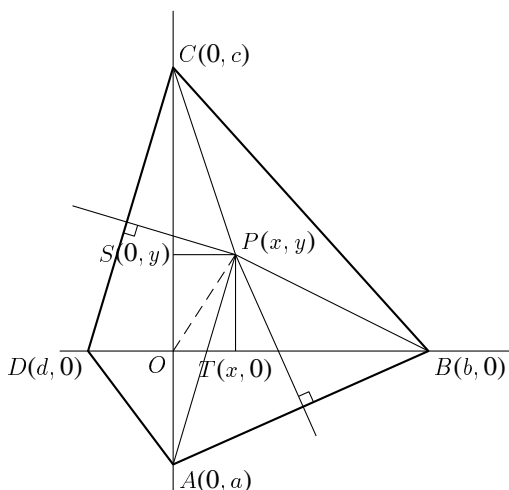
$$f(2^n) > 4 \cdot 2^{n-3} \cdot 2^{\frac{(n-2)^2}{4}} = 2^{n-1+\frac{n^2}{4}-n+1} = 2^{\frac{n^2}{4}},$$

ezt kellett bizonyítanunk.

1998.

1998/1. Az $ABCD$ konvex négyszögben az AC és BD átlók merőlegesek és a szemközti AB , CD oldalak nem párhuzamosak. Tegyük fel, hogy az a P pont, ahol az AB és CD felezőmerőlegese metszi egymást, az $ABCD$ négyszög belsejében van. Bizonyítsuk be, hogy $ABCD$ akkor és csakis akkor húrnégyszög, ha az ABP és CDP háromszögek területe egyenlő.

Megoldás. Helyezzük el az $ABCD$ négyszöget a koordináta-rendszerben úgy, hogy a BD átló az x tengelyre, az AC átló pedig az y tengelyre illeszkedjék; így az átlók metszéspontja az O origóban lesz (1998/1.1. ábra). A csúcsok koordinátái: $A(0, a)$, $B(b, 0)$, $C(0, c)$, $D(d, 0)$; az AB és CD felezőmerőlegeseinek a metszéspontja: $P(x, y)$, P -ből az x , ill. y tengelyre állított merőlegesek talppontjai: $T(x, 0)$, $S(0, y)$. A következőkben a koordináták előjeléből adódó előjeles területekkel számolunk.



98/1.1. ábra

Figyeljük meg, hogy

$$2t_{ABP} = 2t_{ABO} - 2t_{APO} - 2t_{BPO} = ab - ax - by,$$

$$2t_{CDP} = 2t_{CDO} - 2t_{CPO} - 2t_{DPO} = cd - cx - dy.$$

Vegyük észre, hogy t_{ABP} és t_{CDP} ebben az előállításban azonos előjelekkel adódnak. Ezekből:

$$(1) \quad 2(t_{ABP} - t_{CDP}) = (a - y)(b - x) - (c - y)(d - x).$$

Tegyük most fel, hogy $ABCD$ húrnégyszög; ebben az esetben P a négyszög középpontja, és ezért S , ill. T az átlók felezőpontjai:

$$x = \frac{b+d}{2}, \quad y = \frac{a+c}{2}.$$

Ezeket (1) jobb oldalába helyettesítve kapjuk, hogy

$$2(t_{ABP} - t_{CDP}) = \frac{1}{4}[(a-c)(b-d) - (c-a)(d-b)] = 0,$$

tehát $t_{ABP} = t_{CDP}$.

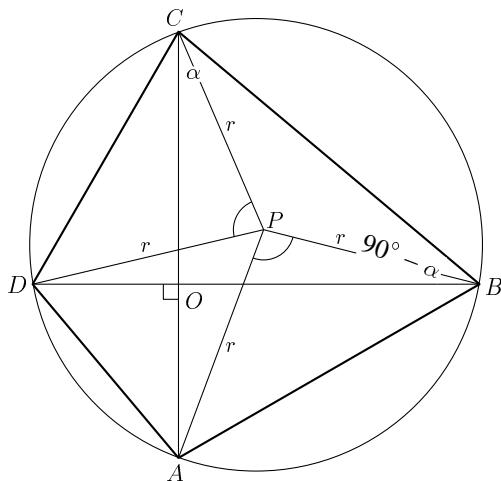
Fordítva: tegyük fel, hogy $t_{ABP} = t_{CDP}$, ebből (1) alapján

$$(2) \quad |a-y||b-x| = |c-y||d-x|$$

következik. Azt kell megmutatnunk, hogy P egyenlő távol van a négyszög csúcsaitól. Mivel $PA = PB$ és $PC = PD$, elég megmutatnunk, hogy $PA = PC$. Tegyük fel, hogy ez nem igaz, tehát pl. $PA > PC$, és egyúttal $PB > PD$. Ezek következménye a CSP és ASP , valamint a BTP és DTP (esetleg elfajult) derékszögű háromszögekből, hogy $SA > SC$, valamint $TB > TD$, azaz $|a-y| > |c-y|$ és $|b-x| > |d-x|$, ami viszont ellentmond (2)-nek. Hasonló ellentmondásra vezet a $PA < PC$ feltevés is, ezért csak $PA = PC$ lehetséges, ami azt jelenti, hogy $ABCD$ húrnégyszög.

Megjegyzések. 1. Arra, hogy húrnégyszögben $t_{ABP} = t_{CDP}$ teljesül, egyszerű közvetlen bizonyítás is adható (1998/1.2. ábra). Ebben az esetben ugyanis P az r sugarú köré írt kör középpontja, és ha $\angle BCO = \alpha$ és következésképpen $\angle CBO = 90^\circ - \alpha$, akkor a kerületi és középponti szögek közötti összefüggés alapján $\angle APB = 2\alpha$ és $\angle CPD = 180^\circ - 2\alpha$, ezért

$$\begin{aligned} t_{ABP} &= \frac{r^2}{2} \sin 2\alpha = \\ &= \frac{r^2}{2} \sin(180^\circ - 2\alpha) = t_{CDP}. \end{aligned}$$



98/1.2. ábra

2. A feladatra sok más megoldási lehetőség is kínálkozik; az egyetlen nehézséget az okozza, hogy lényegében külön-külön meg kell vizsgálni az összefüggéseket abban a négy esetben, amikor P az átlók által felosztott négy különböző tartományba esik; a koordináta geometria használata ezeket a nehézségeket lényegesen csökkenti.

Az alábbiakban vázolunk egy szintén koordináta geometriai megoldást, amely nem igényel P elhelyezkedése szerinti külön elemzést.

Az AB és CD oldalak felezőmerőlegeseinek az egyenletei (az 1998/1.1. ábra jelöléseit használva):

$$2bx - 2ay = b^2 - a^2,$$

$$2dx - 2cy = d^2 - c^2.$$

Ezek metszéspontjára, tehát $P(x_0, y_0)$ koordinátáira ezekből

$$x_0 = \frac{c(b^2 - a^2) - a(d^2 - c^2)}{2(bc - ad)}, \quad y_0 = \frac{d(b^2 - a^2) - b(d^2 - c^2)}{2(bc - ad)}$$

adódik. Mivel P a négyszög belső pontja, az ABP és CDP háromszögek azonos irányításúak. Az ismert analitikus geometriai területképlet:

$$2t = x_0(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - y_0) + x_2(y_0 - y_1)$$

az azonos irányítású háromszögek területeit azonos előjellel adja meg:

$$2t_{ABP} = ax_0 + by_0 - ab, \quad 2t_{CDP} = cx_0 + dy_0 - cd.$$

E két terület akkor és csakis akkor egyenlő, ha

$$(a - c)x_0 + (b - d)y_0 + cd - ab = 0.$$

Ebbe x_0 és y_0 előbb nyert értékeit helyettesítve rendezés után kapjuk, hogy

$$(ac - bd) \left[(a - c)^2 + (b - d)^2 \right] = 0.$$

A szögletes zárójelben levő kifejezés nem lehet nulla, mert ez azt jelentené, hogy $a = c$, $b = d$ lenne; ez azonban lehetetlen, hiszen a és c , ill. b és d ellenkező előjelű. Ezért szükségképpen $ac - bd = 0$, azaz

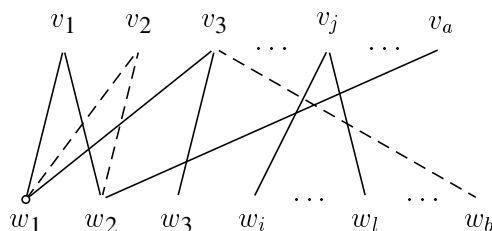
$$|a||c| = |b||d|, \quad \text{azaz} \quad OA \cdot OC = OB \cdot OD,$$

ez viszont éppen azt jelenti, hogy az A, B, C, D pontok egy körön vannak.

1998/2. Egy versenyen a versenyző és b bíró van, ahol $b \geq 3$ páratlan szám. Mindegyik bíró mindegyik versenyző teljesítményét „megfelelt”, ill. „nem megfelelt” minősítéssel értékeli. Tegyük fel, hogy a k számra igaz az, hogy bármely két bíró értékelése legfeljebb k versenyző esetén esik egybe. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}.$$

Megoldás. Szemléltessük a feladatban leírt kapcsolatokat egy ún. páros gráffal. Rendeljünk hozzá minden versenyzőhöz és minden bíróhoz egy-egy gráf-csúcsot, jelölje ezeket v_1, v_2, \dots, v_a , ill. w_1, w_2, \dots, w_b . A v_i csúcsot zöld éllel kötjük össze a w_j csúccsal, ha a w_j -hez tartozó bíró „megfelelttel” értékelt a v_i -hez tartozó versenyzőt, ellenkező esetben pedig piros éllel (sémánkon a színek helyett folytonos, ill. szaggatott vonalak szerepelnek). A következő szóhasználatban egyszerűség kedvéért nem teszünk különbséget a csúcs és a hozzárendelt személy között.



Mivel minden bíró minden versenyzőt értékelt, a w_i csúcsok foka a , a v_i csúcsok foka pedig b . Nevezzük *útnak* azt az egyszínű élpárt, amely egy w_i csúcsból egy v_j csúcsba és onnan egy másik w_l csúcsba visz. Egy ilyen út létezése azt jelenti, hogy a v_j versenyzőt a w_i és w_l bírók azonos módon értékelték.

A w_i csúcsokból képezhető párok száma $\binom{b}{2}$, és mivel egy csúcspárt legfeljebb k számú út köthet össze, az utak száma maximálisan $k \binom{b}{2}$ lehet.

Számoljuk most össze az utakat a versenyzőknél. Tegyük fel, hogy a v_i csúcsba z_i zöld és p_i piros él fut be, ahol $z_i + p_i = b$. A zöld, ill. piros élekből ebben a csúcsban $\binom{z_i}{2} + \binom{p_i}{2}$ élpár, azaz út képezhető, tehát a v_i -be vezető utak száma

$$s_i = \binom{z_i}{2} + \binom{p_i}{2}.$$

Viszont

$$\begin{aligned} s_i &= \frac{z_i(z_i - 1)}{2} + \frac{p_i(p_i - 1)}{2} = \frac{1}{2} (z_i^2 + p_i^2 - (z_i + p_i)) = \\ &= \frac{z_i^2 + p_i^2}{2} - \frac{b}{2} \geq \left(\frac{z_i + p_i}{2} \right)^2 - \frac{b}{2} = \frac{b^2}{4} - \frac{b}{2} = \frac{(b-1)^2}{4} - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Mivel s_i egész és b páratlan volta miatt $\frac{(b-1)^2}{4}$ is egész, $s_i \geq \frac{(b-1)^2}{4}$. A v_i csúcsokba vezető utak száma ezért $\sum_{i=1}^a s_i \geq \frac{a(b-1)^2}{4}$. Ezt előbbi eredményünkkel összevetve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} k \binom{b}{2} &\geq \frac{a(b-1)^2}{4}, \\ \frac{k}{a} &\geq \frac{b-1}{2b}; \end{aligned}$$

ezt kellett bizonyítanunk.

1998/3. Tetszőlegesen pozitív egész n esetén jelölje $d(n)$ n pozitív osztóinak a számát (beleértve 1-et és magát n -et is). Határozzuk meg az összes olyan pozitív egész k számot, amihez létezik olyan n , hogy

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = k.$$

Megoldás. A feladat megoldásához felhasználjuk a $d(n)$ függvénynek a tulajdonságait, mindenekelőtt azt, hogy ha n prímtényezőss felbontása: $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$, akkor

$$d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_r + 1);$$

ebből már következik $d(n)$ multiplikatív tulajdonsága: ha a és b relatív prímek, $d(ab) = d(a) \cdot d(b)$; ez tetszőlegesen számú tényezőre is fennáll [44]. Ezek szerint

$$(1) \quad \frac{d(n^2)}{d(n)} = \frac{2\alpha_1 + 1}{\alpha_1 + 1} \cdot \frac{2\alpha_2 + 1}{\alpha_2 + 1} \dots \frac{2\alpha_r + 1}{\alpha_r + 1} = k.$$

Azok a k számok elégítik ki a feladat feltételeit, amelyeket az (1) alatti formában elő tudunk állítani, hiszen a megfelelő $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ egészekhez a p_1, p_2, \dots, p_r különböző prímeket tetszőlegesen választva $d(n^2)/d(n)$ éppen k -val lesz egyenlő.

Mindenekelőtt vegyük észre, hogy (1) miatt k szükségképpen páratlan; néhány konkrét kísérlet meggyőz bennünket arról, hogy a kis páratlan számok így tényleg elő is állíthatók; pl.

$$\frac{d(1^2)}{d(1)} = 1, \quad \frac{d((2^4 \cdot 3^2)^2)}{d(2^4 \cdot 3^2)} = \frac{9 \cdot 5}{5 \cdot 3} = 3, \quad \dots$$

Ezek alapján az a sejtésünk alakul ki, hogy k értéke tetszőlegesen páratlan szám lehet. Ezt k szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk be; a kezdő értékekre a fentiek szerint állításunk igaz, Tegyük fel, hogy minden k -nál kisebb páratlan k_0 -hoz van olyan n_0 , amelyre

$$(2) \quad \frac{d(n_0^2)}{d(n_0)} = k_0 \geq 1;$$

azt kell bizonyítani, hogy k is előállítható az (1) alatti formában.

Az a törekvésünk, hogy az $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ kitevőket úgy állapítsuk meg, hogy az (1) előállításban minél több törtegyyszerűsítést tudjunk végrehajtani.

A $k+1$ páros egész felírható $k+1 = 2^r k_0$ alakban, ahol $k_0 \geq 1$ páratlan szám, r pozitív egész. Mivel $k_0 < k$, ezért az indukciós feltétel szerint k_0 előáll a (2)

szerinti alakban. Legyen

$$\alpha_1 = (2^r - 1)k_0 - 1 \quad \text{és} \quad \alpha_{i+1} = 2^i \alpha_i \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

Válasszuk a p_1, p_2, \dots, p_r prímeket úgy, hogy legyenek relatív prímek n_0 -hoz, és legyen

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r} n_0.$$

Ezzel

$$\begin{aligned} \frac{d(n^2)}{d(n)} &= \frac{2\alpha_1 + 1}{\alpha_1 + 1} \cdot \frac{2\alpha_2 + 1}{\alpha_2 + 1} \dots \frac{2\alpha_r + 1}{\alpha_r + 1} \frac{d(n_0^2)}{d(n_0)} = \\ &= \frac{\alpha_2 + 1}{\alpha_1 + 1} \cdot \frac{\alpha_3 + 1}{\alpha_2 + 1} \dots \frac{\alpha_{r+1} + 1}{\alpha_r + 1} k_0 = \frac{\alpha_{r+1} + 1}{\alpha_1 + 1} k_0 = \\ &= \frac{2^r \alpha_1 + 1}{(2^r - 1)k_0} k_0 = \frac{2^r \alpha_1 + 1}{2^r - 1} = \frac{2^r(\alpha_1 + 1)}{2^r - 1} - 1 = \\ &= \frac{2^r(2^r - 1)k_0}{2^r - 1} - 1 = 2^r k_0 - 1 = k, \end{aligned}$$

amivel az (1) előállítás lehetőségét bebizonyítottuk.

1998/4. Határozzuk meg az összes olyan pozitív egész számokból álló (a, b) rendezett párt, amire $(ab^2 + b + 7)$ osztója $(a^2b + a + b)$ -nek.

Megoldás. Legyen $A = a^2b + a + b$ és $B = ab^2 + b + 7$. Azokat az (a, b) párokat kell megkeresnünk, amelyekre A osztható B -vel. Ha B osztója A -nak, akkor osztója $bA - aB$ -nek is; ezért keressük azokat az (a, b) párokat, amelyekre B osztója

$$bA - aB = b^2 - 7a \text{-nak.}$$

Mivel $a \geq 1$, $b^2 \leq ab^2$, és így $b^2 - 7a < ab^2 + b + 7 = B$.

Tegyük fel először, hogy $b^2 - 7a \geq 0$. B ebben az esetben osztója egy nála kisebb nemnegatív egésznek, ez csak úgy lehet, ha $b^2 - 7a = 0$. Ekkor szükségképpen $b^2 = 7a$, és ezért b osztható 7-tel: $b = 7c$, és így $49c^2 - 7a = 0$, $a = 7c^2$ (c pozitív egész). Az ily módon nyert $(a, b) = (7c^2, 7c)$ párok tetszőleges pozitív egész c -vel kielégítik a feladat feltételeit, mert

$$A = 49c^4 \cdot 7c + 7c^2 + 7c = 7c(49c^4 + c + 1),$$

$$B = 7c^2 \cdot 49c^2 + 7c + 7 = 7(49c^4 + c + 1),$$

azaz $A = cB$.

Tegyük most fel, hogy $b^2 - 7a < 0$; a pozitív egész $7a - b^2 < 7a$ ekkor osztható B -vel. Nem lehet, hogy b nagyobb legyen 2-nél, mert akkor $B = ab^2 + b + 7 \geq 9a + 10$ lenne, ami lehetetlen, mert nem lehetne osztója egy $7a$ -nál kisebb pozitív egésznek, tehát $b = 1$ vagy $b = 2$.

Ha $b = 1$, $7a - b^2 = 7a - 1$ osztható $B = a + 8$ -cal. Mivel $7a - 1 = 7(a + 8) - 57$, ez akkor osztható B -vel, ha 57 is osztható vele. 57 osztói: 57, 19, 3, 1,

ezért $a+8$ csak 19 vagy 57 lehet, azaz $a=11$ vagy $a=49$. Viszont a $(11, 1)$ és $(49, 1)$ párok megfelelnek a feladat kikötéseinek, mert ezekben az esetekben

$$A = 133 = 7 \cdot 19, \quad B = 19, \quad \text{ill.} \quad A = 2451 = 43 \cdot 57, \quad B = 57.$$

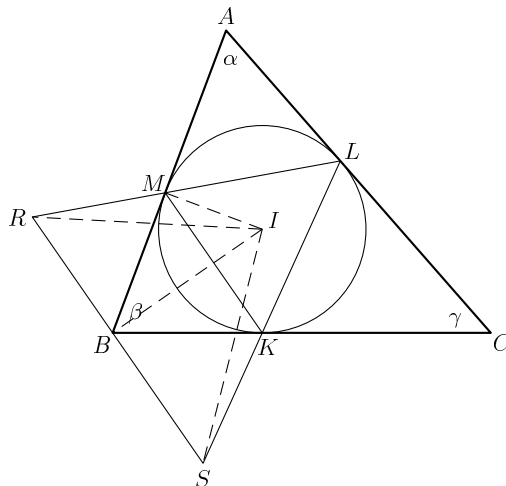
Ha $b=2$, $7a-b^2=7a-4$, $B=4a+9$. Mivel $4(7a-4)=7(4a+9)-79$, B csakis akkor lehet osztója $7a-4$ -nek, ha 79-nek is osztója. 79 viszont prímszám, és nincs $4a+9$ alakú osztója; $b=2$ nem ad újabb megoldást.

Összefoglalva: a feladat feltételei akkor teljesülnek, ha az (a, b) pár a $(7c^2, 7c)$, c tetszőleges pozitív egész vagy a $(11, 1)$, vagy a $(49, 1)$ párral egyenlő.

1998/5. Legyen I az ABC háromszög beírt körének a középpontja. Érintse a beírt kör a BC , CA , AB oldalakat rendre a K , L , M pontokban. A B -n keresztülmenő, MK -val párhuzamos egyenes metszéspontja az LM , ill. LK egyenesekkel legyen R , ill. S . Bizonyítsuk be, hogy az RIS hegyesszög.

Megoldás. Az ABC háromszög szögei legyenek rendre α , β , γ . Az LAM egyenlő szárú háromszögből $AML \angle = BMR \angle = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$; hasonlóan: $CKL \angle = BKS \angle = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$, és $BKM \angle = BMK \angle = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$, továbbá: $LMK \angle = MRS \angle = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$. Alkalmazzuk a szinusztételt a BRM és a BSK háromszögekre:

$$(1) \quad \frac{RB}{BM} = \frac{\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}}; \quad \text{hasonlóan} \quad \frac{SB}{BK} = \frac{\cos \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}.$$



98/5.1. ábra

Ebből adódik $BK = BM$ miatt, hogy

$$(2) \quad RB \cdot SB = BM^2.$$

Mivel KM párhuzamos RS -sel és IB merőleges KM -re, ezért IB az RS -re is merőleges; az RBI és SBI derékszögű háromszögekből

$$(3) \quad IR^2 = RB^2 + IB^2 \quad \text{és} \quad IS^2 = SB^2 + IB^2.$$

Alkalmazzuk most a koszinusztételt az RSI háromszögre:

$$RS^2 = IR^2 + IS^2 - 2IR \cdot IS \cos RIS \angle.$$

Ebből (3) és (2) figyelembe vételével kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 2IR \cdot IS \cos RIS \angle &= IR^2 + IS^2 - RS^2 = RB^2 + SB^2 + 2IB^2 - (RB + SB)^2 = \\ &= 2IB^2 + RB^2 + SB^2 - RB^2 - SB^2 - 2RB \cdot SB = 2(IB^2 - BM^2). \end{aligned}$$

Viszont a BIM derékszögű háromszögből $IB^2 - BM^2 = IM^2$, ezért

$$\cos RIS \angle = \frac{IM^2}{IR \cdot IS},$$

ami nyilván pozitív, ezért $RIS \angle$ hegyesszög.

1998/6. Tekintsük az összes olyan f függvényt, amelyik a pozitív egész számok \mathbf{N} halmazát önmagába képezi le, és amelyre teljesül az

$$(1) \quad f(t^2 f(s)) = s(f(t))^2$$

feltétel minden \mathbf{N} -beli s, t esetén. Határozzuk meg $f(1998)$ lehetséges legkisebb értékét.

Megoldás. Jelölje H az (1)-et kielégítő függvények halmazát, és tegyük fel, hogy f ennek a halmaznak egyik eleme. Vezessük be az $f(1) = a$ jelölést. Megoldásunk első lépéseként f -ből egy olyan függvényt állítunk elő, amely minden \mathbf{N} -beli helyen kisebb, vagy legalábbis nem nagyobb értéket vesz fel, mint f , de benne van H -ban.

Helyettesítsünk (1)-be $t = 1$ -et, majd $s = 1$ -et:

$$(2) \quad f(f(s)) = a^2 s; \quad (3) \quad f(at^2) = (f(t))^2.$$

A következő átalakításoknál az egyenlőségjelek fölé írt számok azt jelzik, hogy az átalakításoknál melyik alapösszefüggést használjuk fel.

$$\begin{aligned} (f(s)f(t))^2 &= (f(s))^2 (f(t))^2 \stackrel{(3)}{=} (f(s))^2 f(at^2) \stackrel{(1)}{=} \\ &\stackrel{(1)}{=} f(s^2 f(f(at^2))) \stackrel{(2)}{=} f(s^2 a^2 \cdot at^2) = f(a(ast)^2) \stackrel{(3)}{=} (f(ast))^2. \end{aligned}$$

Mivel a függvényértékek pozitív egészek, ebből

$$(4) \quad f(s)f(t) = f(ast)$$

következik, $t = 1$ helyettesítéssel pedig $f(as) = af(s)$. Végezzük el ebben az $s \rightarrow st$ helyettesítést:

$$f(ast) = af(st),$$

amiből (4) felhasználásával

$$(5) \quad af(st) = f(s)f(t)$$

adódik.

k szerinti teljes indukcióval megmutatjuk, hogy $(f(t))^k = a^{k-1}f(t^k)$. $k = 1$ -re az $f(t) = f(t)$ azonosságról van szó; tegyük fel $(f(t))^{k-1} = a^{k-2}f(t^{k-1})$ teljesül. Szorozzuk meg ennek mindkét oldalát $f(t)$ -vel, és alkalmazzuk (5)-öt:

$$(6) \quad (f(t))^k = a^{k-2}f(t^{k-1})f(t) = a^{k-1}f(t^k),$$

ezzel az indukciót befejeztük.

Most megmutatjuk, hogy a osztója $f(t)$ -nek ($t \in \mathbb{N}$). Legyen p tetszőleges prím, és legyen p^α , ill. p^β a p -nek az a legmagasabb hatványa, amellyel a , ill. $f(t)$ osztható. Ebben az esetben $(f(t))^k$ osztható $p^{k\beta}$ -val, a^{k-1} pedig $p^{(k-1)\alpha}$ -val; (6)-ból következik, hogy $k\beta \geq (k-1)\alpha$, ez azonban csak akkor lehetséges, ha $\beta \geq \alpha$, ez viszont azt jelenti, hogy a minden prímhatalvány osztója osztja $f(t)$ -t, tehát a osztója $f(t)$ -nek.

Vezessünk be most egy újabb \mathbb{N} -en értelmezett függvényt, legyen

$$g(t) = \frac{f(t)}{a},$$

ez \mathbb{N} -et önmagába képezi le. Mivel (3)-ból $f(a) = a^2$ következik,

$$(7) \quad g(a) = a.$$

(5) mindkét oldalát a^2 -tel osztva kapjuk:

$$(8) \quad g(st) = g(s)g(t),$$

ez nyilván kiterjeszthető véges sok változó szorzatára is, továbbá:

$$ag(g(s)) \stackrel{(7)}{=} g(a)g(g(s)) \stackrel{(8)}{=} g(ag(s)) = g(f(s)) = \frac{f(f(s))}{a} \stackrel{(2)}{=} \frac{a^2s}{a} = as,$$

azaz

$$(9) \quad g(g(s)) = s.$$

Most már megmutathatjuk (7)–(9) alapján, hogy g is a H függvényosztályba tartozik, mivel kielégíti (1)-et:

$$g(t^2g(s)) \stackrel{(8)}{=} g(t^2)g(g(s)) \stackrel{(8)(9)}{=} s(g(t))^2.$$

Eredményünk azt jelenti, hogy H tartalmaz olyan g függvényt, amely \mathbb{N} tetszőleges helyén f -nél nem nagyobb értéket vesz fel, feladatunk megoldásában

ezért elegendő a (7)–(9) tulajdonságokkal rendelkező függvényekkel foglalkoznunk.

g alapvető tulajdonsága, hogy prímszámokhoz prímszámot rendel. Legyen ugyanis p tetszőleges prím, és $g(p) = uv$ (u és v pozitív egész). (8) és (9) szerint

$$p = g(g(p)) = g(uv) = g(u)g(v),$$

$g(u)$ és $g(v)$ egyike ezért 1-gyel egyenlő; tegyük fel, hogy $g(u) = 1$. Mivel

$$g(1) = \frac{f(1)}{a} = \frac{a}{a} = 1,$$

és (9) miatt $u = g(g(u)) = g(1) = 1$, ez éppen azt jelenti, hogy $g(p)$ prím, hiszen $g(p)$ -t csak úgy lehet kéttényezős szorzattá bontani, hogy az egyik tényező 1.

Megjegyezzük még, hogy különböző prímhelyeken g különböző prímtenyezőket vesz fel, mert ha $g(s) = g(t)$, akkor

$$s \stackrel{(9)}{=} g(g(s)) = g(g(t)) \stackrel{(9)}{=} t.$$

Térjünk most rá $f(1998)$, azaz $g(1998)$ lehetséges legkisebb értékének a meghatározására. Mivel $1998 = 2 \cdot 3^3 \cdot 37$,

$$g(1998) = g(2) \cdot (g(3))^3 g(37).$$

Minthogy ebben minden tényező prím, ill prímhatalvány, és a legkisebb prímek 2, 3, 5,

$$g(1998) \geq 3 \cdot 2^3 \cdot 5 = 120.$$

$g(1998)$ tehát legalább 120, minden $g \in H$ -ra. Megmutatjuk, hogy H -ban van olyan g függvény, amelyre $g(1998) = 120$. Ezt a g -t a következő módon értelmezzük:

a) $g(1) = 1$;

b) $g(2) = 3$, $g(3) = 2$, $g(5) = 37$, $g(37) = 5$;

c) $g(p) = p$ minden olyan prímre, amely nem egyenlő 2, 3, 5, 37 egyikével sem;

d) ha $n = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} 5^{\alpha_3} 37^{\alpha_4} p^{\alpha_5} \dots p_r^{\alpha_r}$, (α_i itt 0 is lehet);

$$g(n) = (g(2))^{\alpha_1} (g(3))^{\alpha_2} (g(5))^{\alpha_3} (g(37))^{\alpha_4} (g(p_5))^{\alpha_5} \dots (g(p_r))^{\alpha_r}.$$

Az így értelmezett g valóban kielégíti a (7)–(9) feltételeket, hiszen $g(1) = 1$, (8) az értelmezés szerint teljesül; viszont

$$\begin{aligned} g(g(n)) &= g\left(3^{\alpha_1} \cdot 2^{\alpha_2} \cdot 37^{\alpha_3} \cdot 5^{\alpha_4} \cdot p_5^{\alpha_5} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r}\right) = \\ &= 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot 37^{\alpha_4} \cdot p_5^{\alpha_5} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r} = n, \end{aligned}$$

ami (9) teljesülését jelenti. Ezek szerint g hozzátartozik H -hoz, és H függvényeinek az 1998 helyen felvett lehető legkisebb értéke 120-szal egyenlő.

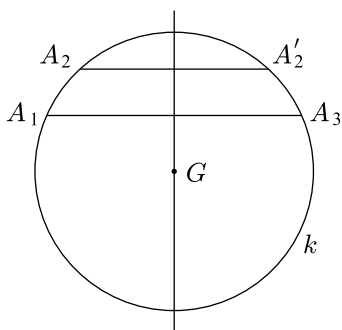
1999.

1999/1. Határozzuk meg az összes olyan, legalább három pontot tartalmazó síkbeli véges S ponthalmazt, amire az alábbi feltétel teljesül:

S bármely két különböző A, B pontjára az AB szakasz felezőmerőlegese szimmetriatengelye az S halmaznak.

Megoldás. Ha S pontjainak a száma n , a szabályos n -szög csúcsai eleget tesznek a feladat feltételeinek, hiszen bármely két csúcs összekötő szakaszának a felezőmerőlegese átmegy a sokszög köré írt kör középpontján és szimmetriatengelye a sokszögnek.

Megmutatjuk, hogy S csakis egy szabályos sokszög csúcshalmaza lehet. Legyen S súlypontja G . G súlypontja minden olyan halmaznak is, amelyet egy felezőmerőlegesre való tükrözéssel S -ből kapunk. Mivel a súlypont egyértelműen meghatározott, ez azt jelenti, hogy G fixpontja minden szóban forgó tükrözésnek, tehát rajta van minden szimmetriatengelyen, a szimmetriatengelyek tehát egy rögzített G ponton mennek át. Legyen most A és B az S két tetszőleges pontja; AB felezőmerőlegese átmegy G -n, tehát G -től mindkettő egyenlő távolságra van, következésképpen S pontjai egy G középpontú k körön vannak.



1999/1.1. ábra

Válasszuk most ki k -n az S három tetszőleges, egymást követő pontját: A_1 -et, A_2 -t és A_3 -at úgy, hogy A_2 az A_1 és A_3 között legyen és az $\widehat{A_1A_2}$, $\widehat{A_2A_3}$ íveken ne legyen S -beli pont (1999/1.1. ábra); ez lehetséges, mert S -nek véges sok pontja van.

Az $\widehat{A_1A_2}$ és $\widehat{A_2A_3}$ ívek szükségképpen egyenlők. Ha ui. nem ez lenne a helyzet, pl. $\widehat{A_1A_2} < \widehat{A_2A_3}$ teljesülne, akkor A_2 -nek az A_1A_3 felezőmerőlegesére vonatkozó tükröképe, A_2' , az A_2A_3 íven lenne, ellentétben feltevésünkkel, ezért $\widehat{A_1A_2} = \widehat{A_2A_3}$; A_2 rajta van A_1A_2 felezőmerőlegesén. Ez azonban éppen azt jelenti, hogy k -n S bármely pontja egyenlő távol van két szomszédjától, tehát S a k körbe írt szabályos n -szög csúcshalmaza.

Megjegyzések. 1. Az A_1, A_2, \dots, A_n pontok G súlypontjának azt a pontot nevezzük, amelyre a $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \dots + \overrightarrow{GA_n} = \mathbf{0}$ egyenlőség teljesül, az A_i pontok G -t egyértelműen meghatározzák.

2. Bizonyításunk során többször felhasználtuk, hogy S -nek véges sok pontja van (pl. a súlypont létezésénél is). Végtelen sok pont esetén egy kör pontjain kívül más megoldás is lehet, pl. egy egyenes vagy a teljes sík ponthalmaza.

3. A versenyre eredetileg a feladatnak egy nehezebb változatát javasolták: Az S véges térbeli ponthalmaz bármely két pontjának a felezőmerőleges síkja

szimmetriasíkja S -nek. S ebben az esetben vagy egy szabályos sokszögnek, vagy pedig egy szabályos tetraédernek, illetve oktaédernek a csúcshalmaza.

1999/2. Legyen n adott egész szám ($n \geq 2$).

(a) Határozzuk meg a legkisebb olyan C állandót, amire

$$(1) \quad \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C \left(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i \right)^4$$

egyenlőtlenség minden x_1, x_2, \dots, x_n nemnegatív valós szám n -esre teljesül.

(b) Határozzuk meg, hogy ezen C állandó mellett mikor áll fenn egyenlőség.

Előzetes megjegyzés. Ha az x_i -k között legfeljebb egy pozitív van, akkor (1) bal oldalán nulla áll és így minden nemnegatív C -re teljesül; ezzel a nyilvánvaló esettel a továbbiakban nem foglalkozunk; feltesszük, hogy legalább két x_i pozitív.

Meggondolásainkban az egyenlőtlenséget valamivel egyszerűbbre vezetjük vissza. Legyen $x_1 + x_2 + \dots + x_n = S$ és vezessük be az

$$a_i = \frac{x_i}{S} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

jelölést. Ezzel $\sum_1^n a_i = 1$, $0 \leq a_i \leq 1$ és legalább két a_i pozitív. (1) mindkét oldalát

S^4 -nel elosztva (1) a

$$(2) \quad \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j (a_i^2 + a_j^2) \leq C$$

egyenlőtlenségbe megy át. Feladatunk a bal oldali kifejezés maximumának a meghatározása, az ezzel egyenlő C állandó nyilván megoldása az eredeti feladatnak.

1. megoldás. Vegyük észre, hogy

$$a_i a_j (a_i^2 + a_j^2) = a_i^3 a_j + a_i a_j^3 = (a_i + a_j)(a_i^3 + a_j^3) - (a_i^4 + a_j^4),$$

ennek alapján (2) bal oldala így írható:

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3) - (a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4) = \\ = (a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3) - (a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4). \end{aligned}$$

Feladatunk tehát az

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3) - (a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4)$$

függvény maximumának a meghatározása az $a_i \geq 0$, $\sum a_i = 1$ feltételek mellett. Feltehetjük, hogy $1 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$, és legyen az a_i -k között sorrendben

az utolsó pozitív a_{k+1} -gyel egyenlő ($k \geq 2$). Tekintsük most F -nek a

$$\mathbf{v}(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, 0, \dots, 0)$$

és

$$\mathbf{v}'(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k + a_{k+1}, 0, \dots, 0)$$

helyeken felvett értékeit. (\mathbf{v} -ről \mathbf{v}' -re úgy térünk rá, hogy a_{k+1} helyére 0-t írunk, a_k helyére pedig $a_k + a_{k+1}$ -et; ezzel a koordináták összege nem változik.) Megmutatjuk, hogy \mathbf{v} -ről \mathbf{v}' -re való áttérés F -et növeli.

$$\begin{aligned} F(\mathbf{v}') - F(\mathbf{v}) &= (a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{k-1}^3 + (a_k + a_{k+1})^3) - \\ &\quad - (a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_{k-1}^4 + (a_k + a_{k+1})^4) - \\ &\quad - (a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{k+1}^3) + (a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_{k+1}^4) = \\ &= (a_k + a_{k+1})^3 - a_k^3 - a_{k+1}^3 + a_k^4 + a_{k+1}^4 - (a_k + a_{k+1})^4 = \\ &= 3a_k a_{k+1} (a_k + a_{k+1}) - 2a_k a_{k+1} (2a_k^2 + 3a_k a_{k+1} + 2a_{k+1}^2) = \\ &= a_k a_{k+1} [(a_k + a_{k+1})(3 - 4(a_k + a_{k+1})) + 2a_k a_{k+1}]. \end{aligned}$$

A kapott kifejezés pozitív voltának az igazolására elegendő megmutatnunk, hogy

$$a_k + a_{k+1} < \frac{3}{4}.$$

Ez viszont annak következménye, hogy $a_1 \geq a_k \geq a_{k+1}$ és így $2a_1 \geq a_k + a_{k+1}$ és

$$1 \geq a_1 + a_k + a_{k+1} \geq \frac{1}{2}(a_k + a_{k+1}) + (a_k + a_{k+1}), \text{ tehát}$$

$$1 \geq \frac{3}{2}(a_k + a_{k+1}) > \frac{4}{3}(a_k + a_{k+1}), \quad a_k + a_{k+1} < \frac{3}{4}.$$

Ez tehát azt jelenti, hogy

$$F(\mathbf{v}') > F(\mathbf{v}).$$

Az alkalmazott eljárással ezek szerint F értéke növelhető mindaddig, míg \mathbf{v} koordinátái az első kettő kivételével nullává nem válnak. Ebben az esetben – figyelembe véve, hogy $a_1 + a_2 = 1$

$$\begin{aligned} F(a_1, a_2, 0, \dots, 0) &= a_1 a_2 (a_1^2 + a_2^2) = a_1 a_2 (1 - 2a_1 a_2) = \\ &= -2 \left(a_1 a_2 - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{1}{8} \leq \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Az egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha $a_1 a_2 = \frac{1}{4}$, azaz $a_1(1 - a_1) = \frac{1}{4}$, ami csak $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$ esetén lehetséges.

A keresett C érték tehát $\frac{1}{8}$ és ez akkor érhető el, ha $x_1 = x_2$ tetszőleges pozitív számok és $x_3 = x_4 = \dots = x_n = 0$.

2. megoldás. Most is az előzetes megjegyzésben szereplő (2) egyenlőtlenséggel foglalkozunk. Megoldásunknak az a lényege, hogy a (2) bal oldalán szereplő összeg minden tagjában $a_i^2 + a_j^2$ -et az összes a_i négyzetösszegével becsljük meg. Mivel

$$(3) \quad \begin{aligned} a_i^2 + a_j^2 &\leq a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = Q, \\ F(a_1, a_2, \dots, a_n) &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j (a_i^2 + a_j^2) \leq Q \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j. \end{aligned}$$

Mivel

$$1 = \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i \right)^2 = Q + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j,$$

(3)-ből

$$F \leq Q \frac{1 - Q}{2} = \frac{1}{8} [1 - (2Q - 1)^2] \leq \frac{1}{8}$$

következik. F $\frac{1}{8}$ -os minimuma elérhető, ha $2Q - 1 = 0$, azaz $Q = \frac{1}{2}$ és (3)-ban minden i, j párra

$$(4) \quad a_i a_j (a_i^2 + a_j^2) = a_i a_j Q.$$

Mivel feltettük, hogy legalább két a_i pozitív, és $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$, a_1 és a_2 biztosan pozitívak, ezért (4)-ből

$$a_1^2 + a_2^2 = \frac{1}{2}$$

következik. Nem lehet, hogy ebben az esetben a_1 -en és a_2 -n kívül legyen még egy pozitív a_i , mert (4) miatt ez azt jelentené, hogy

$$a_1 a_2 Q = a_1 a_2 (a_1^2 + a_2^2) < a_1 a_2 (a_1^2 + a_2^2 + a_i^2) \leq a_1 a_2 Q$$

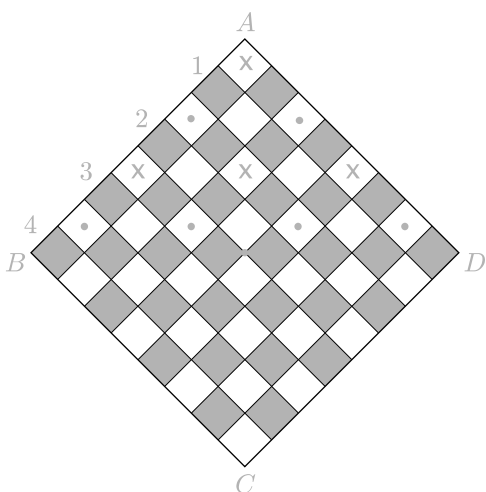
teljesülne, ami lehetetlen, tehát $a_i = 0$, ha $i > 2$. Ebből már az előző megoldásban közölt módon következik, hogy C keresett értéke $\frac{1}{8}$ és ez $x_1 = x_2 > 0$, $x_3 = x_4 = \dots = x_n = 0$ esetén érhető el.

1999/3. Tekintsünk egy $n \times n$ -es négyzet alakú táblát, ahol n rögzített páros pozitív egész. A tábla n^2 egységnégyzetre van felosztva. Azt mondjuk, hogy a tábla két különböző négyzete szomszédos, ha van közös oldaluk.

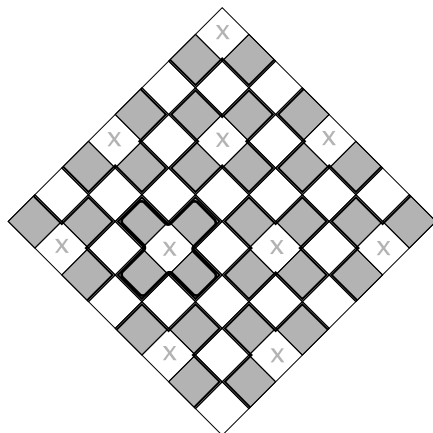
A táblán N egységnégyzet meg van jelölve oly módon, hogy minden négyzet (jelölt vagy nem jelölt) szomszédos legalább egy jelölt négyzettel.

Határozzuk meg N lehetséges legkisebb értékét.

1. megoldás. Egyszerűség kedvéért a feladat szerint megjelölt négyzettel szomszédos négyzetről azt mondjuk, hogy ezeket a jelölt négyzet „lefogja”. Feladatunk tehát az, hogy meghatározzuk, legalább hány négyzetet kell megjelöl-nünk ahhoz, hogy a tábla mind az n^2 négyzete le legyen fogva (ábráink $n = 8$ -ra készültek).



1999/3.1. ábra



1999/3.2. ábra

Színezzük a táblánk négyzeteit sakktáblaszerűen fehérre és feketére és az $ABCD$ négyzetet úgy állítsuk be, hogy BD átlója vízszintes legyen és az A csúcsnál levő kis négyzet színe fehér legyen (1999/3.1. ábra $n = 8$ -ra). A fehér négyzeteket nyilván csak fekete négyzetek, a feketéket pedig csak fehérek fogják le. Írjunk be a BD átló feletti, az átlóval párhuzamos, csúcspan érintkező fehér négyzetsorokba \times -eket vagy pontokat úgy, hogy minden páratlan sorszámú sor minden második helyére \times -et, a páros sorszámú sorok minden második helyére pontot helyezünk el úgy, hogy az AB oldallal érintkező minden fehér négyzetben legyen \times vagy pont. Ezután tükrözzük a pontokat a BD átlóra és a tükröképeket tartalmazó kis négyzetekbe írunk \times -et.

Számoljuk össze a táblázatba írt \times -eket, ehhez elegendő az ABD háromszögben levő \times -szel vagy ponttal jelölt négyzeteket összeszámlálni. Ilyenek vannak a BD átlóval párhuzamos négyzetsorokban, méghozzá annyi, amennyi az A -tól számított sorszámuk, tehát

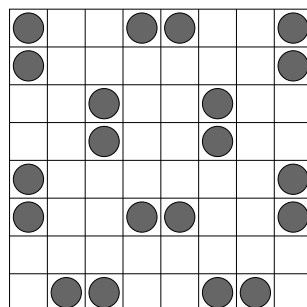
$$1, 2, 3, \dots, \frac{n}{2},$$

összesen $1 + 2 + \dots + \frac{n}{2} = \frac{n(n+2)}{8} = M.$

Figyeljük meg, hogy az ily módon \times -szel jelölt fehér négyzetek lefogják az összes fekete négyzetet, és közülük semelyik kettőnek sincs közös fekete szomszédja (ez még világosabban látszik az 1999/3.2. ábrán, ahol egy-egy \times -es négyzet szomszédjait keresztekbe foglaltuk). Ez éppen azt jelenti, hogy a fekete négyzetek lefogásához M fehér négyzet elegendő, de szükséges is. Meggondolásunkban a fehér és fekete mezők szerepét felcserélve kapjuk, hogy a fehér négyzetek lefogásához M fekete négyzet szükséges és elegendő is; a lefogó fekete négyzeteket leegyszerűbben úgy állíthatjuk elő, hogy az \times -szel jelölt fehér négyzeteket a táblázat középpontja körül 90° -kal elforgatjuk, így ezek a lefogó fekete négyzetek helyére kerülnek. Ezek szerint a lefogáshoz szükséges jelölt négyzetek minimális száma

$$2M = \frac{n(n+2)}{4},$$

a lefogó négyzetek fenti módon történő előállítását az 1999/3.3. ábra mutatja, a lefogó (jelölt) négyzetekbe kis köröket helyeztünk el.



1999/3.3. ábra

Megjegyzések. 1. A négyzetek megjelölése természetesen más módon is lehetséges, de minden jelölt négyzetnek szükségképpen kell, hogy legyen jelölt szomszédja, mert a jelölt négyzetet is le kell „fogni”.

2. n páros volta a négyzet szimmetriái miatt egyszerűsíti a szükséges négyzetek kijelölését; ha n nem páros, a feladat megoldását némileg módosítani kell.

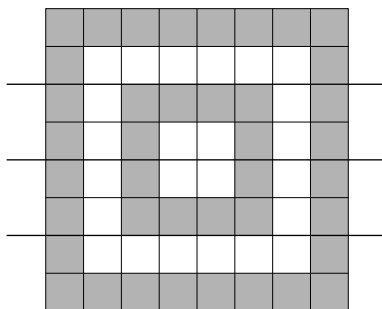
Ha $n = 4k + 1$, a szükséges jelölt négyzetek száma $\frac{(n+1)^2}{4}$, ha $n = 4k + 3$, akkor $\frac{(n+1)^2 - 4}{4}$.

2. megoldás. Osszuk be a négyzetet keretekre az ábra szerint és színezzük minden második kereteket feketére kívülről kezdve. A táblán minden mezőnek két fekete szomszédja van. Így a kijelölt mezők nem lehetnek kevesebben, mint a fekete mezők számának a fele.

Felülről kezdve vegyük kettesével a sorokat. Minden sorpárban 4-gyel több fekete van, mint fehér, tehát a feketék száma:

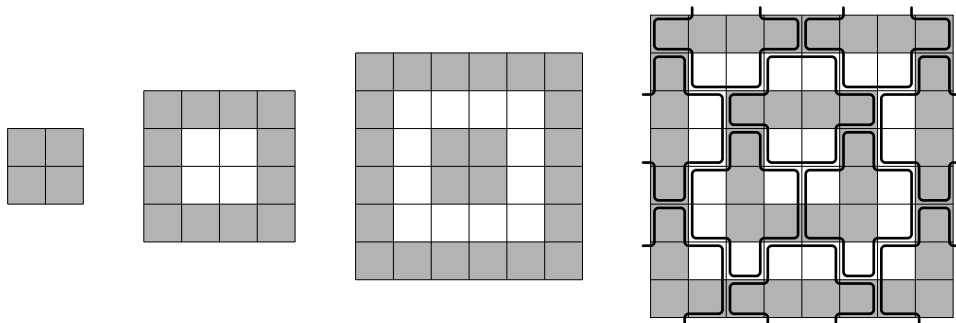
$$\frac{1}{2} \cdot \left(n^2 + \frac{n}{2} \cdot 4 \right) = \frac{n^2 + 2n}{2}.$$

Azt kaptuk, hogy $N \geq 0,25(n^2 + 2n)$. Most megmutatjuk, hogy teljesülhet az egyenlőség, éppen kijelölhető a fekete mezők fele a kívánt módon.



1999/3.4. ábra

A fekete keretek bal alsó sarkából indulva két szomszédos mezőt kijelölünk felfele haladva, majd a keret mentén mindig kettőt kihagyunk, kettőt kijelölünk és így tovább. Így a keretek minden mezőjét nyilván lefedtük, a fehéreket pedig valamely fekete szomszédjuk fedi. Az első néhány n esetén a kijelölést így végezzük:



1999/3.5. ábra

1999/4. Határozzuk meg az összes olyan pozitív egészekből álló (n, p) számpárt, amelyben p prím, $n \leq 2p$ és $(p-1)^n + 1$ osztható n^{p-1} -gyel.

Megoldás. Először néhány speciális esetet vizsgálunk meg.

a) Ha $n = 1$, $(p-1)^1 + 1 = p$ mindig osztható $1^{p-1} = 1$ -gyel, tehát az $(1, p)$ számpár minden p prímre megfelel.

b) Ha $p = 2$, $n^{p-1} = n$ osztója $1^n + 1 = 2$ -nek, ezért (az a) eseten túl) $n = 2$ és így a $(2, 2)$ pár is megfelel.

c) Ha $n \geq 3$, $p > 2$, vizsgáljuk meg az $n = p$ esetet. Ekkor

$$\begin{aligned} (p-1)^p + 1 &= p^p - \binom{p}{1}p^{p-1} + \binom{p}{2}p^{p-2} - \dots + \\ &\quad + \binom{p}{p-3}p^3 - \binom{p}{p-2}p^2 + \binom{p}{p-1}p - 1 + 1 = \\ &= p^2 \left[p^{p-2} - \binom{p}{1}p^{p-3} + \binom{p}{2}p^{p-4} - \dots + \binom{p}{p-3}p - \binom{p}{p-2} + 1 \right]. \end{aligned}$$

Mivel a szögletes zárójelben az utolsó kivételével mindegyik tag osztható p -vel, a zárójelen belüli kifejezésnek p nem osztója, ezért $(p-1)^p + 1$ p -nek legfeljebb 2-ik hatványával osztható: $p-1 \leq 2$, $p \leq 3$; ezek szerint csak $p = 3$ jön számításba; a $(3, 3)$ pár valóban megfelel, mert $2^3 + 1 = 9$ osztható $3^2 = 9$ -cel; a fenti esetekben $n \leq 2p$ mindig teljesül.

Megmutatjuk, hogy a fenti a), b), c) eseteken kívül nincs más megoldás; feltehetjük, hogy $n \geq 2$ és $p \geq 3$. Ebben az esetben $(p-1)^n + 1$ páratlan, ezért ilyen

minden osztója is, következésképpen n is páratlan, $n < 2p$. Legyen n legkisebb prímosztója q (páratlan). Mivel q osztója $(p-1)^n + 1$ -nek, q -nak és $p-1$ -nek nem lehet 1-nél nagyobb közös osztója, $(q, p-1) = 1$. n és $q-1$ is relatív prím, hiszen n -nek nincs q -nál kisebb valódi osztója.

Az elsőfokú diofantikus egyenletek alaptétele szerint $(n, q-1) = 1$ miatt van olyan x és y egész, amelyekre

$$nx + (q-1)y = 1$$

teljesül. Itt $q-1$ páros, ezért x szükségképpen páratlan, ebből

$$(1) \quad (p-1)^1 = (p-1)^{nx+(q-1)y} = (p-1)^{nx} \cdot (p-1)^{(q-1)y}.$$

Mivel $(p-1)^n + 1$ osztható q -val,

$$(p-1)^n \equiv -1 \pmod{q},$$

és a Fermat-féle kongruenciátételből $(q, p-1) = 1$ miatt

$$(p-1)^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}.$$

Ezeket figyelembe véve kapjuk (1)-ből, hogy

$$p-1 \equiv (-1)^x \cdot 1^y \equiv -1 \pmod{q},$$

ami azt jelenti, hogy $p \equiv 0 \pmod{q}$, azaz p osztható q -val. De mivel p és q prímek, ezért $p = q$. Ezek szerint n legkisebb prímosztója p -vel egyenlő, s mivel $n < 2p$, ez csak $n = p$ esetén lehetséges, tehát éppen a c) esettel állunk szemben.

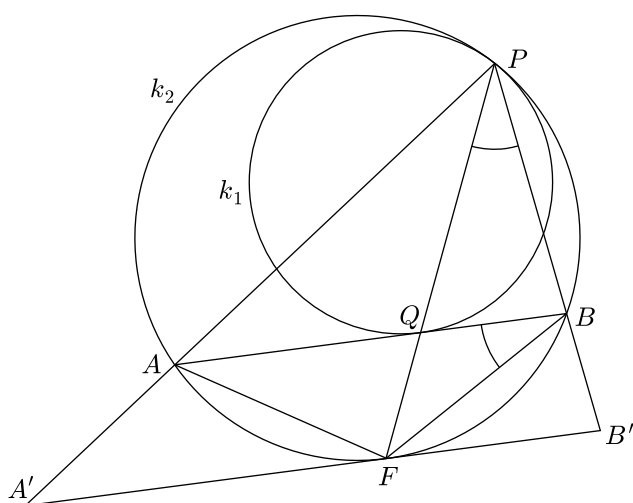
Összefoglalva: a feladat megoldásai a $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(1, p)$ számpárok, ahol p tetszőleges prím.

1999/5. A Γ_1 és Γ_2 körök a Γ kör belsejében vannak és érintik a Γ kört a különböző M , N pontokban.

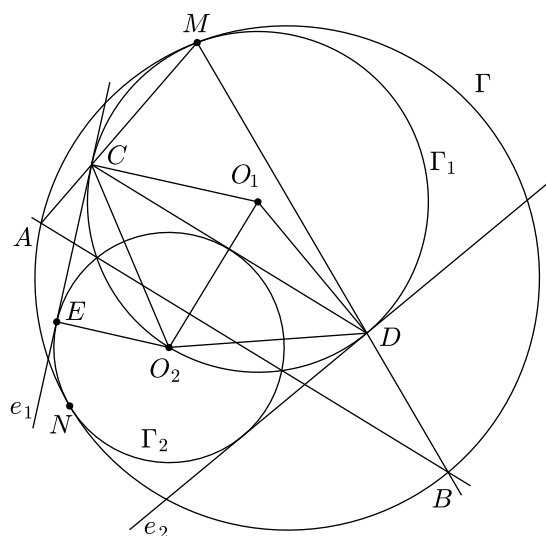
Γ_1 átmegy a Γ_2 kör középpontján. A Γ_1 és Γ_2 két metszéspontján átmenő egyenes a Γ kört az A és B pontokban metszi. Az MA és MB egyenesek Γ_1 -et a C , ill. D pontokban metszik. Bizonyítsuk be, hogy CD érintője a Γ_2 körnek.

Megoldás. Felhasználjuk a következő segédtelet: ha a k_1 kör a k_2 kör belsejében van és a P pontban érintkeznek, továbbá k_2 egy AB húrja a Q pontban érinti k_1 -et és PQ másodszor F -ben metszi k_2 -t, akkor F felezi a k_2 kör P -t nem tartalmazó AB ívét és $FA^2 = FB^2 = FQ \cdot FP$ (1999/5.1. ábra).

Ez azért igaz, mert a P középpontú PF/PQ arányú hasonlóság k_1 -et k_2 -be, AB -t pedig k_2 -nek $A'B'$ érintőszakaszába viszi át, viszont az AB húrral párhuzamos érintő F érintési pontja felezi a húrhoz tartozó körívet, ezért $FA = FB$. Viszont $\angle FPB = \angle QBF$ (egyenlő ívekhez tartozó kerületi szögek), ezért QFB és BFP hasonló háromszögek; a hasonlóságból $\frac{FB}{FQ} = \frac{FP}{FB}$, $FB^2 = FQ \cdot FP$; ezzel segédteletünket bizonyítottuk.



1999/5.1. ábra



1999/5.2. ábra

Eredményünket úgy is fogalmazhatjuk, hogy F hatványa megegyezik minden olyan körre, amely AB -t és k_2 -t is érinti és AB -nek F -fel ellentétes oldalán helyezkedik el (ha F az AB ív felezőpontja).

Legyenek Γ_1 és Γ_2 középpontjai O_1 és O_2 , közös érintőik e_1 és e_2 (1995/5.2. ábra); az ezek által lemetezett ívek felezőpontjainak segédte-lünk szerint egyenlő Γ_1 -re és Γ_2 -re vonatkozó hatványa, ezért ezek rajta vannak Γ_1 és Γ_2 közös húregyenesén (hatványvonalán), tehát azonosak A -val, ill. B -vel. Ugyancsak segédte-lünk következménye, hogy e_1 , ill. e_2 Γ_1 -et C -ben, ill. D -ben érinti.

Az M középpontú, Γ_1 -et Γ -ba átvívó hasonlóság CD -t AB -be viszi át, ezért CD és AB párhuzamosak, O_1O_2 pedig merőleges rájuk, következésképpen O_2 felezi Γ_1 (M -et nem tartalmazó) CD ívét és így $CO_1O_2 \sphericalangle DO_1O_2 \sphericalangle$. Legyen E az e_1 -nek és Γ_2 -nek az érintési pontja. A kerületi és középponti szögek közötti összefüggés alapján Γ_1 -ben

$$ECO_2 \sphericalangle = \frac{1}{2}CO_1O_2 \sphericalangle = \frac{1}{2}DO_1O_2 \sphericalangle = DCO_2 \sphericalangle,$$

ennélfogva CO_2 az $ECD \sphericalangle$ felezője, ezért O_2 egyenlő távolságra van e_1 -től és CD -től, ezért CD érinti Γ_2 -t. Ezzel állításunkat igazoltuk.

1999/6. Határozzuk meg az összes olyan $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvényt, amelyre

$$(1) \quad f(x - f(y)) = f(f(y)) + x f(y) + f(x) - 1$$

teljesül minden $x, y \in \mathbf{R}$ esetén.

Megoldás. Legyen $f(0) = c$. $x = y = 0$ helyettesítéssel (1)-ből

$$(2) \quad f(-c) = f(c) + c - 1$$

következik. Ebből láthatjuk, hogy $c \neq 0$, ellenkező esetben ui. (2)-ből $0 = -1$ adódnék.

Válasszuk x -et f értékkészletéből, R_f -ből; legyen $x = f(y)$, ezt helyettesítjük (1)-be:

$$c = f(x) + x^2 + f(x) - 1,$$

$$(3) \quad f(x) = \frac{c + 1 - x^2}{2}.$$

Megmutatjuk, hogy minden valós szám két R_f -beli szám különbsége. Ha x tetszőleges valós és $y = 0$, akkor (1)-ből azt kapjuk, hogy

$$f(x - c) = f(c) + cx + f(x) - 1,$$

$$(4) \quad f(x - c) - f(x) = cx + f(c) - 1.$$

Legyen most x_0 tetszőleges valós szám, és legyen

$$cx + f(c) - 1 = x_0, \quad \text{azaz} \quad x = \frac{x_0 - f(c) + 1}{c}$$

választással (4)-ből $x_0 = f(x - c) - f(x)$, tehát minden valós szám előáll két R_f -beli szám különbségeként. Legyen most $x_0 = y_1 - y_2$, ahol y_1 és y_2 R_f elemei. (1)-ből $x = y_1$, $f(y) = y_2$ szereposztással

$$f(x_0) = f(y_1 - y_2) = f(y_2) + y_1 y_2 + f(y_1) - 1$$

adódik. Használjuk most fel (3)-at:

$$f(x_0) = \frac{c + 1 - y_2^2}{2} + y_1 y_2 + \frac{c + 1 - y_1^2}{2} - 1 = \frac{2c - (y_1 - y_2)^2}{2} = \frac{2c - x_0^2}{2}.$$

Ez viszont azt jelenti, hogy minden valós x -re szükségképpen

$$f(x) = \frac{2c - x^2}{2}.$$

Hasonlítsuk most ezt össze (3)-mal:

$$\frac{c + 1 - x^2}{2} = \frac{2c - x^2}{2},$$

ebből $c = 1$ következik, és (1) egyetlen lehetséges megoldása

$$(5) \quad f(x) = \frac{2 - x^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + 1.$$

Hogy (5) valóban megoldása az (1) alatti függvényegyenletnek, azt helyettesítéssel láthatjuk be:

$$\begin{aligned} f(x - f(y)) &= f\left(\frac{2x + y^2 - 2}{2}\right) = \frac{2 - \frac{(2x + y^2 - 2)^2}{4}}{2} = \\ &= \frac{8 - (2x + y^2 - 2)^2}{8} = \frac{-4x^2 - y^4 - 4xy^2 + 4y^2 + 8x + 4}{8}. \\ f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1 &= \frac{2 - \frac{(2 - y^2)^2}{4}}{2} + \frac{2x - xy^2}{2} + \frac{2 - x^2}{2} - 1 = \\ &= \frac{8 - (4 + y^4 - 4y^2)}{8} + \frac{2x - xy^2 + 2 - x^2 - 2}{2} = \\ &= \frac{-4x^2 - y^4 - 4xy^2 + 4y^2 + 8x + 4}{8}, \end{aligned}$$

tehát az (5) alatti függvény valóban megoldása (1)-nek.

2000.

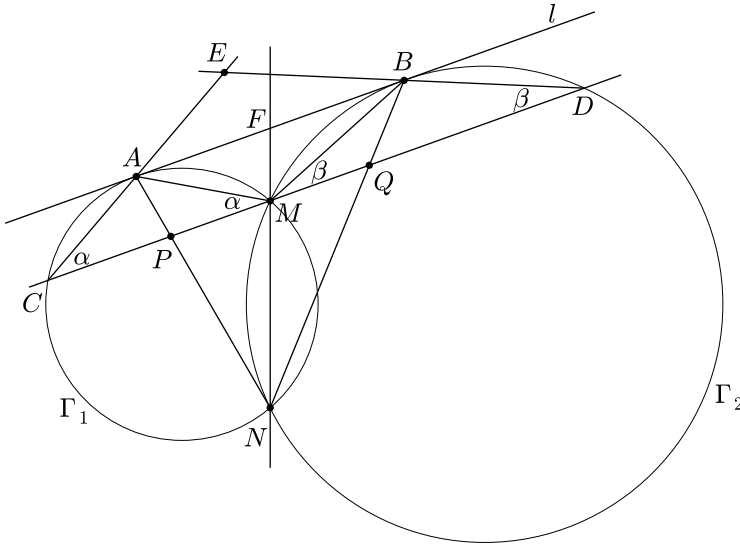
2000/1. A Γ_1 és Γ_2 körök az M és N pontokban metszik egymást.

Legyen l a Γ_1 és Γ_2 köröknek az a közös érintője, amelyre teljesül, hogy M közelebb van l -hez mint N . Érintse l a Γ_1 -et az A , Γ_2 -t a B pontban. Legyen az M -en átmenő, l -vel párhuzamos egyenes másik metszéspontja a Γ_1 körrel C , a Γ_2 körrel pedig D . A CA és DB egyenesek metszéspontja legyen E ; az AN és CD egyenesek metszéspontja legyen P ; a BN és CD egyeneseké pedig legyen Q .

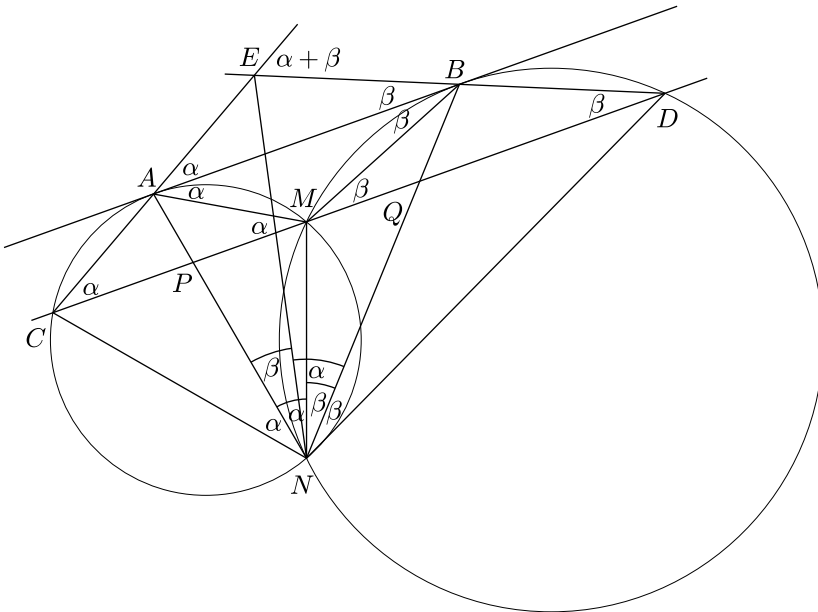
Bizonyítsuk be, hogy $EP = EQ$.

Megoldás. Mivel a körérintő érintési pontja felezi a vele párhuzamos húr által lemetszett ívet, A a \widehat{CM} ívnek, B a \widehat{DM} ívnek felezőpontja és így az ACM és BDM háromszögek egyenlő szárúak (2000/1.1. ábra). Legyen ACM

két, alapon levő szöge α , BDM két alapszöge β . Az $EAB\triangle$ az $ACM\triangle$ -gel egyállású, $BAM\triangle$ viszont az $AMC\triangle$ váltószöge, ezért $EAB\triangle = BAM\triangle = \alpha$, az AB átló tehát felezi az $EAMB$ négyszög A -nál levő szögét. Teljesen hasonló okból AB felezi a négyszög B -nél levő szögét is, ezért az $EAMB$ négyszög deltoid, EM merőleges AB -re és így PQ -ra is.



2000/1.1. ábra



2000/1.2. ábra

Legyen AB és MN metszéspontja F , F rajta van a két kör hatványvonalán, ezért belőle egyenlő érintők húzhatók a két körhöz, következésképpen F az AB

szakasz felezőpontja. Viszont az AF és FB szakaszokat N -ből kicsinyítve éppen a PM és MQ szakaszokat kapjuk, tehát $PM = MQ$.

EM tehát a PQ szakasz felező merőlegese, ezért valóban $EP = EQ$.

Megjegyzés. A versenyre feladatunk két változatát javasolták. A második – változatlan feltételek mellett – annak bizonyítását kívánja meg, hogy EN felezi a CND -et.

Ezt a következő módon láthatjuk be: felhasználva a már bizonyítottak egy részét (2000/1.2. ábra). A kerületi szögek tételéből következik, hogy $CNA = ANM = \alpha$ és $DNB = BNM = \beta$, ezért

$$CND = 2\alpha + 2\beta \quad \text{és} \quad ANB = \alpha + \beta.$$

Vegyük észre, hogy az $ANBE$ négyszög húrnégyszög, mivel E -nél levő külső szöge – ami az ABE háromszögnek is külső szöge – egyenlő $\alpha + \beta$ -val és ugyanakkora a négyszög N szögénél levő belső szög is. Mivel pedig az A , N , B , E pontok egy körön vannak, $EAB = ENB = \alpha$ és így $END = \alpha + \beta$, tehát EN valóban felezi a CND -et.

2000/2. Legyenek a , b , c olyan pozitív valós számok, amelyekre $abc = 1$ teljesül. Bizonyítsuk be, hogy

$$(1) \quad \left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

1. megoldás. Kihasználva az $abc = 1$ feltételt, vezessük be az

$$a = \frac{x}{y}, \quad b = \frac{y}{z}, \quad c = \frac{z}{x}$$

helyettesítéseket, ahol x , y , z alkalmas pozitív számok (ilyenek lehetnek pl. $x = 1$, $y = \frac{1}{a}$, $z = \frac{1}{ab} = c$). Ezzel egyenlőtlenségünk xyz -vel való szorzás után így alakul:

$$(2) \quad (-x + y + z)(x - y + z)(x + y - z) \leq xyz.$$

A zárójelekben szereplő kifejezések közül nem lehet egynél több nempozitív, mivel bármely kettőnek az összege x , y , z valamelyikének kétszerese. Ha közülük egy nempozitív, az állítás nyilvánvaló; ezért feltehetjük, hogy mindhárom pozitív. (2) bizonyításának sok lehetőségéből egyet emelünk ki. Induljunk ki a nyilvánvaló alábbi egyenlőtlenségekből:

$$\begin{aligned} x^2 - (y - z)^2 &\leq x^2, & \text{azaz} & \quad (x + y - z)(x - y + z) \leq x^2, \\ y^2 - (z - x)^2 &\leq y^2, & \text{azaz} & \quad (y + z - x)(y - z + x) \leq y^2, \\ z^2 - (x - y)^2 &\leq z^2, & \text{azaz} & \quad (z + x - y)(z - x + y) \leq z^2. \end{aligned}$$

E három egyenlőtlenséget összeszorozva éppen (2) két oldalának a négyzetét kapjuk, amiből a tényezők nemnegatív voltából (2) közvetlenül következik.

2. megoldás. Induljunk ki ismét a három tényező nemnegatív voltából. Jelölje (1) bal oldalát B , és hozzuk közös nevezőre minden zárójelben a három tagot, ezek szorzata $abc = 1$ nevezőjű tört, tehát

$$B = (ab - b + 1)(bc - c + 1)(ca - a + 1).$$

Most végezzük el B (1)-beli alakjában az $\frac{1}{b} = ac$, $\frac{1}{c} = ab$, $\frac{1}{a} = bc$ helyettesítéseket, kapjuk, hogy

$$B = (a - 1 + ca)(b - 1 + ab)(c - 1 + bc).$$

B utóbbi két alakjának a szorzata:

$$B^2 = [(ab - b + 1)(b - 1 + ab)][(bc - c + 1)(c - 1 + bc)][(ca - a + 1)(a - 1 + ca)].$$

A szögletes zárójelen belüli kifejezésekre alkalmazzuk a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$(ab - b + 1)(b - 1 + ab) \leq \frac{1}{4}(ab - b + 1 + b - 1 + ab)^2 = a^2 b^2,$$

$$(bc - c + 1)(c - 1 + bc) \leq \frac{1}{4}(bc - c + 1 + c - 1 + bc)^2 = b^2 c^2,$$

$$(ca - a + 1)(a - 1 + ca) \leq \frac{1}{4}(ca - a + 1 + a - 1 + ca)^2 = c^2 a^2.$$

Ez éppen azt jelenti, hogy $B^2 \leq a^4 b^4 c^4 = 1$, tehát $B \leq 1$, ami bizonyítandó volt.

2000/3. Legyen $n \geq 2$ pozitív egész szám. A kiinduló állásban n bolha ül egy vízszintes egyenesen, nem mind ugyanabban a pontban.

Egy λ valós számra definiáljunk egy lépést a következőképpen:

válasszunk ki két bolhát, amelyek az A és B pontokban ülnek, ahol A balra van B -től;

ugorjon az A -n lévő bolha az egyenesnek abba a C pontjába, ami jobbra van B -től, és amelyre $BC/AB = \lambda$ teljesül.

Határozzuk meg az összes olyan λ értéket, amelyre teljesül, hogy akárhogy választva az M pontot az egyenesen, és akárhogy választva az n bolha kiindulási pozícióját, létezik lépéseknek egy olyan véges sorozata, amelyek végrehajtása után az összes bolha M -től jobbra helyezkedik el.

Megoldás. Először megmutatjuk, hogy $\lambda \geq \frac{1}{n-1}$ esetén minden bolha eljuthat M -től jobbra. Minden ugrásnál a két kiválasztott bolha legyen a bal és a jobb szélső. A k -adik ugrás után jelölje a bolhapárok közti távolságok közül a legnagyobbat D_k , a legkisebbet d_k . Nyilván $D_k \geq (n-1)d_k$.

A $(k+1)$ -dik ugrás után létrejön egy λD_k nagyságú távolság a jobb szélén. Lehet, hogy most ez a legkisebb távolság, azaz $d_{k+1} = \lambda D_k$. Minden más esetben

a legkisebb távolság nem csökkenhetett, $d_{k+1} \geq d_k$. Ezek alapján

$$\frac{d_{k+1}}{d_k} \geq \min \left\{ 1, \frac{\lambda D_k}{d_k} \right\} \geq \min \{1, (n-1)\lambda\} \geq 1.$$

Az első $n-1$ ugrás után minden bolha különböző helyen lesz, ekkor $d_{n-1} > 0$. Mivel a legkisebb távolság nem csökken, a bal szélső bolha helye mostantól mindig legalább d_{n-1} -gyel jobbra kerül. Elég sok ugrással M -en túlra jutunk.

Most megmutatjuk, hogy $\lambda < \frac{1}{n-1}$ esetén semelyik kiindulóhelyzetből sem lehet akármilyen messzire eljutni. Mostantól a bolhákat jelöljük számokkal az egyenest számegyenesnek tekintve. A k -dik ugrás után legyen a bolhák helyét jelölő számok összege s_k , a jobb szélső bolha száma j_k . Nyilván $s_k \leq nj_k$. Bebizonyítjuk, hogy bárhogy ugrálnak a bolhák, a j_k sorozat korlátos.

A $(k+1)$ -dik ugrás során az A bolha átugorja B -t és a C pontba érkezik, a pontoknak megfelelő számok legyenek a , b és c . Így $s_{k+1} = s_k + c - a$, $c - b = \lambda(b - a)$. Ez utóbbi $\lambda(c - a) = (1 + \lambda)(c - b)$ alakba írható. A két dolgot összevetve:

$$(1) \quad s_{k+1} - s_k = c - a = \frac{1 + \lambda}{\lambda}(c - b).$$

Amennyiben $c > j_k$, akkor az A bolha éppen most ugrott a jobb szélre, $j_{k+1} = c$. Másrészt tudjuk, hogy $b \leq j_k$. Nézzük meg, (1) hogyan alakul:

$$(2) \quad s_{k+1} - s_k = \frac{1 + \lambda}{\lambda}(c - b) \geq \frac{1 + \lambda}{\lambda}(j_{k+1} - j_k).$$

A második egyenlőtlenség akkor is teljesül, ha $c \leq j_k$. Ekkor ugyanis $j_{k+1} - j_k = 0$, míg $s_{k+1} - s_k = c - a > 0$.

Mivel $\lambda < \frac{1}{n-1}$, ezért $1 + \lambda > n\lambda$, amiből $\frac{1 + \lambda}{\lambda} - n > 0$. Legyen $z = \frac{1 + \lambda}{\lambda} - n$. Rendezzük át (2)-t:

$$(3) \quad \frac{1 + \lambda}{\lambda}j_k - s_k \geq \frac{1 + \lambda}{\lambda}j_{k+1} - s_{k+1}.$$

Ekkor felhasználva, hogy $s_k \leq nj_k$ a (3) bal oldalát becsülhetjük:

$$\frac{1 + \lambda}{\lambda}j_k - s_k \geq z \cdot j_k + (n \cdot j_k - s_k) \geq z \cdot j_k.$$

A (3) egyenlőtlenség az ugrások száma szerint monoton csökkenést ír le, ezért

$$\frac{1 + \lambda}{\lambda}j_1 - s_1 \geq \frac{1 + \lambda}{\lambda}j_k - s_k \geq z \cdot j_k.$$

Mivel $z \cdot j_k$ korlátos, maga a j_k sorozat is korlátos, és ennek bizonyítása volt a célunk. A feladat kérdésére a válasz: $\lambda \geq \frac{1}{n-1}$.

2000/4. Egy bűvésznek száz kártyája van, amelyek 1-től 100-ig vannak számozva. Mindegyiket beleteszi három doboz – egy piros doboz, egy fehér doboz és egy kék doboz – valamelyikébe, olymódon, hogy mindegyik dobozban van legalább egy kártya.

A közönség egy tagja kiválaszt kettőt a három doboz közül, és mindegyikből kivesz egy kártyát, majd kihirdeti a kivett kártyákon lévő két szám összegét. Ennek az összegnek az ismeretében a bűvész meg tudja mondani, hogy melyik az a doboz, amiből nem vettek ki kártyát.

Hányféleképpen lehet a kártyákat a dobozokban úgy elhelyezni, hogy ez a mutatóvány mindig sikerüljön? (Két elhelyezést különbözőnek tekintünk, ha van legalább egy kártya, ami másik dobozba kerül.)

Megoldás. Megmutatjuk, hogy 12-féle jó elrendezés van. Egy adott elrendezésben legyen minden szám színe az őt tartalmazó doboz színe; p , f vagy k .

1. eset: Van olyan i , hogy i , $i+1$, $i+2$ három különböző színű, pl. pfk . Mivel $i+(i+3)=(i+1)+(i+2)$, az $i+3$ színe csak p lehet, különben ez az összeg két különböző szín párral is megvalósulna. Ezek szerint három szomszédos, különböző színű szám meghatározza a következőt. Tehát a pfk után p , aztán f , aztán k következik és így tovább. Érvelésünk visszafelé is működik, a pfk előtti szám k , az előtt f stb.

Elég tehát megadni 1, 2 és 3 színét különböző módon, ez 6 lehetőség. Minden ilyen elrendezés valóban jó, mivel a $p+f$, $f+k$, $k+p$ összegeknek más a hármass maradéka.

2. eset: Nincs három különböző színű szomszédos szám. Legyen az 1 színe p . Legyen i a legkisebb nem piros szám, mondjuk f . Legyen a legkisebb kék szám t . Mivel nincs pfk , ezért $i+1 < t$.

Tegyük fel, hogy $t < 100$. Mivel $i+t=(i-1)+(t+1)$, ezért $(t+1)$ csak p lehet. Ekkor azonban $i+(t+1)=(i+1)+t$ miatt $(i+1)$ csak k lehet, ami ellentmond annak, hogy t a legkisebb kék. Ezért t csak 100 lehet.

Mivel $(i-1)+100=i+99$, a 99 csak f lehet. Megmutatjuk, hogy az 1 p , a 100 k , az összes többi f . Ha $s > 1$ p lenne, akkor $s+99=(s-1)+100$ miatt $(s-1)$ csak k lehetne, de a legkisebb kék a 100.

Ebben az esetben a $pf f \dots f f k$ színezést kaptuk, és ez valóban jó is. Ha az összeg 101-nél kisebb, a kimaradó doboz a k ; ha az összeg 101, akkor f ; ha 101-nél nagyobb, akkor a p maradt ki. Ennél az elrendezésnél az összeg ismeretében pontosan meg tudjuk mondani, mely számokat húzták ki. Most is 6 lehetőségünk van a színek sorrendjét megadni.

Megjegyzés. Ezt a feladatot Magyarország javasolta, kitűzője Dobos Sándor.

2000/5. *Döntsük el, hogy létezik-e olyan n pozitív egész szám, amelyre teljesül, hogy n pontosan 2000 különböző prímszámmal osztható, és $2^n + 1$ osztható n -nel.*

Megoldás. Többet fogunk bizonyítani: a 2000 helyett tetszőleges k -t írva található ilyen n szám. Jelölje ezt $n(k)$.

Indukciós bizonyításunk kezdő lépése legyen $n(1) = 3$. Az indukciós lépéshez tegyük fel, hogy $k \geq 1$ esetén $n(k) = 3^l \cdot t$, $l \geq 1$ és $3 \nmid t$, továbbá $n(k)$ -nak pontosan k különböző prím osztója van és $n(k) \mid 2^{n(k)} + 1$ teljesül. Az indukciós lépésben legyen $n = n(k)$. Mivel n páratlan, ezért $3 \mid 2^{2^n} - 2^n + 1$. Mivel $2^{3n} + 1 = (2^n + 1)(2^{2n} - 2^n + 1)$, ezért $3n \mid 2^{3n} + 1$. Az alábbi lemma szerint van olyan páratlan p prím, amelyre $p \mid 2^{3n} + 1$ és $p \nmid 2^n + 1$. Ekkor $n(k+1) = 3p \cdot n(k)$ megfelelő szám lesz; az indukciót befejeztük.

Lemma: Minden $a > 2$ egész számhoz található olyan p prím, hogy $p \mid a^3 + 1$, de $p \nmid a + 1$.

Bizonyítás: Indirekt úton bizonyítunk. Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz egy $a > 2$ egész számra. Ekkor vegyük $a^2 - a + 1$ tetszőleges p prím osztóját. Mivel $p \mid a^2 - a + 1$, ezért $p \mid (a^2 - a + 1)(a + 1) = a^3 + 1$, tehát indirekt feltevésünk szerint p osztója lesz $(a + 1)$ -nek is. Másrészt

$$(1) \quad a^2 - a + 1 = (a + 1)(a - 2) + 3,$$

így p csak 3 lehet. Ezek szerint $a^2 - a + 1$ 3 hatványa. Mivel $a + 1$ 3-nak többszöröse, ezért $a - 2$ is 3-nak többszöröse. Most (1)-et vizsgálva azt kaptuk, hogy $a^2 - a + 1$ 3-mal osztható, de 9-cel nem. Az egyetlen ilyen 3 hatvány éppen a 3. Ellentmondáshoz jutottunk, mivel $a > 2$ esetén $a^2 - a + 1 > 3$ teljesül.

2000/6. *Legyenek AH_1 , BH_2 , CH_3 az ABC hegyesszögű háromszög magasságai. Az ABC háromszög beírt köre a BC , CA , AB oldalakat rendre a T_1 , T_2 , T_3 pontokban érinti. Legyenek l_1 , l_2 , l_3 egyenesek rendre a H_2H_3 , H_3H_1 , H_1H_2 egyeneseknek a tükröképei a T_2T_3 , T_3T_1 , T_1T_2 egyenesekre.*

Bizonyítsuk be, hogy l_1 , l_2 , l_3 egy olyan háromszöget határoznak meg, amelynek csúcsai az ABC háromszög beírt körén vannak.

Megoldás. A feladat lényegében azt mondja ki, hogy ha a talpponti háromszög oldalegyeneseit tükrözzük a beírt kör érintési pontjai által meghatározott háromszög (az ún. érintőpont háromszög) megfelelő oldalaira, a tükröképek (l_1 , l_2 , l_3) által közrezárt háromszög a beírt körbe van beírva. Először egy segédítelt bizonyítunk be:

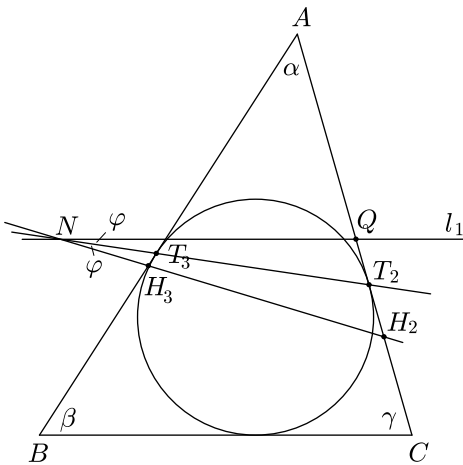
A talpponti háromszög tetszőleges oldalának a tükröképe az érintőpont háromszög megfelelő oldalára párhuzamos az eredeti háromszög egy oldalával. Ezt a H_2H_3 egyenes T_2T_3 egyenesre vonatkozó tükröképére bizonyítjuk be, tehát

azt, hogy l_1 párhuzamos BC oldallal (2000/6.1. ábra). Ha H_2H_3 és T_2T_3 párhuzamosak, vagy egybeesnek, akkor a háromszög egyenlő szárú, az állítás nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy H_2H_3 és T_2T_3 ábránknak megfelelően egy N pontban metszik egymást, és T_2T_3 a H_2H_3 egyenessel és l_1 -gyel is φ szöget zár be, l_1 AC -t a Q pontban metszi.

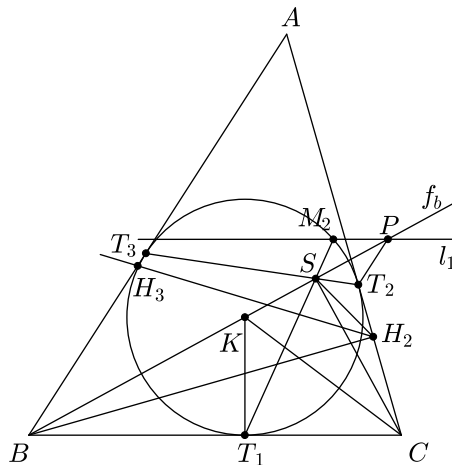
A szokásos jelöléseket használva, mivel $BC H_2H_3$ húrnégyszög, $AH_2N \sphericalangle = \beta$ és a külsőszög-tételből $AT_2N \sphericalangle = \varphi + \beta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, $\varphi = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \beta$. Ismét a külsőszög-tételt alkalmazva kapjuk, hogy

$$AQN \sphericalangle = \varphi + AT_2N \sphericalangle = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \beta + 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 180^\circ - (\alpha + \beta) = \gamma,$$

ezért $ACB \sphericalangle = AQN \sphericalangle = \gamma$ egyállású szögek, l_1 valóban párhuzamos BC -vel.



2000/6.1. ábra



2000/6.2. ábra

Legyen M_1, M_2, M_3 rendre a T_1, T_2, T_3 tükörképe az $A \sphericalangle$, a $B \sphericalangle$, a $C \sphericalangle$ szögfelezőjére, ezek a beírt körön vannak rajta, hiszen a szögfelezők a kör szimmetriatengelyei. Be fogjuk bizonyítani, hogy az $M_1M_2M_3$ háromszög éppen az l_1, l_2, l_3 egyenesek által közrezárt háromszöggel azonos. Ehhez először megmutatjuk, hogy

H_2 tükörképe a T_2T_3 egyenesre rajta van a $B \sphericalangle$ f_b felezőjén (2000/6.2. ábra). (Természetesen hasonló tétel igaz a H_1, H_3 pontokra is.) Ennek igazolására állítsunk merőlegest H_2 -ből T_2T_3 -ra, ez f_b -t P -ben metszi; legyen f_b és T_1M_2 metszéspontja S . Állításunkat bizonyítjuk, ha megmutatjuk, hogy $PSH_2 \sphericalangle = 2PST_2 \sphericalangle$. $PST_2 \sphericalangle = BST_3 \sphericalangle$ (csúcsszögek), a külsőszög-tételből

$$PST_2 \sphericalangle = BST_3 \sphericalangle = AT_3S \sphericalangle - T_3BS \sphericalangle = \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = \frac{\gamma}{2}.$$

Viszont $BST_1 \sphericalangle = BST_3 \sphericalangle$, mivel szimmetrikusak f_b -re. Legyen K a beírt kör középpontja; $KST_1 \sphericalangle = KCT_1 \sphericalangle = BST_3 \sphericalangle = \frac{\gamma}{2}$, ezért SKT_1C húrnégyszög, mert

S -ből és C -ből KT_1 ugyanakkora szögben látszik; ennek viszont az a következménye, hogy benne a $T_1\triangleleft$ -gel szemben is derékszög van, tehát $KSC\triangleleft=90^\circ$. De így BCH_2S is húrnégyszög, mert BC a H_2 és az S pontokból is derékszögben látszik. $PSH_2\triangleleft$ a BCH_2S húrnégyszög külső szöge, ezért $PSH_2\triangleleft=\gamma=2PST_2\triangleleft$, amit bizonyítanunk kellett.

Bizonyításunkból következik, hogy a T_2T_3 -ra való szimmetrikus voltuk miatt $BPT_2\triangleleft=SH_2T_2\triangleleft=\beta/2$, felhasználva, hogy BCH_2S húrnégyszög. Mivel M_2 a T_2 pont tükörképe f_b -re, $BPM_2\triangleleft=BPT_2\triangleleft=\beta/2$, ezért PM_2 párhuzamos BC -vel. Mivel P a H_2 tükörképe T_2T_3 -ra, l_1 átmegy P -n és segédvonalunk szerint l_1 párhuzamos BC -vel és PM_2 is párhuzamos BC -vel, kell, hogy PM_2 azonos legyen l_1 -gyel.

Ha most előző meg gondolásainkban a 2-es és 3-as indexeket felcseréljük és B helyett a C csúcsot szerepeltetjük, azt kapjuk, hogy l_1 M_3 -at is tartalmazza, majd ugyanezeket az l_2 és l_3 egyenesek esetén is megismételve, a bizonyítandó tételt nyerjük.

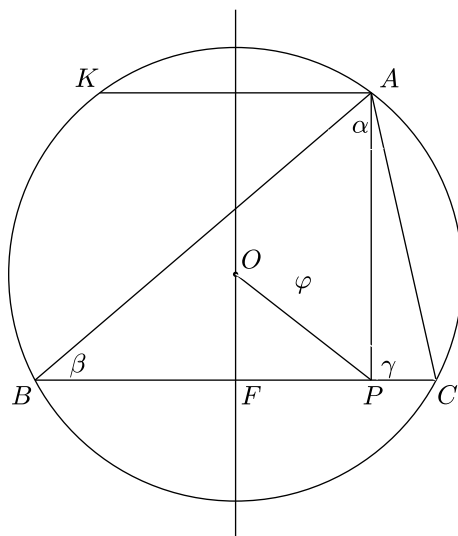
Megjegyzések. 1. Meg gondolásainkban gyakran felhasználtuk bizonyos pontok, szakaszok, szögek 2000/6.2. ábrán látható elhelyezkedését. Az ABC háromszög alakjának a változásával ezek az elhelyezkedések is módosulhatnak némileg, pl. előfordulhat bizonyos felhasznált pontok egybeesése, szakaszok párhuzamossága, vagy az egy egyenesen levő pontok más sorrendje; bizonyításaink lényegében ezekre az esetekre is érvényesek, esetleg lényegtelen változtatásokkal, pl. a húrnégyszögek tétele helyett a kerületi szögek tételét kell alkalmazni. Ennek a feladatnak a szintetikus (tehát az analitikus geometria eszközeit nélkülöző) megoldásainál ilyen problémák fellépése szükségszerű; mindegyikre a verseny folyamán már időhiány miatt sem lehet kitérni, ezért általában helyes megoldásként fogadják el azt, ha a versenyző ilyenek létre hívja a figyelmet vagy megjegyzi, hogy a megoldás ezekben az esetekben is lényegében azonos a közölttel.

2. E feladat tartalmában szoros összefüggésben van az 1982. évi NMD 2. feladatával; mindkét feladatnak a mélyén az ún. Feuerbach-tétel áll, mely szerint a háromszög Feuerbach-köre és beírt köre érintik egymást, ez az érintési pont a két kör hasonlósági középpontja. A feladatunkban az ABC háromszög oldalfelező pontjai által meghatározott háromszögnek az érintési pontból való $\frac{2r}{R}$ arányú kicsinyítése éppen az $M_1M_2M_3$ háromszöggel azonos.

2001.

2001/1. Legyen az ABC hegyesszögű háromszög körülírt körének középpontja O . Legyen P az A -ból induló magasság talppontja a BC oldalon. Tegyük fel, hogy $BCA\triangleleft\geq ABC\triangleleft+30^\circ$. Bizonyítsuk be, hogy $CAB\triangleleft+COP\triangleleft<90^\circ$.

1. megoldás. Legyen $COP \triangleleft = \varphi$, a szokásos jelölésekkel $\gamma \geq \beta + 30^\circ$ a feltétel és a bizonyítandó: $\alpha + \varphi < 90^\circ$, azaz $\varphi < 90^\circ - \alpha$. Ha BC felezőpontja F , a kerületi és középponti szögek közötti összefüggésből $COF \triangleleft = \alpha$ és a COF derékszögű háromszögből $OCF \triangleleft = OCP \triangleleft = 90^\circ - \alpha$, a bizonyítandó tehát az OCP háromszögben egyenértékű a $CP < OP$ állítással (2001/1.1. ábra).



2001/1.1. ábra

Mivel $\gamma > \beta$, P az FC szakaszon van. Legyen A tükörképe BC felező merőlegesére K , ez is a köré írt körön van és $KCB \triangleleft = ABC \triangleleft = \beta$. Mivel $KCA \triangleleft = \gamma - \beta \geq 30^\circ$, a KCA kerületi szöghöz tartozó húr hossza $(2R \sin KCA \triangleleft) \geq R$, ahol R a háromszög köré írt kör sugara, tehát $AK \geq R$, $FP = \frac{AK}{2}$; $FP \geq \frac{R}{2}$.

Mivel ABC hegyesszögű háromszög, BC kisebb a köré írt kör átmérőjénél: $BC < 2R$, következésképpen $CF < R$. Ebből

$$CP = CF - FP < R - \frac{R}{2} = \frac{R}{2} \leq FP,$$

és $FP < OP$ (ti. OP nagyobb merőleges vetületénél), ezért $CP < OP$, ami bizonyítandó volt.

2. megoldás. Az előző megoldásban közölteknek megfelelően itt is a $CP < OP$ egyenlőtlenség bizonyítására törekszünk. Mivel $AB = 2R \sin \gamma$ és $AC = 2R \sin \beta$,

$$\begin{aligned} BP - CP &= AB \cos \beta - AC \cos \gamma = \\ &= 2R(\sin \gamma \cos \beta - \sin \beta \cos \gamma) = 2R \sin(\gamma - \beta). \end{aligned}$$

A feltételekből következik, hogy

$$30^\circ \leq \gamma - \beta < \gamma < 90^\circ, \quad \text{ezért} \quad BP - CP \geq 2R \sin 30^\circ = R,$$

tehát $BP - CP \geq R$. Ezért $R + OP = OB + OP > BP \geq R + CP$, amiből $OP > CP$.

2001/2. Bizonyítsuk be, hogy

$$(1) \quad \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1$$

minden a, b, c pozitív valós számra.

1. megoldás. (1) bal oldalán egyszerűsítsük a törteket rendre a -val, b -vel, c -vel és vezessük be az $x = \frac{bc}{a^2}$, $y = \frac{ca}{b^2}$, $z = \frac{ab}{c^2}$ jelöléseket:

$$(2) \quad \frac{1}{\sqrt{1+8x}} + \frac{1}{\sqrt{1+8y}} + \frac{1}{\sqrt{1+8z}} \geq 1,$$

ahol

$$(3) \quad xyz = 1.$$

Vezessük be továbbá az $r = \sqrt{1+8x}$, $s = \sqrt{1+8y}$, $t = \sqrt{1+8z}$ jelöléseket, ezzel (2) így alakul:

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t} \geq 1,$$

azaz

$$(4) \quad (rs + st + tr)^2 \geq (rst)^2.$$

Ehhez figyeljük meg, hogy

$$\begin{aligned} (rs + st + tr)^2 &= (rs)^2 + (st)^2 + (tr)^2 + 2rst(r + s + t) = \\ &= (1+8x)(1+8y) + (1+8y)(1+8z) + (1+8z)(1+8x) + 2rst(r + s + t) = \\ &= 3 + 16(x + y + z) + 64(xy + yz + zx) + 2rst(r + s + t), \end{aligned}$$

és (figyelembe véve (3)-at):

$$(rst)^2 = (1+8x)(1+8y)(1+8z) = 1 + 8(x + y + z) + 64(xy + yz + zx) + 512.$$

Helyettesítsük e két utóbbi eredményt (4)-be, bizonyítandó egyenlőtlenségünk akkor a rendezés és 2-vel való egyszerűsítés után így alakul:

$$(5) \quad 1 + 4(x + y + z) + rst(r + s + t) \geq 256.$$

Vegyük most figyelembe (3)-at a számtani-mértani közép egyenlőtlenség alkalmazásánál:

$$\begin{aligned} (6) \quad x + y + z &\geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3; \\ xy + yz + zx &\geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} = 3; \\ r + s + t &\geq 3(rst)^{\frac{1}{3}}, \end{aligned}$$

továbbá

$$\begin{aligned} (7) \quad rst(r + s + t) &\geq 3(rst)^{\frac{4}{3}} = 3[(1+8x)(1+8y)(1+8z)]^{\frac{2}{3}} = \\ &= 3[1 + 8(x + y + z) + 64(xy + yz + zx) + 512]^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

(5) bal oldalát a (6) és (7) alatti eredményekkel becsülve kapjuk:

$$1 + 4(x + y + z) + rst(r + s + t) \geq 1 + 4 \cdot 3 + 3[1 + 8 \cdot 3 + 64 \cdot 3 + 512]^{\frac{2}{3}} = 256,$$

amivel a feladat egyenlőtlenségét igazoltuk.

Az alkalmazott egyenlőtlenségekben egyenlőség csakis $x = y = z = 1$ esetén áll fenn, ezért ugyanez igaz (2)-re is, továbbá (1)-ben csak $a = b = c$ esetén teljesül az egyenlőség.

2. megoldás. Arra törekszünk, hogy (1) bal oldalán minden törtet külön becsüljünk meg. Megmutatjuk, hogy

$$(8) \quad \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} \geq \frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}}}.$$

(8) egyenértékű a

$$\left(a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}}\right)^2 \geq a^{\frac{2}{3}}(a^2 + 8bc) = \left(a^{\frac{4}{3}}\right)^2 + 8a^{\frac{2}{3}}bc$$

egyenlőtlenséggel vagy átrendezve:

$$\left(a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}}\right)^2 - \left(a^{\frac{4}{3}}\right)^2 \geq 8a^{\frac{2}{3}}bc.$$

Ennek bal oldalát alakítsuk szorzattá, majd a tényezőkre alkalmazzuk a számtani-mértani közép egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned} (a^{\frac{4}{3}} + a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}})(b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}}) &\geq 4\sqrt[4]{a^{\frac{8}{3}}b^{\frac{4}{3}}c^{\frac{4}{3}}} \cdot 2\sqrt{b^{\frac{4}{3}}c^{\frac{4}{3}}} = \\ &= 4a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}} \cdot 2b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}} = 8a^{\frac{2}{3}}bc, \end{aligned}$$

ami (8) igazolását jelenti.

Hasonlóan nyerjük, hogy

$$\frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} \geq \frac{b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}}} \quad \text{és} \quad \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq \frac{c^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}}}.$$

Ezeket a (8) alattival összegezve (1) bizonyítását kapjuk:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq \frac{a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}}} = 1.$$

Megjegyzés. A feladat egy általánosítása a következő: ha $\lambda \geq 0$, akkor

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + \lambda bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + \lambda ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + \lambda ab}} \geq \frac{3}{\sqrt{1 + \lambda}}.$$

2001/3. Egy matematikaversenyen 21 lány és 21 fiú vett részt.

- (1) Mindegyik versenyző legfeljebb hat feladatot oldott meg.
- (2) Mindegyik fiúhoz és mindegyik lányhoz van legalább egy olyan feladat, amelyet mindketten megoldottak.

Bizonyítsuk be, hogy van olyan feladat, amelyet legalább három lány és legalább három fiú megoldott.

Megoldás. Készítsünk egy 21×21 -es táblázatot, amelynek oszlopai jelentsek az egyes fiúkat, míg a sorok a résztvevő lányokat. A táblázat minden egyes mezőjébe írjuk be annak a feladatnak a sorszámát, amelyet mind az oszlophoz tartozó fiú, mind a sorhoz tartozó lány megoldott. (2) szerint ilyen feladat mindig létezik. (Ha több is van, akkor elég az egyik ilyen feladat sorszámát beírni.)

Vizsgáljuk az egyes oszlopokat. Fessük be kékre azokat a mezőket, amelyekben olyan szám áll, amelyik az adott oszlopban legalább háromszor előfordul. Az (1) feltétel szerint bármelyik oszlopot nézzük, abban legfeljebb hatféle szám szerepelhet. 11-nél kevesebb kék mező nem lehet egy oszlopon belül, hiszen ekkor 10-nél több olyan mező lenne, melynek száma csak egyszer, vagy kétszer szerepel. Ehhez viszont legalább hatféle szám kellene, de ezeken kívül már az (1) feltétel miatt más számot nem írhatnánk be. Így az oszlop 21 mezőjéből viszont csak legfeljebb 12 mezőbe kerülne szám, ami ellentmond a (2) feltételnek.

Mivel minden oszlopban legalább 11 kék mező van, ezért az egész táblázatban a mezők több, mint fele kék.

Most vizsgáljuk a sorokat. Fessük pirosra egy adott soron belül azokat a mezőket, amelyekben olyan szám áll, amelyik ebben a sorban legalább háromszor fordul elő. A fenti módon belátható, hogy a mezők több, mint fele piros. A skatulya elv miatt lesz tehát olyan mező, amelyik kék is és piros is. Ez azt jelenti, hogy az ezen mezőhöz tartozó feladatot legalább három lány (mert a mező kék) és legalább három fiú (mert a mező piros) megoldotta.

2001/4. Legyen n egy 1-nél nagyobb páratlan egész, k_1, k_2, \dots, k_n pedig adott egészek. Az $1, 2, \dots, n$ számok mind az $n!$ darab $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ permutációjára legyen

$$S(a) = \sum_{i=1}^n k_i a_i.$$

Bizonyítsuk be, hogy van két olyan b és c permutáció, amelyekre $b \neq c$, és $n!$ osztója $(S(b) - S(c))$ -nek.

Megoldás. Legyen az $n!$ permutáció $A_1, A_2, \dots, A_{n!}$. Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, vagyis $n! \nmid S(A_i) - S(A_j)$, ahol $i \neq j$. Mivel $n!$ permutáció van, és $n!$ -féle maradék $n!$ -sal osztva, ezért minden maradék pontosan egyszer fordul elő. Így az $S(A_i)$ -kat összeadva a következőt kapjuk:

$$\sum_{i=1}^{n!} S(A_i) \equiv 1 + 2 + \dots + n! = \left(\frac{n! + 1}{2} \right) \cdot n! \not\equiv 0 \pmod{n!}.$$

Kihasználtuk, hogy $n! + 1$ páratlan és ezért $\frac{n! + 1}{2}$ nem egész.

Most adjuk össze az $S(A_i)$ -kat, figyelembe véve, hogy az $1, 2, \dots, n$ számok mindegyike $(n-1)!$ permutációban szerepel a k_i szorzóval, vagyis

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n!} S(A_i) &= (n-1)! \cdot \sum_{i=1}^n k_i (1+2+\dots+n) = \\ &= (n-1)! \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot n \cdot \sum_{i=1}^n k_i = n! \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot \sum_{i=1}^n k_i \equiv 0 \pmod{n!},\end{aligned}$$

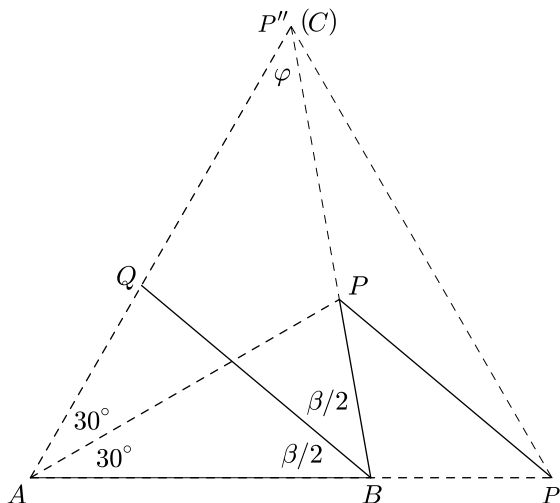
hiszen n páratlan volta miatt $\frac{n+1}{2}$ egész szám és $\sum_{i=1}^n k_i$ is egész.

Ellentmondásra jutottunk, hiszen a tagokat kétféle módon összeadva eltérő maradékokat kaptunk $n!$ -sal osztva. Mivel feltevésünk nem teljesülhet, tehát a feladat állítása igaz.

2001/5. Az ABC háromszögben legyen AP a BAC szögfelezője, ahol P a BC oldalon van, BQ pedig az ABC szögfelezője, ahol Q a CA oldalon van. Tudjuk, hogy $BAC = 60^\circ$ és hogy $AB + BP = AQ + QB$.

Mik az ABC háromszög szögeinek lehetséges értékei?

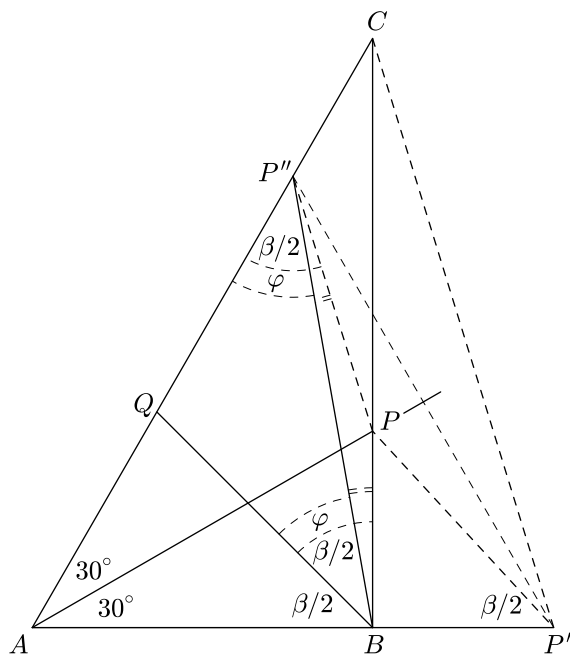
Megoldás. A szokásos szögjelöléseket használjuk. Hosszabbítsuk meg az AB oldalt a P' pontig úgy, hogy $BP' = BP$ legyen és az AQ szakaszt P'' -ig úgy, hogy $QP'' = QB$ teljesüljön. Mivel $AP' = AB + BP = AQ + QB = AP''$, az $AP'P''$ háromszög szabályos (2001/5.1. ábra). A $PP'B$ háromszög egyenlő szárú, alapszögei $\frac{\beta}{2}$ -vel egyenlők, ugyanígy $\varphi = \angle QP''B = \angle QBP''$. Mivel az AP egyenes szimmetriatengelye az $AP'P''$ szabályos háromszögnek, $PP' = PP''$.



2001/5.1. ábra

Vizsgáljuk most meg, milyen helyzetet foglalhat el a C csúcs az eddig szóba került pontokhoz képest. Ha P'' azonos C -vel, azaz BPP'' egy egyenesen vannak (2001/5.1. ábra), a BQP'' háromszög egyenlő szárú volta miatt $\varphi = \gamma = \frac{\beta}{2}$ és így ABC -ben a szögösszeg: $60^\circ + 3 \cdot \frac{\beta}{2} = 180^\circ$, amiből $\frac{\beta}{2} = \gamma = 40^\circ$ és $\beta = 80^\circ$, tehát ABC szögei: $60^\circ, 80^\circ, 40^\circ$.

Ha P'' a QC szakaszon belül lenne (2001/5.2. torzított ábra), akkor $QP''P \sphericalangle = \frac{\beta}{2}$ lenne, mivel P' és P'' tükrösek az AP egyenesre és így $BP''P \sphericalangle = P''BP \sphericalangle = \frac{\beta}{2} - \varphi$, de ez azt jelentené, hogy a BPP'' háromszög egyenlő szárú, azaz $PB = PP'' = PP' = BP'$ lenne, ez viszont azt eredményezné, hogy a PBP' háromszög szabályos, azaz $\frac{\beta}{2} = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$ lenne, ami lehetetlen, hiszen ebben az esetben $\alpha + \beta = 180^\circ$ lenne; P'' tehát nem lehet az AC oldalon.



2001/5.2. ábra

Teljesen hasonló módon ellentmondásra vezet az a feltevés is, hogy P'' az AC C -n túli meghosszabbításán van; tehát csak a $P'' = C$ eset lehetséges és így ABC szögei csak $60^\circ, 80^\circ, 40^\circ$ lehetnek.

Megjegyzés. A feladatban vizsgált alakzatot – mint az elemi geometria számos érdekes alakzatát is – egy szabályos 18-szög átlóiból álló alakzathoz választották ki. Ebből a szabályos sokszögből az ABC háromszög megadott tulajdonságai kiolvashatók, egyedüli volta azonban – ugyanúgy, mint a mi megoldásunkban – bizonyításra szorul.

2001/6. Legyenek a, b, c, d egészek, amelyekre $a > b > c > d > 0$. Tegyük fel, hogy

$$(1) \quad ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c).$$

Bizonyítsuk be, hogy $ab + cd$ nem prímszám.

1. megoldás. Használjuk ki (1) következő átalakításából:

$$\begin{aligned} ac + bd &= [(b + d) + (a - c)][(b + d) - (a - c)] = \\ &= (b + d)^2 - (a - c)^2 = b^2 + 2bd + d^2 - a^2 + 2ac - c^2, \\ (2) \quad b^2 + bd + d^2 &= a^2 - ac + c^2. \end{aligned}$$

Tegyük most fel, hogy az állítással ellentétben $ab + cd = p$ (prímszám); a következőkben kongruencián mod p vett kongruenciát fogunk érteni. Feltevésünk szerint

$$(3) \quad ab \equiv -cd, \quad a^2b^2 \equiv c^2d^2.$$

(2)-ből és (3)-ból:

$$\begin{aligned} (b^2 + bd + d^2)b^2 &= (a^2 - ac + c^2)b^2 = a^2b^2 - ab^2c + b^2c^2 \equiv \\ &\equiv c^2d^2 + bc^2d + b^2c^2 = (b^2 + bd + d^2)c^2, \\ (b^2 - c^2)(b^2 + bd + d^2) &\equiv 0. \end{aligned}$$

Mivel $b(a - b) + c^2 > 0$, $b^2 - c^2 < ab < p$, $b^2 - c^2$ nem lehet p -vel osztható, ezért $b^2 + bd + d^2$ osztható p -vel, de

$$0 > b(b - a) + b(d - a) + d(d - c) = b^2 + bd + d^2 - 2ab - cd$$

miatt

$$b^2 + bd + d^2 < 2ab + cd = ab + p < 2p,$$

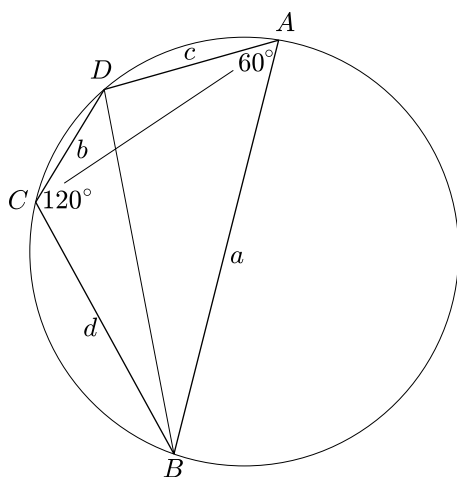
tehát szükségképpen

$$b^2 + bd + d^2 = p,$$

azaz

$$\begin{aligned} b^2 + bd + d^2 &= ab + cd \\ b(b + d - a) &= d(c - d). \end{aligned}$$

Viszont $ab + cd = p$ miatt b, d legnagyobb közös osztója 1, ezért b osztója $c - d$ -nek, ez azonban $0 < c - d < b$ miatt lehetetlen; feltevésünkéből tehát ellentmondásra jutottunk, $ab + cd$ nem lehet prím.



2001/6.1. ábra

2. megoldás. Ebben a megoldásban rámutatunk a feladat valószínű eredetére is. Legyenek az $ABCD$ húrnégyszög oldalai és szögei: $AB = a$, $BC = d$, $CD = b$, $DA = c$, $\angle BAD = 60^\circ$, $\angle BCD = 120^\circ$. Ez a húrnégyszög valóban létezik, mert a (2) egyenlőség teljesülése éppen azt jelenti, hogy a koszinusztétel felhasználásával a BD átló négyzete áll elő (2001/6.1. ábra):

$$(4) \quad BD^2 = b^2 + bd + d^2 = a^2 - ac + c^2.$$

Legyen most $\angle ABC = \alpha$ és ennek megfelelően $\angle ADC = 180^\circ - \alpha$, és így

$$AC^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha = b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha.$$

Ebből

$$2 \cos \alpha = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{ad + bc}.$$

Ezt AC^2 első kifejezésébe helyettesítve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} AC^2 &= a^2 + d^2 - ad \cdot \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{ad + bc} = \\ &= \frac{a^3d + ad^3 + a^2bc + bcd^2 - a^3d - ad^3 + ab^2d + ac^2d}{ad + bc}, \\ (5) \quad AC^2 &= \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}. \end{aligned}$$

Ptolemaiosz tételéből $AC^2 \cdot BD^2 = (ab + cd)^2$, ebbe a (4) és (5) alatti értékeket helyettesítve kapjuk, hogy

$$(6) \quad (ac + bd)(a^2 - ac + c^2) = (ab + cd)(ad + bc).$$

Lényeges észrevételünk, hogy

$$(7) \quad ab + cd > ac + bd > ad + bc.$$

Ennek az első fele az $(a - d)(b - c) > 0$, második fele az $(a - b)(c - d) > 0$ egyenlőtlenségekből következik.

Tegyük fel, hogy az állítással ellentétben $ab + cd$ prím. Mivel egy prímszám relatív prím a nála kisebb pozitív egészekhez, (7)-ből következik, hogy $ab + cd$ és $ac + bd$ relatív prímelek, és így (6)-ból következik, hogy $ac + bd$ -nek osztania kell $ad + bc$ -t, ami viszont (7) miatt lehetetlen, tehát $ab + cd$ nem lehet prím.

Megjegyzések. 1. A második megoldásban a geometriai meggondolásokra csak (6) levezetése miatt volt szükség. (6) azonban (2)-ből csupán algebrai eszközökkel is megkapható:

$$\begin{aligned}(ac+bd)(a^2-ac+c^2) &= (ac+bd)(b^2+bd+d^2) = \\ &= ac(b^2+bd+d^2)+bd(a^2-ac+c^2) = ab^2c+acd^2+a^2bd+bc^2d = \\ &= ab \cdot bc + cd \cdot ad + ab \cdot ad + cd \cdot bc = (ab+cd)(ad+bc).\end{aligned}$$

2. (1)-et kielégítő pozitív egészek valóban léteznek, ilyenek pl. a (21, 18, 14, 1) és (65, 50, 34, 11) négyesek.

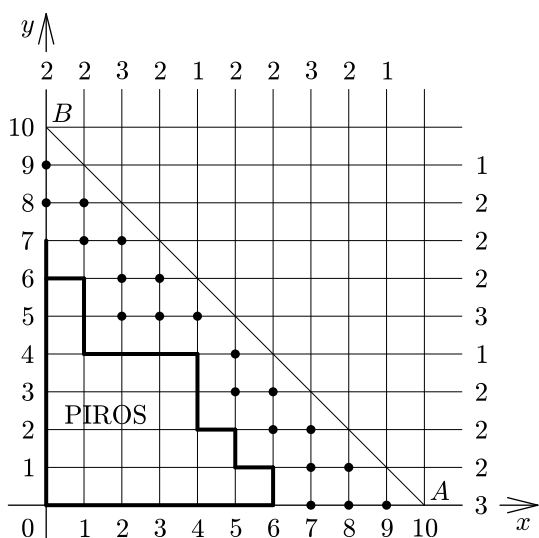
2002.

2002/1. Legyen n pozitív egész szám. Legyen T a sík azon (x, y) pontjainak a halmaza, amelyekre x és y nemnegatív egész számok és $x+y < n$. T minden pontját pirosra vagy kékre színezzük. Ha az (x, y) pont színe piros, akkor T minden olyan (x', y') pontjának a színe is piros, amelyre $x' \leq x$ és $y' \leq y$ mindegyike teljesül. Nevezzük X -halmaznak az olyan halmazokat, amelyek n olyan kék pontból állanak, amelyeknek x -koordinátái mind különbözők, és nevezzük Y -halmaznak az olyan halmazokat, amelyek n olyan kék pontból állanak, amelyek y -koordinátái mind különbözők. Bizonyítsuk be, hogy az X -halmazok száma megegyezik az Y -halmazok számával.

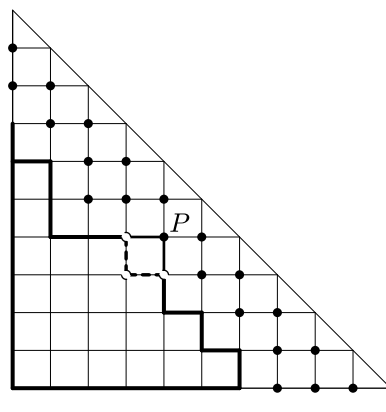
Megoldás. Adjunk mindenekelőtt szemléletes képet a feladatban szereplő halmazokról. A T azoknak a rácpontoknak a halmaza, amelyek az $O(0, 0)$, $A(n, 0)$, $B(0, n)$ csúcsú derékszögű háromszög befogóin és belsejében helyezkednek el, az átfogó rácpontjai nem tartoznak T -hez, mivel az átfogó egyenesének egyenlete $x+y=n$. A pontok piros színezését T -ben tetszőlegesen választhatjuk úgyelve arra, hogy ha egy pontot a koordinátatengelyen pirosra színezzünk, akkor piros az origótól kezdve a pontig minden rácpont; ha egy P belső pontot színezzünk pirosra, akkor piros lesz annak a téglalapnak minden rácpontja, amelynek két oldala a koordinátatengelyen van és az origóval szemközi csúcsa P . Így a piros pontok határa olyan „lépcső”, amelynek fokait a tengelyekkel párhuzamos szakaszok határolják. A nem piros pontok kékek (2002/1.1. ábra).

Legyen az y tengellyel párhuzamos $x=i$ egyenletű egyenesen a kék pontok száma a_i , az x -tengellyel párhuzamos $y=i$ egyenletű egyenesen pedig b_i ($i=0, 1, \dots, n-1$). (Ábránkon $n=10$ és a szóban forgó egyenesekhez odaírtuk az a_i , illetve b_i értékeket.)

Egy X -halmazt úgy állítunk össze, hogy az $x=0$ egyenletű egyenes a_0 kék pontja közül kiválasztunk egyet (ezt a_0 féleképpen tehetjük meg), majd az $x=1$ egyenletű egyenes a_1 kék pontja közül is választunk egyet (ez a_1 féleképpen lehetséges), és így tovább; az X -halmaz ezek szerint $a_0 a_1 \dots a_{n-1}$ féleképpen



2002/1.1. ábra



2002/1.2. ábra

állítható elő, ennyi az X -halmazok száma. Hasonlóan: az Y -halmazok száma $b_0 b_1 \dots b_{n-1}$. Megjegyezzük, hogy ha az $x + y = n - 1$ egyenesen van piros pont, akkor az X és Y -halmazok száma 0.

Ábránkat figyelmesen nézve észrevehetjük, hogy az a_0, a_1, \dots, a_{n-1} és a b_0, b_1, \dots, b_{n-1} szám n -esek ugyanannak a szám n -esnek az (ismétléses) permutációi, azaz ugyanazokból a számokból állanak, és ugyanezt tapasztalhatjuk a piros pontok más elrendeződésénél is. Ha ezt általánosan is igazolni tudjuk, akkor nyilvánvalóan fennáll a bizonyítandó

$$(1) \quad a_0 a_1 a_2 \dots a_{n-1} = b_0 b_1 b_2 \dots b_{n-1}$$

egyenlőség. Ezt fogjuk most igazolni a piros pontok száma szerinti teljes indukcióval, rögzített n mellett.

0 vagy 1 piros pont esetén az állítás nyilvánvaló. Megmutatjuk, hogy az állítás igaz bizonyos számú piros pont esetén, ha eggyel kevesebb piros pontra igaz. Válasszunk ki egy piros $P(x, y)$ pontot (amelyre $x + y$ maximális; ha több ilyen van, akkor közülük egyet), azaz olyat, amely legközelebb van az $x + y = n$ egyenletű egyeneshez (2002/1.2. ábra). A P -n átmenő, koordinátatengelyekkel párhuzamos egyeneseken legyen a kék pontok száma a_x , illetve b_y . Ábránkról világos, hogy $a_x = b_y = (n - 1) - (x + y)$. Színezzük át P -t kékre, ezzel csak a_x és b_y változik meg $a_x + 1$ -re, illetve $b_y + 1$ -re; az indukciós feltétel erre az esetre már igaz, tehát

$$a_0, a_1, \dots, a_x + 1, \dots, a_{n-1} \quad \text{és} \quad b_0, b_1, \dots, b_y + 1, \dots, b_{n-1}$$

ugyanaz a szám n -es, és mivel $a_x = b_y$, ugyanazokból a számokból áll

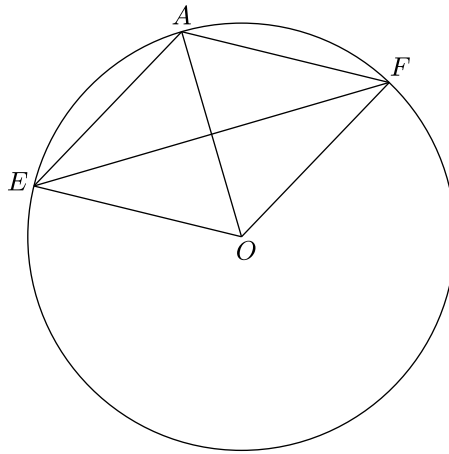
$$a_0, a_1, \dots, a_x, \dots, a_{n-1} \quad \text{és} \quad b_0, b_1, \dots, b_y, \dots, b_{n-1}$$

szám n -es, ezért (1) teljesül, amivel a feladat állítását bebizonyítottuk.

2002/2. Legyen BC az O középpontú Γ kör átmérője. Legyen A a Γ kör egy olyan pontja, amire $0^\circ < AOB < 120^\circ$. Legyen D a C -t nem tartalmazó \widehat{AB} ív középpontja. Az O -n keresztül DA -val párhuzamosan húzott egyenes messe az AC egyenest a J pontban. OA felező merőlegesének és Γ -nak a metszéspontjai legyenek E és F . Bizonyítsuk be, hogy J a CEF háromszög beírt körének a középpontja.

Megoldás. Legyen a Γ kör sugara R és OA felező merőlegesének az \widehat{AC} íven levő pontja F . Két előzetes megjegyzést teszünk:

I. Az O , A sugárvégpontok az E és F pontokkal együtt olyan $OFAE$ rombusz csúcsai, amelyet OA átlója két szabályos háromszögre vág szét, EF átlója pedig a végpontjainál levő szögeket 30° - 30° -os részekre vágja (2002/2.1. ábra). A rombusz oldalainak hossza R .

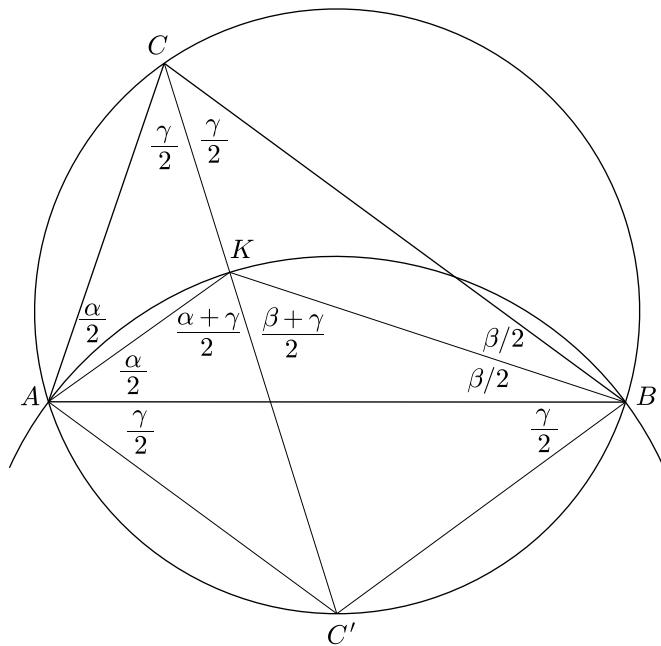


2002/2.1. ábra

II. Ha egy ABC háromszög C -ből induló szögfelezője a köré írt kört másodszor a C' pontban metszi és K a beírt kör középpontja, akkor $C'A = C'K = C'B$ és $AKB < \frac{\alpha + \gamma}{2} + \frac{\beta + \gamma}{2} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$ (2002/2.2. ábra). Ez abból következik, hogy az AKC' és BKC' háromszögekben az AK , ill. BK oldalon levő szögek egyenlők (kerületi szögek, ill. külsőszög-tétel), ez egyben azt is jelenti, hogy a K pontból az AB oldal $90^\circ + \frac{\gamma}{2}$ szögben látszik és a CC' szakaszon nyilván a háromszögnek csak egy ilyen belső pontja van.

Ennek alapján, ha a CC' szakasz egy K pontjáról meg akarjuk mutatni, hogy az az ABC háromszög beírt körének középpontja, elegendő bebizonyítani, hogy

1. rajta van az A -beli szögfelezőn; vagy



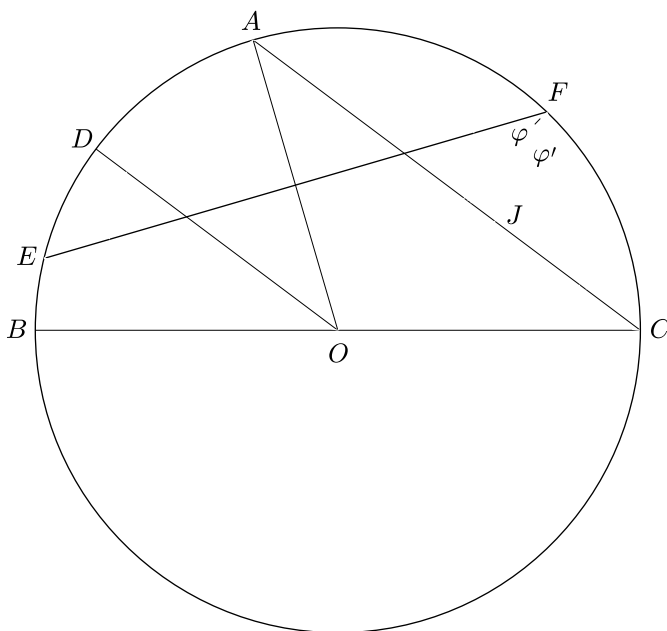
2002/2.2. ábra

2. a C' ponttól mért távolsága $C'A = C'B$ -vel egyenlő; vagy
3. a háromszög belsejének olyan pontja, amelyből AB $90^\circ + \frac{\gamma}{2}$ nagyságú szögben látszik.

Térjünk most rá a feladat megoldásaira (2002/2.3. ábra). Mivel a \widehat{BD} és \widehat{DA} ívek egyenlők, OD az $AOB\angle$ -nek, tehát az AOC egyenlőszárú háromszög külső szögének a felezője, ezért párhuzamos a háromszög AC alapjával. Mivel DA párhuzamos OJ -vel, $ADOJ$ paralelogramma és ezért $AJ = OD = R$. AC az $ECF\angle$ felezője, mert egyenlő ívekre osztja az \widehat{EF} ívet; $ECF\angle = 60^\circ$, mert a hozzá tartozó középponti szög 120° -os.

Egyébként a feladat $AOB\angle = \alpha$ -ra tett kikötése biztosítja azt, hogy a J pont elhelyezkedése ábránknak megfelelően a CEF háromszögön belül legyen, mert az \overrightarrow{OJ} és \overrightarrow{DA} vektorok párhuzamosságából következik, hogy \overrightarrow{OC} -t $90^\circ - \frac{3\alpha}{4}$ nagyságú pozitív forgás viszi \overrightarrow{OJ} -vel párhuzamos helyzetbe, mivel \overrightarrow{DA} az \overrightarrow{OC} irányával $90^\circ - \frac{3\alpha}{4}$ nagyságú pozitív szöget zár be. Ez azt jelenti, hogy ha $\alpha < 120^\circ$, akkor az OJ félegyenes a BC egyenesnek az A -val egyező oldalán van, tehát az AC -t a CEF belső pontjában metszi. E kikötés nélkül ez a feltétel nincs biztosítva.

Most megmutatjuk, hogy J a CEF beírt körének a középpontja, három különböző módon (az előbbi 1., 2., 3. ismérveknek megfelelően); ábránkon a 30° -os szögeket egy ívvel jelöltük.



2002/2.3. ábra

1. Mivel $AF = AJ = R$, az AFJ háromszög egyenlő szárú. Ha $EFJ \sphericalangle = \varphi$ és $CFJ \sphericalangle = \varphi'$, AFJ alapon fekvő szögei $\varphi + 30^\circ$, ill. FJC külső szögeként $\varphi' + 30^\circ$ és így $\varphi + 30^\circ = \varphi' + 30^\circ$ miatt $\varphi = \varphi'$, J rajta van az F szög felezőjén.

2. Mivel $AJ = AF = AE = R$, a 2. ismertetőjegy szerint J a beírt kör középpontja.

3. Minthogy $AE = AO = AJ = AF = R$, az E, O, J, F pontok egy A középpontú R sugarú körön vannak, ennek EF húrja O -ból 120° -os szögben látszik, ezért ugyanekkora szögben látszik J -ből is és $120^\circ = 90^\circ + \frac{60^\circ}{2}$ miatt a 3. ismerv teljesül, J a CEF háromszögbe írt kör középpontja.

2002/3. Határozzuk meg az összes olyan (m, n) párt, ahol m, n egész számok, amikre $m, n \geq 3$, amelyekhez létezik végtelen sok olyan a pozitív egész szám, amire

$$\frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$$

egész szám.

Megoldás. Legyenek m és n megfelelő számok és $f(x) = x^m + x - 1$, $g(x) = x^n + x^2 - 1$. Megmutatjuk, hogy az $f(x)$ polinom osztható $g(x)$ polinommal. Végezzük el a maradékos osztást:

$$(1) \quad \frac{f(x)}{g(x)} = h(x) + \frac{r(x)}{g(x)}.$$

Mivel $g(x)$ főegyütthatója 1, ezért $h(x)$ egész együtthatós, így minden egész helyen egész értéket vesz fel. A feladat szerint (1) bal oldala végtelen sok pozitív egész helyen egész, ezért ugyanez teljesül $\frac{r(x)}{g(x)}$ -re is. Mivel a maradékos osztás miatt $\deg r < \deg g$, ezért ha x tart a végtelenhez $\frac{r(x)}{g(x)}$ tart a 0-hoz. Azt kaptuk, hogy $\frac{r(x)}{g(x)}$ végtelen sok egész helyen 0, azaz a számlálóban álló $r(x)$ polinom végtelen sok helyen veszi fel a 0 értéket. De ez csak úgy lehet, ha $r(x)$ azonosan nulla. Megkaptuk, hogy $g(x) \mid f(x)$, ezért $m \geq n$ is teljesül.

Most elkészítjük $g(x)$ egy alkalmas többsét a következő módon:

$$(x+1)f(x) - g(x) = x^n(x^{m-n+1} + x^{m-n} - 1).$$

Mivel x^n és $x^n + x^2 - 1$ relatív prímek, ezért $m - n = k$ helyettesítéssel

$$(2) \quad g(x) = x^n + x^2 - 1 \mid x^{k+1} + x^k - 1.$$

Tudjuk, hogy $g(x)$ folytonos függvény és $g(0) < 0 < g(1)$, ezért van olyan $0 < \alpha < 1$, hogy $g(\alpha) = 0$. (2) miatt α gyöke lesz az $x^{k+1} + x^k - 1$ polinomnak is, tehát:

$$(3) \quad \alpha^n + \alpha^2 = \alpha^{k+1} + \alpha^k = 1.$$

A feladat szövege szerint $n \geq 3$, (2) miatt pedig $n \leq k + 1$, ezért

$$k \geq n - 1 \geq 2.$$

Mivel $0 < \alpha < 1$, innen $\alpha^n \geq \alpha^{k+1}$, illetve $\alpha^2 \geq \alpha^k$ következik. Viszont (3) miatt csak az lehet, hogy $\alpha^n = \alpha^{k+1}$ és $\alpha^2 = \alpha^k$, vagyis $n = k + 1$ és $2 = k$ azaz ha $m = 5$ és $n = 3$.

Ez a számpár valóban jó, hiszen $a^5 + a - 1 = (a^3 + a^2 - 1)(a^2 - a + 1)$. Egyetlen olyan számpár van tehát, amelyre teljesülnek a feladat feltételei: az (5; 3).

2002/4. Legyen n 1-nél nagyobb egész szám, n összes pozitív osztója d_1, d_2, \dots, d_k , ahol

$$1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n.$$

Legyen $D = d_1 d_2 + d_2 d_3 + \dots + d_{k-1} d_k$.

(a) Bizonyítsuk be, hogy $D < n^2$.

(b) Határozzuk meg az összes olyan n számot, amire D osztója n^2 -nek.

Megoldás. Ha d osztója n -nek, akkor $\frac{n}{d}$ is osztója, hiszen $\frac{n}{d} \cdot d = n$. d és $\frac{n}{d}$ egymás kiegészítő (komplementer) osztói n -re nézve (előfordulhat, d komplementere önmaga, ha $n = p^2$, $p = \frac{n}{p}$). Nyilvánvaló, hogy n osztóinak a halmaza

azonos kiegészítő osztóinak a halmazával, nagyságrendi sorrendjük

$$1 = \frac{n}{d_k} < \frac{n}{d_{k-1}} < \dots < \frac{n}{d_2} < \frac{n}{d_1} = n.$$

Helyettesítsük most D -ben az osztókat kiegészítő osztóikkal:

$$\begin{aligned} D &= d_1 d_2 + d_2 d_3 + \dots + d_{k-1} d_k = \frac{n}{d_k} \cdot \frac{n}{d_{k-1}} + \frac{n}{d_{k-1}} \cdot \frac{n}{d_{k-2}} + \dots + \frac{n}{d_2} \cdot \frac{n}{d_1} = \\ &= n^2 \left(\frac{1}{d_1 d_2} + \frac{1}{d_2 d_3} + \dots + \frac{1}{d_{k-1} d_k} \right) \leq \\ &\leq n^2 \left(\frac{d_2 - d_1}{d_1 d_2} + \frac{d_3 - d_2}{d_2 d_3} + \dots + \frac{d_k - d_{k-1}}{d_{k-1} d_k} \right) = \\ &= n^2 \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_3} + \dots + \frac{1}{d_{k-1}} - \frac{1}{d_k} \right) = n^2 \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_k} \right) < \frac{n^2}{d_1} = n^2, \end{aligned}$$

amivel az a) részt igazoltuk.

A b) rész vizsgálatához vegyük észre, hogy ha n prímszám, D osztója n^2 -nek, ti. ebben az esetben $1 = d_1 < d_2 = p = n$, és így $D = d_1 d_2 = p = n$ valóban osztója n^2 -nek.

Ha viszont n összetett, azaz $k \geq 3$, n legkisebb valódi osztója nyilván p prímszám, és ugyanez a legkisebb valódi osztója n^2 -nek is; tehát

$$1 = d_1 < d_2 = p < \dots < d_{k-1} = \frac{n}{p} < d_k = n,$$

és így $D = d_1 d_2 + \dots + d_{k-1} d_k > d_{k-1} d_k = n \cdot \frac{n}{p} = \frac{n^2}{p}$, amiből $p > \frac{n^2}{D}$.

Ha D osztója lenne n^2 -nek, akkor $\frac{n^2}{D}$ is osztója n^2 -nek, de az (a)-beli eredmény szerint $\frac{n^2}{D} > 1$, és így

$$1 < \frac{n^2}{D} < p$$

következnék, ami azt jelenti, hogy n^2 -nek van p -nél kisebb valódi osztója, ezzel feltevésünkkel ellentmondásba kerültünk.

Összefoglalva: D akkor és csakis akkor osztója n^2 -nek, ha n prím.

2002/5. Határozzuk meg az összes olyan f függvényt, amely a valós számok \mathbf{R} halmazát önmagába képezi le, és amire

$$(1) \quad (f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz)$$

teljesül minden $x, y, z, t \in \mathbf{R}$ esetén.

Megoldás. Megoldásunkban a függvényegyenleteknél szokásos, különösebb ötletet nem kívánó típus-megoldást mutatunk be, aminek az a lényege, hogy (1)-et bizonyos speciális helyettesítési értékek esetén vizsgáljuk.

Legyen először $y = z = t = 0$, (1) ebben az esetben így írható:

$$(2) \quad \begin{aligned} (f(x) + f(0))(f(0) + f(0)) &= f(0) + f(0), \\ f(0)(f(x) + f(0)) &= f(0). \end{aligned}$$

Ha most x is 0-val egyenlő, (2)-ből kapjuk, hogy

$$2f^2(0) = f(0), \quad f(0)(2f(0) - 1) = 0.$$

Ebből két lehetőség adódik; A: $f(0) = \frac{1}{2}$, B: $f(0) = 0$.

A: Ha $f(0) = \frac{1}{2}$, (2)-ből $f(x) + \frac{1}{2} = 1$,

$$f(x) = \frac{1}{2}$$

minden valós x -re és ez ki is elégíti (1)-et, mert

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

mindig teljesül.

B: Tegyük most fel, hogy $f(0) = 0$. Helyettesítsünk (1)-ben $z = t = 0$ -t; az

$$(3) \quad f(x)f(y) = f(xy)$$

összefüggést kapjuk, ami azt jelenti, hogy ebben az esetben f multiplikatív. Ha (3)-ban $x = y = 1$, $f^2(1) = f(1)$, amiből

$$B_1: f(1) = 0, \quad \text{vagy} \quad B_2: f(1) = 1.$$

B_1 teljesülése esetén tehát $f(0) = 0$, $f(1) = 0$; (3)-ból $y = 1$ helyettesítéssel minden x -re

$$f(x) = 0$$

adódik és ez ki is elégíti (1)-et, hiszen $(0+0)(0+0) = 0+0$.

B_2 . Hátra van még az $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ eset. Helyettesítsünk most (1)-ben: $x = 0$, $y = t = 1$:

$$(f(0) + f(z))(f(1) + f(1)) = f(-z) + f(z),$$

azaz

$$2f(z) = f(-z) + f(z),$$

$$f(z) = f(-z),$$

ami azt jelenti, hogy f páros függvény. (3)-ból $y = x$ helyettesítéssel kapjuk:

$$(4) \quad f(x^2) = f^2(x) \geq 0,$$

ez azt jelenti, hogy f minden nemnegatív helyen nemnegatív értékű, de mivel f páros, minden valós helyen $f(x) \geq 0$.

Legyen most (1)-ben $x = t$ és $y = z$:

$$(f(x) + f(y))^2 = f(x^2 + y^2),$$

és ebből

$$f(x^2 + y^2) = f^2(x) + f^2(y) + 2f(x)f(y) \geq f^2(x)$$

és (4) miatt

$$f(x^2 + y^2) \geq f(x^2),$$

ez azt jelenti, hogy pozitív helyeken f növekvő.

Válasszuk végül (1)-ben az $y = z = t = 1$ helyettesítést:

$$(5) \quad 2(f(x) + 1) = f(x - 1) + f(x + 1).$$

Ebből $x = 2, 3$ helyettesítésekkel az $f(2) = 4$, $f(3) = 9$ értékek adódnak, hozzávéve a már ismert $f(1) = 1$ helyettesítést az a sejtésünk alakulhat ki, hogy pozitív egész n -ekre $f(n) = n^2$; ezt teljes indukcióval könnyen igazolhatjuk: $n = 1$ -re az állítás igaz, tegyük fel, hogy teljesül $n - 1$ -ig. (5)-ben $x = n - 1$ helyettesítéssel:

$$2(f(n - 1) + 1) = f(n - 2) + f(n),$$

$$2((n - 1)^2 + 1) = (n - 2)^2 + f(n)$$

$$f(n) = 2n^2 - 4n + 2 + 2 - n^2 + 4n - 4 = n^2,$$

tehát minden pozitív egész x -re, s mivel f páros, minden egész x -re $f(x) = x^2$.

Legyen most $x = \frac{p}{q}$ tetszőleges racionális szám (p és q egészek). (3)-ból:

$$f\left(\frac{p}{q}\right) f(q^2) = f(pq), \quad \text{azaz} \quad f\left(\frac{p}{q}\right) q^4 = p^2 q^2,$$

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p^2}{q^2},$$

tehát $f(x) = x^2$ minden racionális x -re. Megmutatjuk, hogy ez minden valós x -re teljesül; f páros volta miatt elegendő pozitív x -eket vizsgálnunk. Tegyük fel, hogy állításunkkal ellentétben valamilyen x -re $f(x) < x^2$. Válasszunk $\sqrt{f(x)}$ és x között egy r racionális számot:

$$(6) \quad \sqrt{f(x)} < r < x \quad \text{és} \quad f(x) < r^2 < x^2.$$

Mivel $f(r) = r^2$ és f növekvő, $f(r) = r^2 \leq f(x)$, ami ellentmond (6)-nak, tehát $f(x) < x^2$ lehetetlen; hasonlóan ellentmondásra vezet az $f(x) > x^2$ feltevés is.

A B_2 esetben tehát az egyetlen megoldás

$$f(x) = x^2,$$

s hogy ez megoldás, az abból tűnik ki, hogy (1) ennek alapján a jól ismert

$$(x^2 + z^2)(y^2 + t^2) = (xy - zt)^2 + (xt + yz)^2$$

ún. (kétdimenziós) Lagrange-féle azonosságba megy át. Összefoglalva (1) megoldásai:

$$f(x) = \frac{1}{2}, \quad f(x) = 0, \quad f(x) = x^2.$$

Megjegyzés. A feladatot nyilván a nevezetes, a matematika több területén felhasznált Lagrange-féle azonosság ihlette, s aki ezt ismerte, annak világos volt, hogy az $f(x) = x^2$ a „fő” megoldás. Ez az azonosság – a feladatban is előforduló legegyszerűbb esetben – egyenértékű a $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ azonossággal. Ha ti. az **a** és **b** vektorok koordinátái **a**(x, z), **b**(t, y) és közrezárt szögük α , akkor

$$\cos^2 \alpha = \frac{(xt + zy)^2}{(x^2 + z^2)(y^2 + t^2)}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{(xy - zt)^2}{(x^2 + z^2)(y^2 + t^2)},$$

és ez általánosítható többdimenziós vektorokra is. Azonosságunk egyik következménye a Cauchy-féle egyenlőtlenség.

2002/6. Legyenek $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ egységsugarú körök a síkban, ahol $n \geq 3$. Jelölje a középpontjaikat rendre O_1, O_2, \dots, O_n . Tegyük fel, hogy nincs olyan egyenes, amelynek kettőnél több körrel van közös pontja. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{O_i O_j} \leq \frac{(n-1)\pi}{4}.$$

1. megoldás. Egy megjegyzéssel kezdjük: ha az R sugarú körben a PQ és ST húrok az X pontban metszik egymást és $\angle SXP = 2\alpha$, akkor

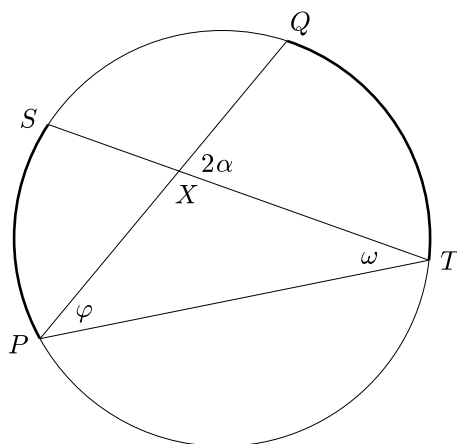
$$(1) \quad \widehat{PS} + \widehat{QT} = 4R\alpha$$

(2002/6.1. ábra). (\widehat{PS} a PS ív hosszát jelenti; a szögeket radiánokban mérjük.) Legyen ui. a \widehat{PS} ívhez tartozó kerületi szög ω , a \widehat{QT} ívhez tartozó φ , ennek megfelelően az ívekhez 2ω , ill. 2φ nagyságú középponti szögek tartoznak és így

$$\widehat{PS} = R \cdot 2\omega, \quad \widehat{QT} = R \cdot 2\varphi.$$

Mivel 2α a PXT háromszög külső szöge, $2\alpha = \omega + \varphi$, ezért

$$\widehat{PS} + \widehat{QT} = 2R(\omega + \varphi) = 4R\alpha.$$



2002/6.1. ábra

Fedjük most le az egységköröket egy R sugarú K körrel, és válasszunk ki benne két egységkört, ezek középpontja O_i , ill. O_j ; közös belső érintőik PQ és ST , metszéspontjuk X és hajlásszögük 2α . Két egységkörnek nem lehet közös pontja, mert ezen át egy harmadik körhöz húzott szelőnek már három körrel lenne közös pontja. A 2002/6.2. ábráról leolvasható, hogy

$$O_i O_j = \frac{2}{\sin \alpha},$$

ebből, mivel α hegyesszög

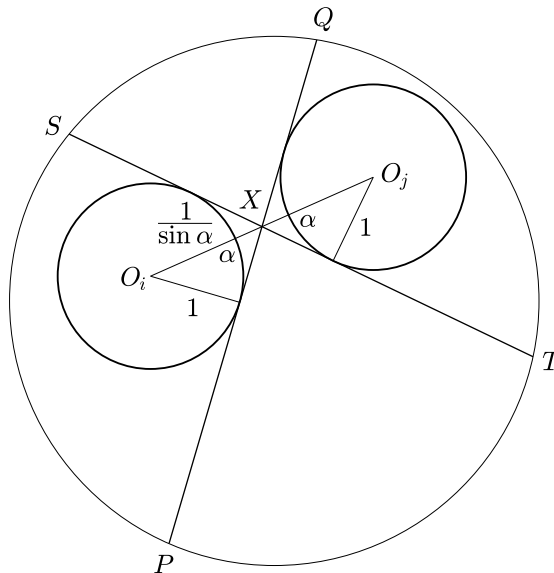
$$\alpha \geq \sin \alpha = \frac{2}{O_i O_j},$$

és (1) figyelembevételével

$$(2) \quad \widehat{PS} + \widehat{QT} = 4R\alpha \geq \frac{8R}{O_i O_j},$$

$$\frac{1}{O_i O_j} \leq \frac{\widehat{PS} + \widehat{QT}}{8R}.$$

Az O_i, O_j középpontokhoz tartozó $\widehat{PS} + \widehat{QT}$ ívösszeget és egyszerűség kedvéért



2002/6.2. ábra

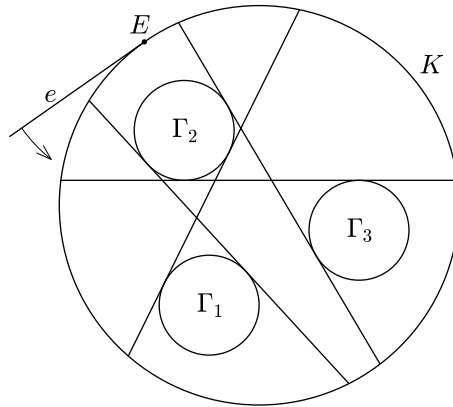
magát az ívpárt is jelölje s_{ij} . Vizsgáljuk most meg, hogy a K körvonalat az s_{ij} ívpárok hányszorosan fedhetik le. Figyeljük meg, hogy a Γ_i, Γ_j köröket metsző szelő szükségképpen belevág az s_{ij} ívpárba. Válasszuk ki most K egy tetszőleges E pontját, azt szeretnénk megvizsgálni, hogy ezt az E pontot maximálisan hány ívpár fedheti le. Húzzuk meg e célból K -nak E -beli egyik érintő félegyeneseit, e -t, és a 2002/6.3. ábrának megfelelően kezdjük el forgatni. Legyen az első

körpár, amelybe e belemetsz (Γ_1, Γ_2) , E ezért rajta van s_{12} -n. Tovább forgatva e -t elhagyja (mondjuk) Γ_1 -et és még Γ_2 -t metszve belevág egy újabb körbe, legyen ez Γ_3 ; előfordulhat persze, hogy Γ_2 -t úgy hagyja el, hogy nem metsz bele újabb körbe. Ezt a gondolatmenetet folytatva látjuk, hogy a forgó e félegyenes maximálisan a

$$(\Gamma_1, \Gamma_2), (\Gamma_2, \Gamma_3), \dots, (\Gamma_{n-1}, \Gamma_n)$$

körpárokba metszhet bele, tehát E -t legfeljebb az $s_{12}, s_{23}, \dots, s_{n-1,n}$ ívpárok tartalmazhatják, azaz maximálisan $n - 1$ -szeresen lehet lefedve, és természetesen ez igaz K minden pontjára, ezért a K -t lefedő ívpárok összege legfeljebb K területének $n - 1$ -szerese lehet, azaz $2R\pi(n - 1)$. Mivel (2)-t $\frac{1}{O_i O_j} \leq \frac{s_{ij}}{8R}$ alakban is írhatjuk,

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{O_i O_j} \leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{s_{ij}}{8R} \leq \frac{2R\pi(n - 1)}{8R} = \frac{(n - 1)\pi}{4}.$$

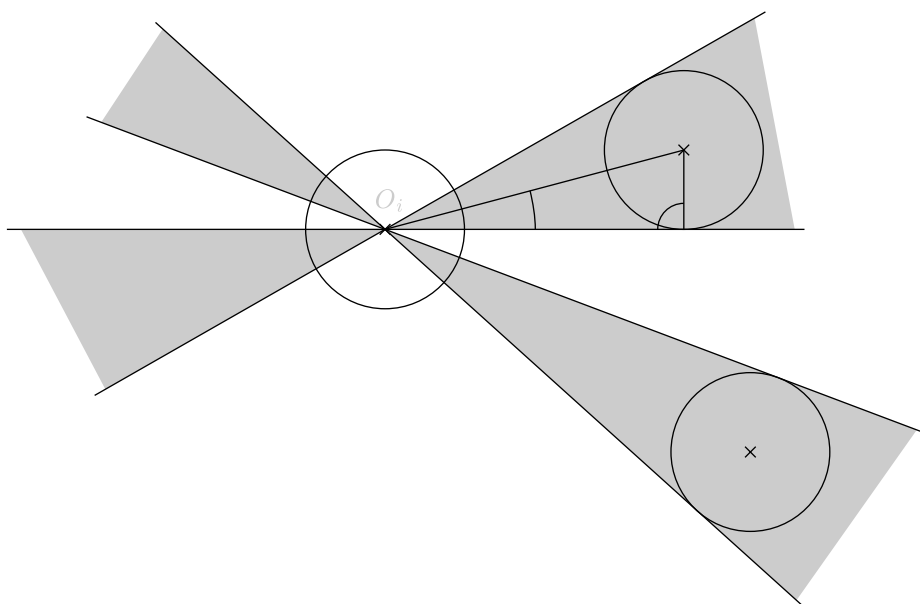


2002/6.3. ábra

2. megoldás. Kiválasztunk egy kört, legyen középpontja O_i . Most vegyük sorra az összes további kört, húzzuk be a hozzájuk tartozó érintőket O_i -ből. Legyen az O_j középpontú körhöz húzott érintők által bezárt szög $2\alpha_{ij}$. Ekkor

$$(1) \quad \frac{1}{O_i O_j} = \sin \alpha_{ij} \leq \alpha_{ij},$$

hiszen α_{ij} hegyesszög. Biztosan meghúzhatjuk az érintőket, mivel a körök páronként diszjunktak.



2002/6.4. ábra

Az érintők által bezárt szögtartomány, illetve a 2002/6.4. ábrán szürkével jelzett csúcsszögtartomány különböző köröknél más és más. A feladat feltételei miatt e tartományoknak nem lehet O_i -től különböző közös pontja. Ezért az O_i középpontú teljes szöget vizsgálva (1) alapján a következőt kapjuk:

$$4 \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{1}{O_i O_j} = 4 \sum_{j=1, j \neq i}^n \sin \alpha_{ij} \leq 4 \sum_{j=1, j \neq i}^n \alpha_{ij} \leq 2\pi,$$

azaz

$$(2) \quad \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{1}{O_i O_j} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Amennyiben i végigfut 1-től n -ig, összeadjuk a (2)-nek megfelelő összefüggéseket. Így minden $O_x O_y$ pár kétszer is fog szerepelni, ezért ehhez jutottunk:

$$(3) \quad \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{O_i O_j} \leq \frac{n\pi}{4}.$$

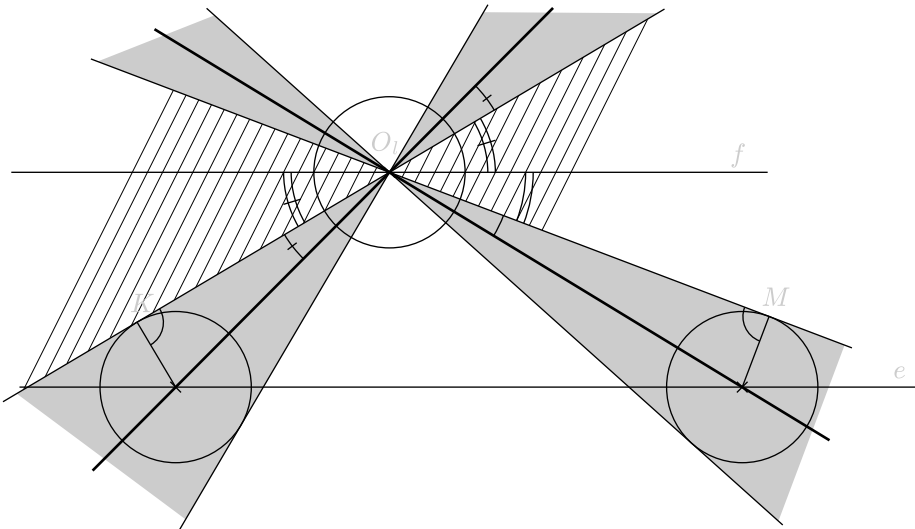
A bizonyítandó állítás (3)-nál erősebb. Nézzük meg, hogyan csiszolhatjuk tovább eddigi gondolatmenetünket. Tekintsük a körök középpontjainak konvex burkát, ennek egyik csúcsa O_l , az O_l -nél lévő külső szög φ .

Lemma: O_l rögzítése esetén a többi kör által lefoglalt szögtartományok O_l körül legfeljebb $(2\pi - \varphi)$ nagyságú részt takarnak le.

Ebből már következik a feladat állítása, ugyanis a külső szögek összege 2π , tehát az összegzésnél (3) így módosul:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{O_i O_j} \leq \frac{n\pi}{4} - \frac{1}{8} \sum_{\text{külső szögek}} \varphi = \frac{n\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{(n-1)\pi}{4}.$$

A lemma bizonyítása: a konvex burok mentén haladva legyen O_l két szomszédja O_k és O_m . Legyen az $O_k O_m$ egyenes e , a vele párhuzamosan O_l -en áthaladó egyenes f . Ekkor e és f távolsága nagyobb mint 2, különben az $O_k O_l O_m$ háromszög e -vel párhuzamos középvonalának egyenese mindhárom kört metszené. Forgassuk el f -et O_l körül, hogy érintse K -ban, illetve M -ben a másik két kört (2002/6.5. ábra).



2002/6.5. ábra

Mivel $MO_m = 1$, ezért M távolsága $O_l O_m$ -től 1-nél kisebb, továbbá e -től is 1-nél kisebb, ezért f -től 1-nél nagyobb. Tehát az $MO_l O_m$ kisebb, mint f és $O_l O_m$ szögének fele. Ugyanígy érvelhetünk a másik körnél is, így

$$\angle \leq \angle; \quad \angle \leq \angle.$$

Az ábrán csíkos az a szögtartomány, amelyet a többi kör, illetve a hozzájuk tartozó csúcsszögtartomány már nem takarhat, ennek nagysága:

$$2 \angle + 2 \angle \geq \angle + \angle + \angle + \angle = \varphi.$$

Ezzel a lemma bizonyítását és egyben a kitűzött feladat megoldását is befejeztük.

2003.

2003/1. Legyen A az $S = \{1, 2, \dots, 1000000\}$ halmaz egy 101 elemű rész-halmaza. Bizonyítsuk be, hogy találhatóak olyan t_1, t_2, \dots, t_{100} számok az S halmazban, amelyekre az

$$A_j = \{x + t_j \mid x \in A\} \quad j = 1, 2, \dots, 100$$

halmazok páronként diszjunktak.

1. megoldás. Akkor lesz az A_i és A_j halmazoknak közös eleme, ha $x_k + t_i = x_l + t_j$ valamilyen k és l számokra. Mivel k lehet 101-féle, l 100-féle, ezért rögzített t_i esetén ez legfeljebb 10100 érték a t_j számára. A feladat azt kívánja, hogy A_i és A_j diszjunktak legyenek, t_j ezért különbözni fog ettől a legfeljebb 10100 értéktől és t_i -től is.

Most kiválasztjuk a t számokat, t_1 -et találomra. Így kizártunk 10101 számot, amit már nem választhatunk, így t_2 $10^6 - 10101$ szám közül választható tetszőlegesen. Viszont t_2 is kizár újabb 10101 számot. Így folytatva tegyük fel, hogy $k \leq 99$ számot már kiválasztottunk, még maradt $10^6 - k \cdot 10101 > 0$ szám, azaz választhatunk még egyet, és készen vagyunk.

Megjegyzés. Ebben a megoldásban nagyon szabadon határoztuk meg a t számokat, és éppen kijött a 100. Megmutatjuk, hogy kellő körültekintéssel több is megadható.

2. megoldás. Legyen $1 = t_1 < t_2 < t_3 < \dots$. Szeretnénk a t számokat nagyság szerint meghatározni. Legyen $i < j$, a diszjunkttság miatt

$$x_k + t_1 \neq x_l + t_2, \quad \text{azaz} \quad x_k - x_l \neq t_j - t_i > 0.$$

Tehát a t -k kiválasztásánál az A halmazban fellépő különbségek letiltanak bizonyos számokat. Legyen $t_1 = 1$, és mostantól fogva szépen haladhatunk előre; bejelöljük a különbségek miatt letiltott számokat, majd a lehető legkisebb szabad számot kiválasztjuk a következő t -nek.

Módszerünket bemutatjuk egy kicsi A halmazon. Legyen $A = \{2; 7; 8\}$, ekkor a fellépő különbségek 1, 5 és 6. A kiválasztott számokat 0, a letiltottakat ✓ jelzi.

$S:$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	...
t_1	0	✓				✓	✓														
t_2			0	✓				✓	✓												
t_3					0	✓				✓	✓										
t_4												0	✓				✓	✓			
t_5														0	✓				✓	✓	
⋮																					

Látható, hogy egy szám lehet többszörösen is tiltott, mint például itt a 6-os.

Legyen az A halmazban fellépő különbségek száma m . Tegyük fel, hogy kiválasztottuk már a t_1, t_2, \dots, t_k számokat. Nézzük meg, mekkora lesz t_{k+1} ! Van k darab kiválasztott szám (0-val jelölt), legfeljebb $k \cdot m$ darab letiltott szám (✓-val jelölt). Tehát

$$t_{k+1} \leq k + k \cdot m + 1.$$

A feladatban $m \leq \binom{101}{2}$, ezért addig tudunk még újabb t -t választani, amíg

$$k + k \cdot \binom{101}{2} + 1 \leq 10^6, \quad \text{azaz} \quad k \leq 197,98.$$

Ezzel a módszerrel tehát jóval több, legalább 198 darab t szám adható meg.

Megjegyzés. A feladat a gráfok nyelvén a Turán-tételre vezet; S elemei a pontok, két pont közt él fut, ha a pontoknak megfelelő számok különbsége nem szerepel az A halmazban különbségment. Itt keresünk minél nagyobb teljes gráfot [45].

2003/2. Határozzuk meg az összes olyan, pozitív egészekből álló (a, b) párt, amelyre

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

pozitív egész.

Megoldás. Legyen a tört értéke k , a és b megfelelő számok. Mivel $k > 0$ és $a^2 > 0$, ezért a nevező is pozitív, $2ab^2 - b^3 + 1 > 0$. Tehát

$$(1) \quad a > \frac{b}{2} - \frac{1}{2b^2}, \quad \text{azaz} \quad a \geq \frac{b}{2}.$$

Mivel $k \geq 1$, ezért $a^2 \geq b^2(2a - b) + 1$, azaz $a^2 > b^2(2a - b) \geq 0$. Ezek szerint két eset lehetséges:

$$(2) \quad a > b \quad \text{vagy} \quad 2a = b.$$

A következő másodfokú egyenlet gyökeit jelölje a_1 és a_2 :

$$x^2 - 2kb^2x + k(b^3 - 1) = 0.$$

Amennyiben x helyére a -t írunk, éppen a feladatban vizsgált kifejezést kapjuk, csak nem törtalakban, hanem a nevezővel beszorozva és 0-ra rendezve. Tehát a_1 és a_2 egyike éppen a , ami egész.

$a_1 + a_2 = 2kb^2$ is egész, ezért a másik gyök is egész. Legyen $a_1 \geq a_2$, ekkor a gyökök összegét tekintve $a_1 \geq k \cdot b^2 > 0$ adódik. Másrészt $a_1 \cdot a_2 = k(b^3 - 1)$,

ezért

$$0 \leq a_2 = \frac{k(b^3 - 1)}{a_1} \leq \frac{k(b^3 - 1)}{kb^2} < b.$$

Eredményünket (2)-vel összevetve azt kapjuk, hogy $a_2 = 0$ vagy $2a_2 = b$.

Ha $a_2 = 0$, akkor $b^3 - 1 = 0$, $b = 1$, $a_1 = 2k$.

Ha $2a_2 = b$ (azaz b páros szám), akkor

$$a_1 + \frac{b}{2} = 2kb^2 \quad \text{és} \quad a_1 \cdot \frac{b}{2} = k(b^3 - 1), \quad \text{így} \quad k = \frac{b^2}{4}, \quad a_1 = \frac{b^4}{2} - \frac{b}{2}.$$

Összefoglalva az összes lehetséges (a, b) megoldaspár:

$$(2l, 1) \quad \text{vagy} \quad (l, 2l) \quad \text{vagy} \quad (8l^4 - l, 2l)$$

valamely pozitív egész l -re. Ezen megoldások valóban mind jók.

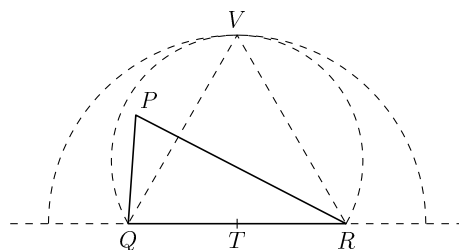
2003/3. Adott egy konvex hatszög, amelyben bármely két szemközti oldalra teljesül a következő tulajdonság: az oldalak középpontjai közötti távolság $\sqrt{3}/2$ -szerese a hosszuk összegének. Bizonyítsuk be, hogy a hatszög valamennyi szöge egyenlő.

(Az $ABCDEF$ konvex hatszögben három szemközti oldalpár van: AB és DE , BC és EF , CD és FA .)

Megoldás.

Lemma: Vizsgáljuk a PQR háromszöget, amelyben QR felezőpontja T és $\angle QPR \geq 60^\circ$. Ekkor $TP \leq \frac{\sqrt{3}}{2}QR$, egyenlőség pedig pontosan akkor áll fenn, ha a PQR háromszög szabályos.

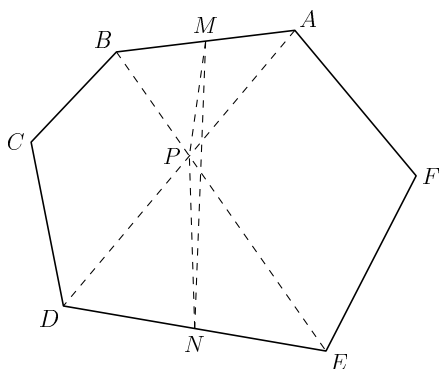
A QR egyenes által meghatározott P -t tartalmazó félsíknak legyen V olyan pontja, hogy a VQR szabályos háromszög legyen. Ekkor P a VQR háromszög köré írt körén vagy azon belül van. Ezt tartalmazza a T középpontú $\frac{\sqrt{3}}{2}QR$ sugarú kör, így a lemmát beláttuk.



2003/3.1. ábra

Tekintsük az AD , BE és CF átlók közül azt a kettőt, amelyeknek a bezárt szöge a legnagyobb. Feltehető, hogy ezek AD és BE , legyen a metszéspontjuk P , AB és DE felezőpontjai pedig rendre M és N . Alkalmazhatjuk lemmánkat a

BPA és DPE háromszögekre, hiszen a P -nél levő szögük legalább 60° . Tehát



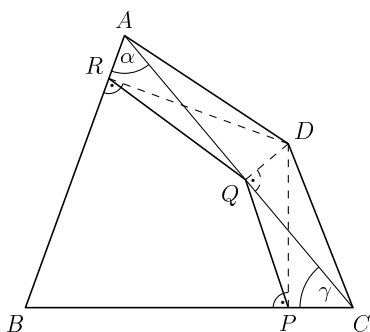
2003/3.2. ábra

$$\begin{aligned} MN &= \frac{\sqrt{3}}{2}(AB + DE) \geq \\ &\geq PM + PN \geq MN. \end{aligned}$$

Ez csak úgy teljesülhet, ha BPA és DPE szabályosak. Ugyanilyen érveléssel kapjuk, hogy a CF átló is 60° -ot zár be az AD és BE átlókkal, továbbá minden csúcsnál a találkozó két oldal is 60° -ot zár be az innen induló főátlóval. Így megkaptuk, hogy a hat-szög minden szöge 120° -os.

2003/4. Legyen $ABCD$ egy húrnégyszög. A D pontból a BC , CA és AB egyenesekre bocsátott merőlegesek talppontjai legyenek rendre P , Q és R . Bizonyítsuk be, hogy akkor és csak akkor teljesül $PQ = QR$, ha az $ABC \triangleleft$ és $ADC \triangleleft$ szögek szögfelezőinek metszéspontja az AC egyenesen van.

Megoldás. Az állítás nem csupán húrnégyszögekre teljesül. Olyan bizonyítást mutatunk, amely ezt a feltételt nem használja.



2003/4.1. ábra

Az ABC háromszögben legyen az A -nál és C -nél levő szög α és γ . P és Q rajta van a CD Thalész-körén, és $\sin PCQ \triangleleft = \sin \gamma$, így $PQ = CD \cdot \sin \gamma$. Ugyanígy kapjuk, hogy $QR = AD \cdot \sin \alpha$. Ekkor a feladat feltétele szerint

$$PQ = CD \cdot \sin \gamma = AD \cdot \sin \alpha = QR.$$

Ezt átalakítjuk, és alkalmazzuk az ABC háromszögre a szinusztételt:

$$\frac{CD}{AD} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{CB}{AB}.$$

A szögfelező-tétel szerint ez pontosan akkor teljesül, ha az $ABC \triangleleft$ és $ADC \triangleleft$ szögfelezője ugyanebben a pontban metszi az AC szakaszt.

Megjegyzés. Amennyiben D rajta van az ABC köréírt körén, akkor P , Q és R egy egyenesen, az úgynevezett Simson-egyenesen lesznek.

2003/5. Legyen n pozitív egész és legyenek x_1, x_2, \dots, x_n olyan valós számok, amelyekre $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ teljesül.

(a) Bizonyítsuk be, hogy

$$\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - x_j| \right)^2 \leq \frac{2(n^2 - 1)}{3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - x_j)^2.$$

(b) Mutassuk meg, hogy egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha x_1, \dots, x_n számtani sorozatot alkotnak.

Megoldás. Mindkét oldal értéke változatlan marad, ha minden x_i értéket ugyanannyival növelünk vagy csökkentünk. Feltehető ezért, hogy

$$\sum_{i=1}^n x_i = 0.$$

Ekkor

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - x_j| = 2 \sum_{i>j} (x_i - x_j) = 2 \sum_{i=1}^n (2i - n - 1)x_i.$$

Alkalmazzuk a bal oldalra a Cauchy–Schwarz-féle egyenlőtlenséget:

$$(1) \quad \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - x_j| \right)^2 \leq 4 \sum_{i=1}^n (2i - n - 1)^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = 4 \frac{n(n+1)(n-1)}{3} \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Az utóbbi alak megkapható a négyzetszámok összegére vonatkozó összefüggés segítségével, hiszen

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (2i - n - 1)^2 &= \sum_{i=1}^n 4i^2 - 2 \sum_{i=1}^n 2i(n+1) + n(n+1)^2 = \\ &= 4 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2n(n+1)^2 + n(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}. \end{aligned}$$

Most foglalkozunk a jobb oldallal:

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - x_j)^2 = n \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n x_j + n \sum_{j=1}^n x_j^2 = 2n \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

A bizonyítandó egyenlőtlenséget megkapjuk (1) és (2)-ből:

$$\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - x_j| \right)^2 \leq \frac{2(n+1)(n-1)}{3} \cdot 2n \sum_{i=1}^n x_i^2 = \frac{2(n^2 - 1)}{3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - x_j)^2.$$

Mivel (1)-ben a $(2i - n - 1)$ számok számtani sorozatot alkotnak, a Cauchy-egyenlőtlenségben pontosan akkor lesz egyenlőség, ha x_1, x_2, \dots, x_n is számtani sorozat.

2003/6. Legyen p prímszám. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan q prímszám, amivel minden n egész számra igaz, hogy $n^p - p$ nem osztható q -val.

Megoldás. Mivel

$$S = \frac{p^p - 1}{p - 1} = 1 + p + p^2 + \dots + p^{p-1} \equiv 1 + p \pmod{p^2},$$

ezért S -nek van olyan q prímosztója, amely nem 1 maradékot ad p^2 -tel osztva. Megmutatjuk, hogy ez a prímosztó megfelel q -nak.

Tegyük fel, hogy valamely n egészre $n^p \equiv p \pmod{q}$. Ekkor q definiálásából adódóan

$$(n^p)^p = n^{p^2} \equiv p^p \equiv 1 \pmod{q}.$$

Másrészt a kis Fermat-tétel [32] alapján $n^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$. Vegyük szemügyre, milyen kitevőkkel szerepelt n . Mivel $p^2 \nmid q - 1$, ezért $(p^2, q - 1) \mid p$, és így $n^p \equiv 1 \pmod{q}$.

Ezek szerint $n^p \equiv p \pmod{q}$ a feltevés szerint, és $n^p \equiv 1 \pmod{q}$ a levezetésünk alapján. Ezek szerint $p \equiv 1 \pmod{q}$. Viszont ekkor

$$S = 1 + p + p^2 + \dots + p^{p-1} \equiv p \pmod{q}.$$

Mivel q -t úgy választottuk, hogy $q \mid S$, ezért $p \equiv 0 \pmod{q}$, ami ellentmond feltevésünknek, ezért $n^p - p$ nem osztható q -val.

Megjegyzés. Bár a feladat megoldása viszonylag rövid, úgy érezhetjük, hogy a megfelelő q prím meghatározása – az első bekezdés – roppant nehézé teszi a feladatot. Összehasonlításként megemlíjtük, hogy a 457 résztvevő közül 24 oldotta meg a 3-as, és a 26 a 6-os feladatot lényegében helyesen ezen az olimpián.

Függelék

Nemzetközi Matematikai Verseny Finnországban, 1980

1980-ban elmaradt a Nemzetközi Matematikai Diákolimpia; ennek pótlására a világ több részében rendeztek kisebb nemzetközi diáktalálkozót. A magyar diákokat a Finn Matematika-, Fizika- és Kémia Tanárok Egyesülete (MAOL) hívta meg Finnországba, ahol finn, svéd és angol diákokkal mérték össze az erejüket. A verseny teljesen a diákolimpiák szervezeti szabályzata szerint folyt; a két versenynap hat feladatára összesen 40 pont volt kapható.

Maga a verseny Európának egy nálunk alig ismert csodálatosan szép szigeten, a Ahvenanmaa (Åland) szigetek Maarianhamina (Mariehamn) nevű központi városában volt, ez a legnagyobbika annak a térképen általában fel sem tüntetett szigeteknek, amelyek Finnország és Svédország között terülnek el.

A versenyen díjkategóriákat nem állapítottak meg; minden versenyző kapott ponteredménye alapján egy helyezési számot. Összesítésben Magyarország 134, Anglia 84, Svédország 76 és Finnország versenyzői 60 pontot értek el.

A magyar csapat eredménye:

Bohus Géza (Budapesti Fazekas M. Gimn., IV. o.)	28 pont	1. hely.
Benkő Bálint (Székesfehérvár, Teleki B. Gimn., IV. o.)	20 pont	3. hely.
Simonyi Gábor (Budapesti Apáczai Cs. J. Gimn. III. o.)	18 pont	5.–6. hely.
Tardos Gábor (Budapesti Berzsenyi D. Gimn., II. o.)	16 pont	9.–10. hely.
Umann Gábor (Budapesti Fazekas M. Gimn., IV. o.)	16 pont	9.–10. hely.
Kiss György (Miskolci Földes F. Gimn., IV. o.)	15 pont	11. hely.
Károlyi Gyula (Budapesti Fazekas M. Gimn., II. o.)	12 pont	12.–13. hely.
Elek Gábor (Budapesti Eötvös J. Gimn., III. o.)	9 pont	18.–21. hely.

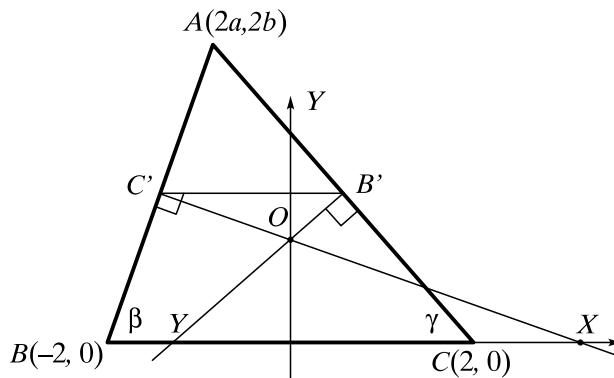
A következőkben közöljük a verseny feladatait és megoldásukat.

1980/1. Jelöljük egy tetszőleges ABC háromszög szögeit α -val, β -val, illetve γ -val. Az AB oldal felező merőlegese a BC oldalegyenest az X pontban, az AC felező merőlegese pedig az Y pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy $BC = XY$ teljesülésének elegendő feltétele: $\operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma = 3$.

Bizonyítsuk be, hogy ez a feltétel a $BC = XY$ teljesüléséhez nem szükséges, és adjuk meg ennek egy szükséges és elégséges feltételét.

1. megoldás. A feladat „legkényelmesebb” megoldása analitikus geometria módszerrel adható meg; ezzel ugyanis elkerülhetők a háromszög alakjából származó esetszétválasztások.

Mindenekelőtt leszögezzük, hogy derékszögű háromszögre a feladatnak nincs értelme, mert a szóban forgó felező merőleges vagy nem metszi a BC



80/1.1. ábra

egyenest, vagy pedig közös pontban metszik. A következőkben tehát feltesszük, hogy ABC nem derékszögű.

Helyezzük el az ABC háromszöget a koordináta-rendszerben úgy, hogy a csúcsok koordinátái: $A(2a, 2b)$, $B(-2, 0)$, $C(2, 0)$ legyenek (1980/1.1. ábra); feltehetjük, hogy $a \leq 0$. Ebben az esetben az AB , ill. AC oldal felezőpontjai: $C'(a-1, b)$, $B'(a+1, b)$; az oldalak irányvektorai: $(a+1, b)$, $(a-1, b)$, ezért a felezőmerőlegesek egyenletei:

$$(a+1)x + by = a^2 + b^2 - 1, \quad \text{ill.} \quad (a-1)x + by = a^2 + b^2 - 1.$$

Ezek az x tengelyt (azaz a BC egyenest) az

$$X \left(\frac{a^2 + b^2 - 1}{a+1}, 0 \right), \quad Y \left(\frac{a^2 + b^2 - 1}{a-1}, 0 \right)$$

pontban metszik ($a \leq 0$ miatt $a-1 \neq 0$, $a+1=0$ pedig azt jelentené, hogy A koordinátái $(-2, 2b)$ lennének, tehát ABC derékszögű lenne, amit kizártunk). Ebből következik, hogy az XY távolság:

$$(1) \quad XY = \left| \frac{a^2 + b^2 - 1}{a-1} - \frac{a^2 + b^2 - 1}{a+1} \right| = \left| -\frac{2b^2}{a^2 - 1} - 2 \right|.$$

Mivel pedig $BC=4$, a feladatban megkívánt szükséges és elégséges feltétel

$$(2) \quad \left| -\frac{2b^2}{a^2 - 1} - 2 \right| = 4, \quad \text{azaz} \quad \left| -\frac{b^2}{a^2 - 1} - 1 \right| = 2.$$

alakban adható meg.

Jelöléseink szerint

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a+1}, \quad \operatorname{tg} \gamma = -\operatorname{tg}(180^\circ - \gamma) = \frac{-b}{a-1},$$

ezért $\operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma = -\frac{b^2}{a^2 - 1}$, a (2) alatti szükséges és elégséges feltétel így

$$(3) \quad |\operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma - 1| = 2$$

formában adható meg. Ez az abszolút értékben belüli kifejezés előjelétől függően két részre bontható:

$$(4) \quad \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma = 3,$$

ill.

$$(5) \quad \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma = -1.$$

(4) és (5) mindegyike tehát elegendő feltétele, együttesük pedig szükséges és elégséges feltétele az $XY = BC$ teljesülésének.

(4) és (5) geometriai tartalmára a következő megoldás világíthat rá.

2. megoldás. Tegyük fel, hogy az ABC háromszög hegyesszögű; ehhez az 1980/1.1. ábra jelöléseit használva a B' -höz, ill. C' -höz tartozó oldalfelező merőlegesek a háromszög köré írt kör O középpontjában metszik egymást, ami ABC -nek belső pontja. Az $OB'C'$ és OXY háromszögek az O középpontra nézve hasonlóak és O elválasztja a B' , Y és C' , X pontpárokat. Ha $XY = BC$, mivel $B'C' = \frac{BC}{2}$, a két háromszög hasonlósági aránya $2:1$, ezért — mivel a két háromszög O -n átmenő magasságainak az összege $\frac{m_a}{2}$, O távolsága a BC egyenestől $\frac{m_a}{3}$. Ugyanakkor azonban ABC súlypontjának a BC -től mért távolsága is, ezért a súlypont és O összekötő egyenese, a háromszög Euler-egyenese, párhuzamos BC -vel.

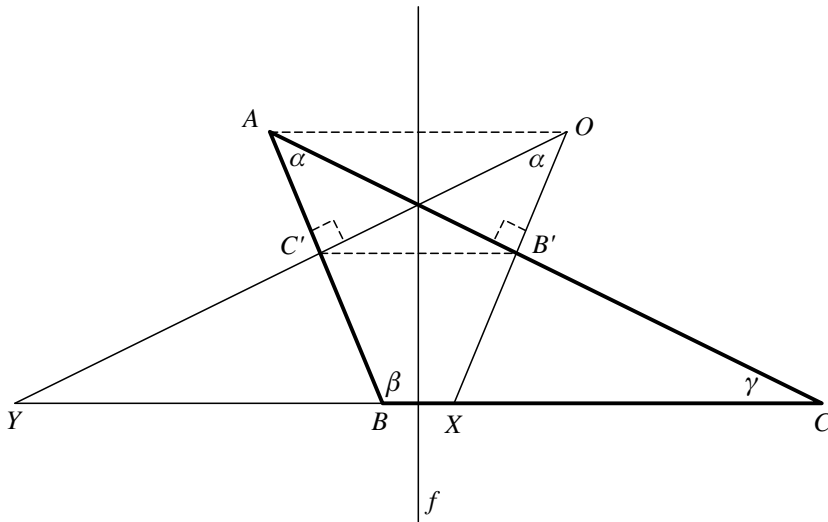
Jól ismert elemi tétel szerint (1. megjegyzésünket) az Euler egyenes és BC párhuzamosságának szükséges és elégséges feltétele $\beta \neq \gamma$ esetén a

$$(6) \quad \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma = 3$$

egyenlőség teljesülése, hegyesszögű háromszög esetén tehát (6) szükséges és elégséges feltétele $BC = XY$ teljesülésének.

$\beta = \gamma$ esetén $BC = XY$ csakis szabályos háromszög esetén áll fenn; ennél nem értelmezhető az Euler egyenes, viszont (6) teljesül, hiszen $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$.

Előző megoldásunkban rámutattunk, hogy a feladat feltételei derékszögű háromszög esetén nem teljesülhetnek. Tegyük most fel, hogy ABC tompaszögű. A tompaszög nem lehet az A csúcsnál, mert ebben az esetben X és Y a BC oldal belső pontjai, tehát $XY < BC$. Legyen β tompaszög (1980/1.2. ábra); az oldalfelező merőlegesek O metszéspontja ekkor az AC oldalegyenes B -vel átellenes oldalán van, és így $BAC \sphericalangle = YOX \sphericalangle = \alpha$, mert merőleges szárú hegyesszögek.



80/1.2. ábra

Ha feltesszük ismét, hogy $XY = BC$, akkor az ABC és OXY háromszögek BC -hez, ill. XY -hoz tartozó magassága egyenlő, mert közös a $B'C'$ középvonaluk és BC , XY egy egyenesen vannak, következésképpen egyenlők az $AB'C'$ és $OC'B'$ háromszögek A , ill. O csúcsához tartozó magasságaik is. Mivel két háromszög biztosan egybevágó, ha egy oldaluk közös, egyenlő az ezzel szemkötti szögük és az oldalhoz tartozó magasságuk is, sőt a két háromszög tükrös a közös alap f felező merőlegesére, ezért $AB'C'$ és $OC'B'$ tükrös a $B'C'$ felező merőlegesére és ugyanez áll kétszeres nagyítottukra, az ABC és OXY háromszögekre is.

Minthogy $OXY \sphericalangle = \beta$, az $XB'C$ háromszögből $\beta = 90^\circ + \gamma$

$$\gamma = -(90^\circ - \beta),$$

és ebből $\operatorname{tg} \gamma = -\operatorname{tg} (90^\circ - \beta) = -\operatorname{ctg} \beta$, és így

$$(7) \quad \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma = -1.$$

Megfordítva: (7) teljesüléséből gondolatmenetünk megfordíthatóságából következik, hogy $BC = XY$, ennek tehát tompaszögű β (vagy γ) esetén (7) szükséges és elégséges feltétele.

Összefoglalva: hegyesszögű háromszög esetén (6), tompaszögű esetén pedig (7) a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy a $BC = XY$ egyenlőség teljesüljön.

Megjegyzés. A 2. megoldásban felhasználtuk a következő tételt: annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az ABC Euler egyenese párhuzamos legyen a

BC oldallal, a következő összefüggés teljesülése:

$$(8) \quad \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma = 3 \quad (\beta \neq \gamma)$$

Legyen ugyanis a háromszög köré írt kör sugara: $R = 1$. Ha az Euler egyenes párhuzamos BC -vel, akkor a súlypont, a magasságpont és a köré írt kör középpontja BC -nek ugyanazon a oldalán van, ezért β és γ nem lehetnek hegyesszögnél nagyobbak, s (8)-at is csak hegyesszögek elégítik ki, feltehetjük tehát, hogy β és γ hegyesszög. A köré írt kör középpontjának a távolsága BC -től $R \cos \alpha = \cos \alpha$, a súlypont távolsága BC -től az m_a magasság harmadával egyenlő, ezért az Euler egyenes akkor és csakis akkor párhuzamos BC -vel, ha

$$(9) \quad 3 \cos \alpha = m_a.$$

Mivel $2t = am_a = bc \sin \gamma$ és $b = 2 \sin \beta$, $c = 2 \sin \gamma$, $a = 2 \sin \alpha$ (9)-ből következik, hogy $3a \cos \alpha = 2t = bc \sin \alpha$, azaz

$$\begin{aligned} 6 \sin \alpha \cos \alpha &= 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma, \\ 3 \cos \alpha &= -3 \cos(\beta + \gamma) = 2 \sin \beta \sin \gamma, \\ -3 \cos \beta \cos \gamma + 3 \sin \beta \sin \gamma &= 2 \sin \beta \sin \gamma, \\ \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma &= 3, \end{aligned}$$

(8) tehát teljesül, ha viszont (8) teljesül, gondolatmenetünk megfordíthatóságából következik, hogy a súlypont és a köréírt kör középpontja BC -nek ugyanazon az oldalán van, BC -től egyenlő távol, tehát az Euler egyenes párhuzamos BC -vel.

1980/2. Az a_0, a_1, \dots, a_n számokat a következőképpen értelmezzük:

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_{k+1} = a_k + \frac{a_k^2}{n} \quad (n > 1, \quad k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Bizonyítandó, hogy

$$(1) \quad 1 - \frac{1}{n} < a_n < 1.$$

Megoldás. Az a_i számok meghatározásából következik, hogy

$$(2) \quad a_0 < a_1 < \dots < a_n.$$

Vizsgáljuk két szomszédos tag reciprokának a különbségét:

$$(3) \quad \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} = \frac{a_{k+1} - a_k}{a_k a_{k+1}} = \frac{a_k^2}{n a_k \left(a_k + \frac{a_k^2}{n} \right)} = \frac{1}{n + a_k}$$

Mivel $a_k < a_n$, ha $k < n$, ezért (2)-ből és (3)-ból következik, hogy

$$\frac{1}{n + a_n} < \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} < \frac{1}{n}.$$

Összegezzük az ilyen típusú egyenlőtlenségeket $k = 0$ -tól $n - 1$ -ig:

$$(4) \quad \frac{n}{n+a_n} < \frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n} < 1.$$

Egyenlőtlenségünk jobb oldala egyenértékű a $2 - \frac{1}{a_n} < 1$, azaz a bizonyításban szereplő $a_n < 1$ egyenlőtlenséggel. (4) bal oldalából következik, hogy

$$\frac{1}{a_n} < 2 - \frac{n}{n+a_n}.$$

A már bizonyított $a_n < 1$ egyenlőtlenséget felhasználva ez azt jelenti, hogy

$$\frac{1}{a_n} < 2 - \frac{n}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{n-1} = \frac{n}{n-1},$$

vagyis

$$a_n > \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n},$$

ami éppen a bizonyítandó (1) bal oldali egyenlőtlensége.

1980/3. Bizonyítsuk be, hogy az

$$(1) \quad x^n + 1 = y^{n+1}$$

egyenletnek, ahol n 2-nél nem kisebb egész számot jelöl, nincs olyan pozitív egész megoldása x -ben és y -ban, amelynél x és $n+1$ relatív prímek.

Megoldás. A feladat állításával ellentétben tegyük fel, hogy (1)-nek létezik olyan x, y pozitív egész megoldása, amelyekre x és $n+1$ relatív prímek. Írjuk fel (1)-et

$$(2) \quad x^n = y^{n+1} - 1 = (y-1)(y^n + y^{n-1} + \dots + y + 1)$$

alakban. Megmutatjuk, hogy ebben az esetben $y-1$ és $y^n + y^{n-1} + \dots + y + 1$ is relatív prímek; ha ugyanis nem ez lenne a helyzet, léteznék olyan p prímszám, amelyre valamilyen A és B egésszel

$$(3) \quad y-1 = Ap, \quad y = Ap+1;$$

$$(4) \quad y^n + y^{n-1} + \dots + y + 1 = Bp$$

teljesülne. Helyettesítsük y (3) alatti értékét (4) bal oldalába; itt az első n tag mindegyike a binomiális tétel következményeként p -vel osztva 1-et ad maradékul, tehát (4) bal oldala alkalmas C egésszel $Cp + (n+1)$ alakú, azaz

$$(B-C)p = n+1,$$

ami azt jelenti, hogy p osztója $n+1$ -nek és (2) miatt x -nek is, ami ellentmond annak a feltevésünknek, hogy x és $n+1$ relatív prímek.

$y-1$ és $y^n + y^{n-1} + \dots + y + 1$ tehát relatív prímek, s mivel (2) szerint szorzatuk egy egész szám n -edik hatványa, kell, hogy mindegyikük teljes n -edik

hatvány legyen; azonban ez

$$y^n < y^n + y^{n-1} + \dots + y + 1 < (y+1)^n$$

miatt lehetetlen, hiszen két szomszédos szám n -edik hatványa között nem lehet teljes n -edik hatvány. Ezzel kiindulásunkból ellentmondásra jutottunk, ami a feladat állítását bizonyítja.

1980/4. Mely n természetes számra igaz a következő állítás: a körbe írható $A_1 A_2 \dots A_{2n}$ konvex sokszögnél az

$$(A_1 A_2, A_{n+1} A_{n+2}), (A_2 A_3, A_{n+2} A_{n+3}), \dots, (A_{n-1} A_n, A_{2n-1} A_{2n})$$

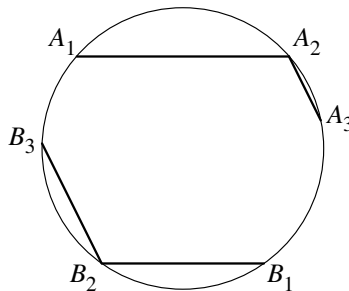
szemközti oldalpárok párhuzamosságából következik az

$$A_n A_{n+1}, A_{2n} A_1$$

oldalpár párhuzamossága.

1. megoldás. Bebizonyítjuk először, hogy a feladat állítása páratlan n -ekre igaz, páros n -ekre azonban általában már nem igaz.

Két megjegyzést bocsátunk előre. Az első: ha A_1, A_2, A_3 és B_1, B_2, B_3 egy kör olyan egymás utáni pontjai, hogy a két ponthármas körüljárási iránya azonos és $A_1 A_2 \parallel B_1 B_2$ és $A_2 A_3 \parallel B_2 B_3$, akkor az A_2 -t tartalmazó $A_1 A_3$ ív egyenlő a B_2 -t tartalmazó $B_1 B_3$ ívvel (1980/4.1. ábra).

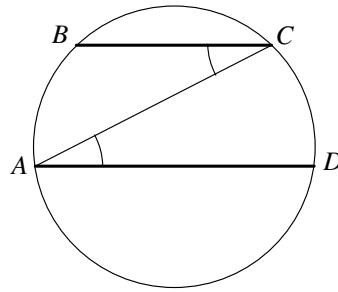


80/4.1. ábra

Ez abból következik, hogy az $A_1 A_2 A_3 \triangleleft B_1 B_2 B_3 \triangleleft$, mert váltószögek, így az $A_1 A_3$ és $B_1 B_3$ ívekhez egyenlő kerületi szögek tartoznak, tehát egyenlők.

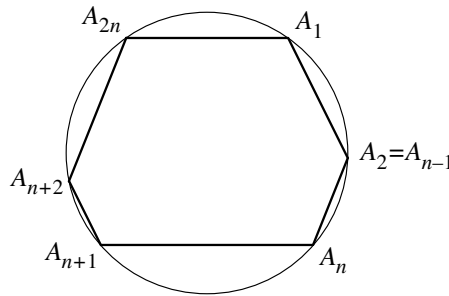
A második: ha az AB és CD ívek egy kör egyirányú, egyenlő hosszú ívei, akkor az AD és BC húrok párhuzamosak (1980/4.2. ábra). A feltételből ui. következik, hogy $ACB \triangleleft CAD \triangleleft$ (egyenlő ívekhez tartozó kerületi szögek), ezért a váltószögek tételének megfordításából következik, hogy $AD \parallel BC$.

Tegyük fel — a feladat kikötéseinek megfelelően —, hogy a körbe írt konvex $2n$ -szögben $A_1 A_2 \parallel A_{n+1} A_{n+2}$, $A_2 A_3 \parallel A_{n+2} A_{n+3}$, \dots , $A_{n-1} A_n \parallel A_{2n-1} A_{2n}$. A sokszög konvex voltából következik, hogy az



80/4.2. ábra

$A_1A_2A_3$ és $A_{n+1}A_{n+2}A_{n+3}$, az $A_3A_4A_5$ és $A_{n+3}A_{n+4}A_{n+5}, \dots, A_{n-2}A_{n-1}A_n$ és $A_{2n-2}A_{2n-1}A_{2n}$ ponthármassok egyező körüljárásúak, és ezért első megjegyzésünk értelmében $\overline{A_1A_3} = \overline{A_{n+1}A_{n+3}}$, $\overline{A_3A_5} = \overline{A_{n+3}A_{n+5}}, \dots, \overline{A_{n-2}A_n} = \overline{A_{2n-2}A_{2n}}$, és mivel n páratlan, ezért a fentiekben az $\overline{A_1A_n}$ és $\overline{A_{n+1}A_{2n}}$ minden részívét felsoroltuk, tehát $\overline{A_1A_n} = \overline{A_{n+1}A_{2n}}$, ebből viszont második megjegyzésünk alapján következik, hogy az A_1A_{2n} és A_nA_{n+1} oldalak is párhuzamosak (1980/4.3. ábra).



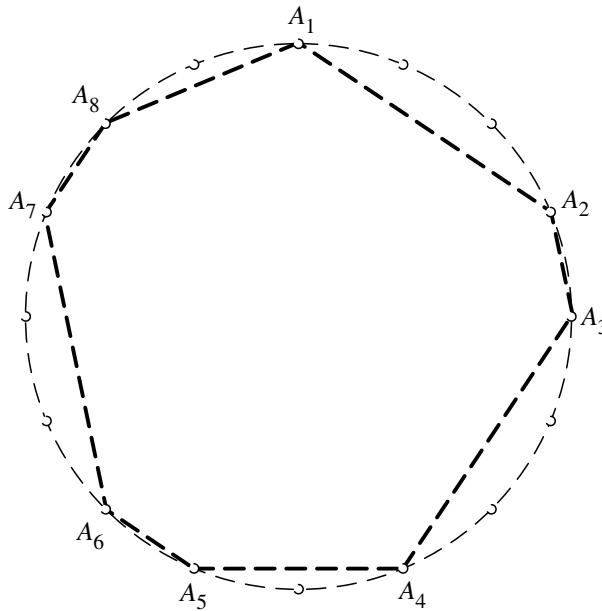
80/4.3. ábra

Egy ellenpéldán megmutatjuk, hogy ha n páros, $n - 1$ oldalpár párhuzamos-ságából általában még nem következik az n -edik oldalpár párhuzamos-sága.

Válasszuk az egységsugarú körbe írt sokszög csúcsait úgy, hogy a szomszédos csúcsok közötti ívekre az alábbi feltételek teljesüljenek:

$$\begin{aligned} \overline{A_1A_2} = \overline{A_3A_4} = \dots = \overline{A_{n-1}A_n} &= \frac{3\pi}{2n} = \overline{A_{n+2}A_{n+3}} = \overline{A_{n+4}A_{n+5}} = \dots = \overline{A_{2n-2}A_{2n-1}}; \\ \overline{A_2A_3} = \overline{A_4A_5} = \dots = \overline{A_{n-2}A_{n-1}} &= \frac{\pi}{2n} = \overline{A_{n+1}A_{n+2}} = \overline{A_{n+3}A_{n+4}} = \dots = \overline{A_{2n-1}A_{2n}}; \\ A_nA_{n+1} &= \frac{\pi}{n} = A_{2n}A_1. \end{aligned}$$

Ez a felosztás szemléletesen azt jelenti, hogy háromféle körív fordul elő a szomszédos csúcsok között: $\frac{3\pi}{2n}$ hosszúságú (I. típus), ennek harmadrésze, $\frac{\pi}{2n}$



80/4.4. ábra

hosszúságú (II. típus) és végül két ív hossza $\frac{\pi}{n}$. Az I-es és II-es típusú ívek felváltva követik egymást az A_1 csúcstól az A_n -ig, majd újra az A_{n+1} -ből A_{2n} -ig (az 1980/4.4. ábrán $n=4$), a csúcsokat a körbe írt $4n$ oldalú szabályos sokszög csúcsaiból választjuk ki. Ebből következik, hogy ha kiválasztjuk az $A_k A_{k+1}$ és $A_{n+k} A_{n+k+1}$ oldalakat, ezek párhuzamosak lesznek, ha $k \neq n$, mivel az elrendezés miatt $\overline{A_{k+1} A_{n+k}} = \overline{A_{n+k+1} A_k}$, viszont $A_n A_{n+1}$ és $A_{2n} A_1$ nem lehetnek párhuzamosak, mert ehhez $A_1 A_n = A_{n+1} A_{2n}$ teljesülésére lenne szükség. Azonban $\overline{A_1 A_n} \frac{n}{2}$ darab I. típusú és $\frac{n-2}{2}$ darab II. típusú ívből áll, tehát

$$\overline{A_1 A_n} = \frac{n}{2} \cdot \frac{3\pi}{2n} + \frac{n-2}{2} \cdot \frac{\pi}{2n} = \frac{2n-1}{2n} \pi;$$

és $\overline{A_{n+1} A_{2n}} \frac{n-2}{2}$ darab I. típusú és $\frac{n}{2}$ darab II. típusú ívet tartalmaz, ezért

$$\overline{A_{n+1} A_{2n}} = \frac{n-2}{2} \cdot \frac{3\pi}{2n} + \frac{n}{2} \cdot \frac{\pi}{2n} = \frac{2n-3}{2n} \pi,$$

így tehát $A_n A_{n+1}$ valóban nem párhuzamos $A_{2n} A_1$ -gyel.

2. megoldás. A feladat első részére igen egyszerű megoldást adhatunk komplex számok felhasználásával. A komplex számsík nullapontja körül írt körön legyenek az a, b, c, d pontok. Ismeretes [38], hogy az a és b , valamint a c és d pontok összekötő egyenesei akkor és csakis akkor párhuzamosak, ha $ab = cd$.

Vegyük fel az $A_1 A_2 \dots A_{2n}$ sokszöget a komplex számsíkon úgy, hogy a sokszög köré írt kör középpontja a O pont legyen. A sokszögcsúcsok helyének megfelelő komplex számokat az azonos kisbetűkkel jelölve a feladat feltétele így írható fel abban az esetben, ha n páratlan:

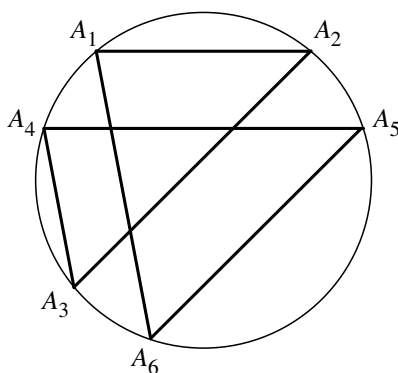
$$\begin{aligned} a_1 a_2 &= a_{n+1} a_{n+2}, \\ a_{n+2} a_{n+3} &= a_2 a_3, \\ a_3 a_4 &= a_{n+3} a_{n+4}, \\ &\vdots \\ a_{2n-1} a_{2n} &= a_{n-1} a_n. \end{aligned}$$

Szorozzuk össze az egyenlőségek azonos oldalait, az eredményből egyszerűsítések után azt kapjuk, hogy

$$a_1 a_{2n} = a_n a_{n+1},$$

ami éppen azt jelenti, hogy $A_1 A_{2n}$, $A_n A_{n+1}$ oldalak párhuzamosak.

Megfigyelhetjük, hogy ez a bizonyítás nem használja fel a sokszög konvex voltát, tehát a feladat állítása önmagát átmetsző sokszögvonalra is igaz. Ilyen sokszög van $n=3$ -ra az 1980/4.5. ábrán.



80/4.5. ábra

Megjegyzés. Az 1. megoldás ellenpéldája természetesen a 2. megoldás szellemében, komplex számokkal is megfogalmazható, de a konstrukció miatt bizonyos esettagolás itt is elkerülhetetlen.

1980/5. Valamely síkbeli derékszögű koordináta-rendszer x tengelyével párhuzamos egyenest akkor nevezünk triangulárisnak, ha balról jobbra haladva olyan különböző A , B , C és D pontokban metszi az

$$y = x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s$$

egyenletű görbét, hogy az AB , AC és AD szakaszok egy háromszög oldalai lehetnek.

Bizonyítsuk be, hogy az x tengellyel párhuzamos egyenesek közül a szóban forgó görbét négy különböző pontban metszőknek vagy mindegyike trianguláris, vagy egyik sem az.

1. megoldás. A görbét egy, az x -tengellyel párhuzamos e egyenes messe rendre az A, B, C, D pontokban, legyenek az A koordinátái $A(t, d)$. Toljuk el a koordináta-rendszer kezdőpontját A -ba, a görbe egyenletét az új rendszerben az $x \rightarrow x+t, y \rightarrow y+d$ helyettesítéssel kapjuk meg:

$$y+d=(x+t)^4+p(x+t)^3+q(x+t)^2+r(x+t)+s,$$

ebből

$$y=x^4+(4t+p)x^3+(6t^2+3pt+q)x^2+(4t^3+3pt^2+2tq+rx)+(t^4+pt^3+qt^2+rt+s)-d.$$

Az új együtthatókat rendre P, Q, R, W -sel jelölve, a görbe egyenlete

$$y=x^4+Px^3+Qx^2+Rx+S$$

alakú, mivel azonban az origó rajta van a görbén, $S=0$. Az A, B, C, D pontokhoz tartozó x értékek éppen az

$$x^4+Px^3+Qx^2+Rx=0$$

egyenlet gyökei, az A -hoz éppen az $x=0$ tartozik. A B, C, D pontok abszcisszáit jelölje rendre t_1, t_2, t_3 ($t_1 < t_2 < t_3$), ezek tehát kielégítik az

$$x^3+Px^2+Qx+R=0$$

egyenletet. Annak feltétele, hogy a t_1, t_2, t_3 szakaszokból szerkeszthető legyen háromszög, az, hogy $-t_1+t_2+t_3 > 0, t_1-t_2+t_3 > 0, t_1+t_2-t_3 > 0$ egyenlőtlenségek teljesüljenek (ebből az első kettő a nagyságrendi sorrend miatt eleve teljesül), azaz

$$(8) \quad (-t_1+t_2+t_3)(t_1-t_2+t_3)(t_1+t_2-t_3) > 0$$

kell, hogy fennálljon.

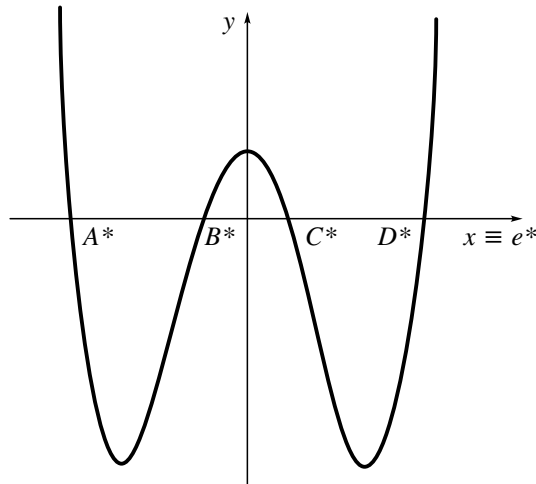
A harmadfokú egyenlet gyökei és együtthatói közötti összefüggés alapján $t_1+t_2+t_3=-P, t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1=Q$ és $t_1t_2t_3=-R$. Mint arról számolással könnyen meggyőződhetünk, (8) bal oldalán $P^3-4PQ+8R$ áll, tehát annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az e egyenes trianguláris legyen az, hogy

$$\delta=P^3-4PQ+8R>0$$

teljesüljön. Viszont — számolással ezt is könnyen igazolhatjuk —

$$\delta=P^3-4PQ+8R=p^3-4pq+8r,$$

tehát δ értéke független az e egyenes felvételétől, ezért ha egy e egyenesre $\delta > 0$, akkor mindre az; és ha egy egyenesre $\delta \leq 0$, akkor mindegyikre teljesül, tehát a megadott egyeneseknek vagy mindegyike trianguláris, vagy egyike sem az.



80/5.1. ábra

2. megoldás. Viszonylag egyszerű megoldást adhatunk a feladatra, ha a szemléletnek nagyobb szerepet tulajdonítunk. Figyeljük meg az 1980/5.1. ábrát: az A, B, C, D pontok trianguláris voltának a feltétele $AB < AC < AD$ miatt

$$AD < AB + AC, \quad \text{azaz} \quad AB + BC + CD < AB + AB + BC$$

teljesülése, amiből $CD < AB$ következik. A pontnégyes tehát nem trianguláris, ha $CD \geq AB$. Tegyük most fel, hogy van olyan e egyenes, amelyen $CD < AB$, és van olyan e' egyenes, amelyen a metszéspontokra $C'D' \geq A'B'$.

Az e egyenest e' felé tolva a rajtuk levő metszéspontok távolsága folytonosan változik, ezért lesz az e -nek olyan e^* helyzete, amelyen az A^*, B^*, C^*, D^* metszéspontokra $C^*D^* = A^*B^*$ egyenlőség áll fenn. Válasszuk most a koordináta-rendszert úgy, hogy az x -tengely e^* -gal essék egybe, az origó viszont BC felezőpontja legyen. Jelölje A^*, B^*, C^*, D^* abszcisszáját rendre $-a, -b, b, a$. Mivel a negyedfokú polinomot (ha x^4 együtthatóját 1-nek választjuk) a gyökhelyei egyértelműen meghatározzák, a függvénygörbe egyenlete

$$y = (x - a)(x + a)(x - b)(x + b) = (x^2 - a^2)(x^2 - b^2),$$

a függvénygörbe ezért szimmetrikus az y -tengelyre.

Ez azonban azt jelenti, hogy az x -tengellyel párhuzamos metszetein a metszéspontok is szimmetrikusan helyezkednek el, tehát minden metsző e egyenesen $AB = CD$, ami ellentmond feltevésünknek, azaz nem lehetséges, hogy egyidejűleg létezzen trianguláris és nem trianguláris egyenes is.

1980/6. Állapítsuk meg, hogy mely számjegyek állanak közvetlenül a tízesdesvesszőtől balra és jobbra a

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{1980}$$

szám tízes számrendszerben felírt alakjában.

1. megoldás. A vizsgálandó szám „nagyon kicsit” változik, ha hozzáadjuk a reciprokat, $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{1980}$ -t. Legyen

$$A = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{1980} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{1980}.$$

Mivel

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = 5 + 2\sqrt{6} \quad \text{és} \quad (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 5 - 2\sqrt{6},$$

azért

$$A = (5 + 2\sqrt{6})^{990} + (5 - 2\sqrt{6})^{990}.$$

Fejtsük most ki a binomiális tétel segítségével:

$$\begin{aligned} A &= 5^{990} + \binom{990}{1} 5^{989} \cdot 2\sqrt{6} + \dots + \binom{990}{989} 5 \cdot (2\sqrt{6})^{989} + 5^{990} - \\ &\quad - \binom{990}{1} 5^{989} \cdot 2\sqrt{6} + \dots - \binom{990}{989} 5 \cdot (2\sqrt{6})^{989} + (2\sqrt{6})^{990} = \\ &= 2 \cdot 5^{990} + \dots + 2 \binom{990}{988} 5^2 \cdot 2^{988} \cdot 6^{494} + 2 \cdot 2^{990} \cdot 6^{495}. \end{aligned}$$

A kapott összeg minden tagja egész, ezért A is egész, és az utolsó tag kivételével minden tag osztható 10-zel, ezért A végződése az utolsó tag végződésével azonos. Az utolsó tag $2^{991} \cdot 6^{495}$. Tudjuk, hogy 6 minden hatványa 6-ra végződik, 2 hatványainak az végződése pedig rendre 2, 4, 8, 6, ... s innen periodikusan ismétlődik. Mivel $991 = 4 \cdot 247 + 3$, azért 2^{991} 8-ra végződik, és így A végződése $8 \cdot 6$ végződésével azonos, tehát 8-cal.

Viszont $5 - 2\sqrt{6} < 0,2$, ezért $(5 - 2\sqrt{6})^{990} < (0,2)^{990} = 0,4^{495} < 0,1^{495}$, tehát $(5 - 2\sqrt{6})^{990}$ tízes számrendszerbeli alakjában a tizedesvessző után legalább 495 nulla következik, ezért

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{1980} &= (5 + 2\sqrt{6})^{990} = A - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{1980} = \\ &= \overline{XXX \dots 8 - 0,00 \dots 0XX} = \overline{XXX \dots 7,999 \dots XX \dots} \end{aligned}$$

a tizedesvessző mellett álló számjegyek tehát ...7,9...

2. megoldás. Az előbbi megoldás kiindulását követve vizsgáljuk az

$$A_n = (5 + 2\sqrt{6})^n + (5 - 2\sqrt{6})^n$$

sorozatot.

A rekurzióval definiált sorozatok elméletéből ismeretes (de egyszerű számlással közvetlenül is igazolható), hogy a sorozat elemei kielégítik az

$$A_n + A_{n+2} = 10A_{n+1}$$

egyenletet, azaz a sorozat másodszomszédos elemeinek az összege 10-zel osztható, tehát 0-ra végződik. Minthogy $A_1 = 10$, $A_2 = 98$, ezért a sorozatelemek végződésai

$$0, 8, 0, 2, 0, 8, 0, 2, \dots$$

négyes periódussal rendelkeznek. Mivel $990 = 247 \cdot 4 + 2$, A_{990} végződése 8. S mint az 1. megoldásban láttuk, $(5 - 2\sqrt{6})^{990}$ -nél a tizedesvessző után 0 áll,

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{1980} = (5 + 2\sqrt{6})^{990} = A_{990} - (5 - 2\sqrt{6})^{990}$$

miatt $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{1980}$ tízes számrendszerbeli alakjában a tizedesvessző melletti jegyek: $\dots 7,9 \dots$

6. A magyar csapat teljesítménye

N: az olimpia sorszáma, E: az éve; C: csapatlétszám. I., II., III.: arany-, ezüst- és bronzérmek száma, S: a kapott díjak száma, %: a csapat által szerzett pontok és a maximálisan elérhető pontok százalékos aránya. H: a nemhivatalos csapatversenyen elért helyezési szám.

N	E	C	I	II	III	S	%	H
1	1959	8	1	1	3	5	73	2
2	1960	8	2	2	1	5	69	2–3
3	1961	8	2	3	3	8	84	1
4	1962	8	2	3	2	7	79	1
5	1963	8	–	5	3	8	73	2
6	1964	8	3	1	1	5	75	2
7	1965	8	3	2	2	7	76	2
8	1966	8	3	2	1	6	89	2
9	1967	8	2	3	3	8	75	3
10	1968	8	3	3	2	8	91	3
11	1969	8	1	4	2	7	77	1
12	1970	8	3	1	3	7	73	1
13	1971	8	4	4	–	8	80	1
14	1972	8	3	3	2	8	82	2
15	1973	8	1	2	5	8	67	2
16	1974	8	1	3	3	7	74	3
17	1975	8	–	5	3	8	81	1
18	1976	8	–	3	4	7	50	7
19	1977	8	1	3	2	6	59	3–4
20	1978	–	–	–	–	–	–	–
21	1979	8	–	2	2	4	55	8
22	1981	4	3	1	–	4	(98)* 49	17
23	1982	4	–	3	1	4	74	6

N	E	C	I	II	III	S	%	H
24	1983	6	–	4	2	6	67	3
25	1984	6	1	4	1	6	73	4–5
26	1985	6	2	2	2	6	67	3
27	1986	6	1	2	2	5	60	8
28	1987	6	–	5	1	6	87	6
29	1988	6	–	2	2	4	42	16
30	1989	6	–	4	1	5	69	10
31	1990	6	1	3	2	6	64	6
32	1991	6	2	3	1	6	83	6
33	1992	6	1	3	1	5	63	8–9
34	1993	6	3	1	2	6	57	8
35	1994	6	1	5	–	6	88	5
36	1995	6	3	1	2	6	83	5
37	1996	6	3	2	1	6	66	3
38	1997	6	4	2	0	6	86	2
39	1998	6	4	2	0	6	74	3–4
40	1999	6	1	4	1	6	58	11
41	2000	6	1	5	0	6	62	9
42	2001	6	0	2	3	5	41	21
43	2002	6	1	2	3	6	56	12–13
44	2003	6	1	3	1	5	51	10–11
Σ		294	68	120	76	264		

*) 4 versenyző (fél-létszámú csapat) teljesítménye.

A 294 nevezés 186 diák között oszlik meg (közülük 7 leány), akik az ország 30 iskolájából (közülük 20 fővárosiból) kerültek ki.

Helyezések:

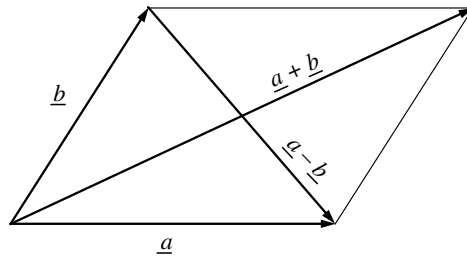
- 1: 6 olimpián
- 2: 9 olimpián
- 3: 8 olimpián
- 4–10: 15 olimpián
- 11–20: 4 olimpián
- 20–30: 1 olimpián

7. A feladatmegoldások során felhasznált tételek

- [1] *A paralelogramma-tétel és alkalmazásai.* A paralelogramma átlóinak négyzetösszege az oldalak négyzetösszegével egyenlő. Legyen ugyanis a paralelogramma egy csúcsból induló két oldalvektora \mathbf{a} és \mathbf{b} , az átlóvektorok ekkor $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, ill. $\mathbf{a} - \mathbf{b}$. Tételünk bizonyításához azt kell igazolnunk, hogy

$$2\mathbf{a}^2 + 2\mathbf{b}^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 + (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2,$$

ami nyilvánvaló.



1.1. ábra

Legyenek egy háromszög oldalai a, b, c ; a c oldalhoz tartozó súlyvonal: $CC' = s_c$ (1.1. ábra). Tükrözzük a háromszöget a C' pontra; így olyan paralelogrammát kapunk, amelynek oldalai a, b, a, b ; átlói: c és $2s_c$. Az előbbi tétel szerint

$$2a^2 + 2b^2 = 4s_c^2 + c^2,$$

ebből

$$s_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}.$$

- [2] *Összefüggés a háromszög oldalai és a szögek kotangensei között.*

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4t(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma).$$

Írjuk fel a koszinusztételt mind a három oldalra, majd adjuk össze a felírt egyenlőségeket:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2bc \cos \alpha - 2ca \cos \beta - 2ab \cos \gamma,$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(bc \cos \alpha + ca \cos \beta + ab \cos \gamma).$$

A háromszög területképletéből: $bc = \frac{2t}{\sin \alpha}$; az ilyen jellegű egyenlőségeket az előbbibe helyettesítve éppen a bizonyítandót kapjuk:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4t \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \beta}{\sin \beta} + \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} \right) = 4t(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma).$$

[3] A kotangens-egyenlőtlenség. Ha α, β, γ egy háromszög szögei,

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma \geq \sqrt{3}.$$

Bizonyítására számos lehetőség kínálkozik. Induljunk ki a következő azonosságokból, ill. azonos egyenlőtlenségből:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} = \frac{2 \sin \gamma}{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)} = \\ &= \frac{2 \sin \gamma}{\cos(\alpha - \beta) + \cos \gamma} \geq \frac{2 \sin \gamma}{1 + \cos \gamma} = \frac{4 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}{1 + 2 \cos^2 \frac{\gamma}{2} - 1} = 2 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma &\geq \operatorname{ctg} \gamma + 2 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \\ &= 2 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{\gamma}{2} - 1}{2 \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}} = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{\gamma}{2} + 3}{\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}} = \frac{1}{2} \left(\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} + 3 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right). \end{aligned}$$

Az utolsóként kapott összeget a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján becsülve kapjuk, hogy

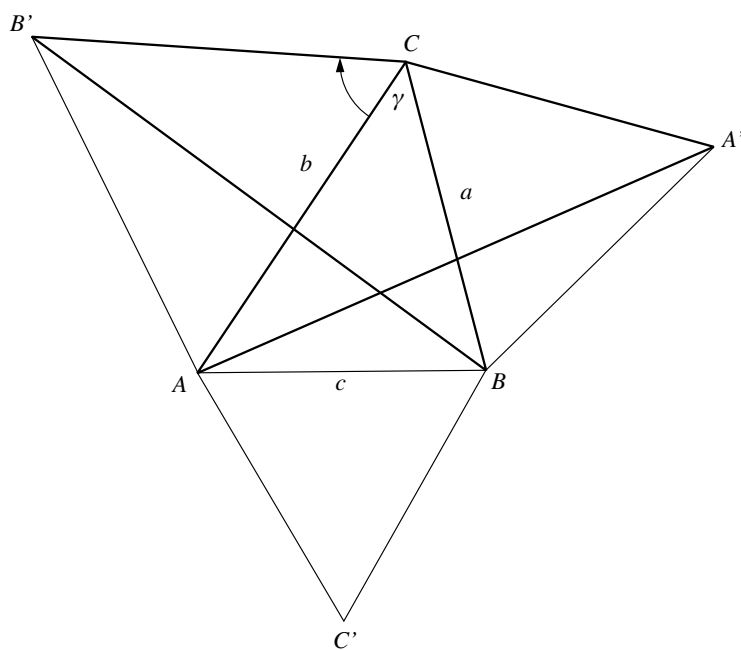
$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma \geq \sqrt{\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \cdot 3 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} = \sqrt{3}.$$

[4] Izogonális pont (izogonális = egyenlő szögű). Egy háromszög izogonális pontja az a pontja, amelyből minden oldala 120° -os szögben látszik. Ilyen pont akkor létezik, ha a háromszög minden szöge kisebb 120° -nál.

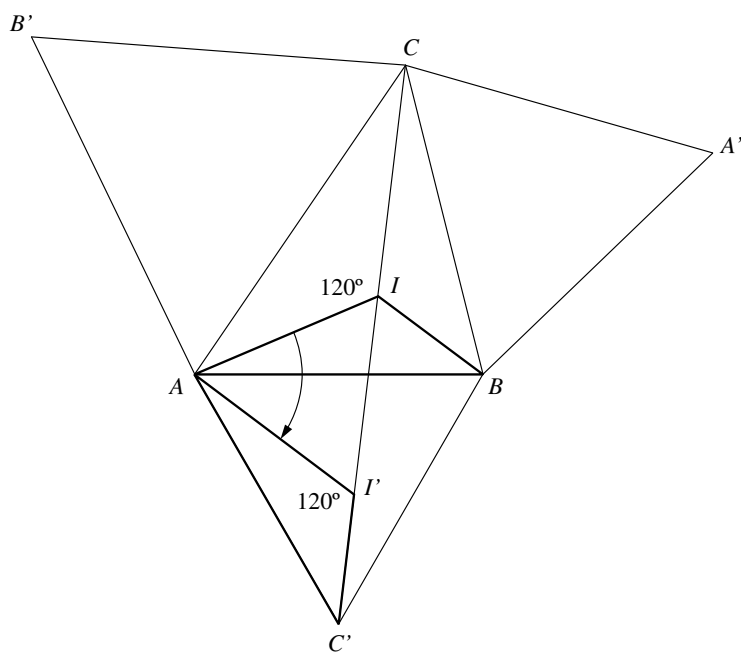
Az izogonális pont tehát rajta van a háromszögek oldalai fölé befelé szerkesztett 120° -os látószögű köríveken, ez a három körív szükségképpen rendelkezik egy közös ponttal.

Az izogonális pont szerkesztéséhez felhasználhatjuk a következő tényt is: ha az ABC háromszög oldalaira kifelé ABC' , BCA' , CAB' szabályos háromszögeket szerkesztünk, akkor az AA' , BB' , CC' szakaszok egyenlőek (4.1. ábra). Pl. az AA' és BB' egyenlősége abból következik, hogy az ACA' háromszöget 60° -os C körüli elforgatás a $B'CB$ háromszögbe viszi át, és ez akkor is igaz, ha a szóban forgó két háromszög egyenesszakasszá fajul.

Ha az I izogonális pont létezik, akkor rajta van az AA' , BB' , CC' szakaszok mindegyikén. Legyen pl. I izogonális pont, ekkor $AIC \angle = AIB \angle = 120^\circ$; ekkor az AIB háromszöget 60° -kal elforgatva az $AI'C'$ háromszögbe megy át és az elforgatás miatt az $AI'I'$ háromszög szabályos (4.2. ábra). Ábránkról leolvasható, hogy C, I, C' egy egyenesen van, I tehát rajta van a CC' szakaszon. Ábránkról az is kitűnik, hogy $CC' = IA + IB + IC$, tehát $CC' (= AA' = BB')$ egyenlő az I pont csúcsoktól mért távolságösszegével.



4.1. ábra



4.2. ábra

Ha az előbbi elforgatást olyan I pontra alkalmazzuk, amely nincs rajta CC' -n, azt kapnánk, hogy

$$AI + BI + CI = II' + CI + I'C' > CC',$$

hiszen az II' , CI , $I'C'$ szakaszok nincsenek egy egyenesen. Ennek következménye, hogy ha az I izognális pont létezik, akkor ennek a legkisebb a háromszögsúcsoktól mért távolságösszege, és ez az összeg éppen az AA' , BB' , CC' közös hossza.

A BCB' , CAC' , ABA' háromszögekre alkalmazva a koszinusztételt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} BB' = CC' = AA' &= a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma + 60^\circ) = \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha + 60^\circ) = c^2 + a^2 - 2ac \cos(\beta + 60^\circ). \end{aligned}$$

Ez az utóbbi egyenlőség egyébként trigonometrikus úton az előzményeink nélkül is könnyen igazolható.

- [5] *Kétközéppontú sokszögek; Poncelet-féle záródási tétel.* Kétközéppontúnak (bicentrikusnak) mondunk egy sokszöget, ha létezik köréírt köre és beírt köre is. Minden háromszög kétközéppontú, ugyanez igaz a szabályos sokszögekre is. Ezeknél a sokszögeknél a beírt kör r sugara és a köré írt kör R sugara és a középpontjaikat összekötő d távolság között meghatározott összefüggés áll fenn; ezek 3, 4, 5 és 6 oldalú sokszögre a következők:

$$n=3: \quad d^2 = R^2 - 2Rr \quad \text{vagy:} \quad \frac{1}{R+d} + \frac{1}{R-d} = \frac{1}{r}, \quad (\text{Euler})$$

$$n=4: \quad (R^2 - d^2)^2 = 2r^2 (R^2 + d^2) \quad \text{vagy:} \quad \frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2} = \frac{1}{r^2},$$

$$n=5: \quad r(R-d) = (R+d)\sqrt{R-r-d} \left(\sqrt{R-r+d} + \sqrt{2R} \right),$$

$$n=6: \quad 3(R^2 - d^2)^4 = 4r^2 (R^2 + d^2) (R^2 - d^2) + 16R^2 d^2 r^4.$$

A bicentrikus n -szögek köreinek nevezetes tulajdonsága, hogy végtelen sok kétközéppontú sokszög beírt, ill. köréírt körei lehetnek; pontosabban: legyen k a beírt, K a köréírt kör. K egy tetszőleges A_1 pontjából érintőt húzunk k -hoz, ez K -t másodszor A_2 -ben metszi. A_2 -ből ismét érintőt húzunk k -hoz, ez K -t másodszor A_3 -ban metszi; ezt az eljárást folytatva az A_{n+1} pont egybeesik A_1 -gyel, azaz a sokszögszerkesztés az n -edik lépésben *zárul*. Ez a körökre vonatkozó Poncelet-féle záródási tétel.

Az említett tételnek általános formájában körök helyett kúpszeletek szerepelnek; ennek a tételnek a vizsgálata a projektív geometria tárgykörébe tartozik.

- [6] *Pont körre vonatkozó hatványa; hatványvonal, hatványpont.* Ha az R sugarú k kör középpontja O , és P a k síkjának tetszőleges pontja, akkor

$$h = PO^2 - R^2$$

számot a P pont k körre vonatkozó hatványának nevezzük. Ennek értéke pozitív, nulla vagy negatív, aszerint, hogy P a k -n kívül, k -n, ill. k -n belül van. Ha P külső pont, h értéke egyenlő P -ből a körhöz húzott érintőszakasz négyzetével.

Azoknak a pontoknak a halmaza (mértani helye), amelyeknek két körre vonatkozó hatványa egyenlő, a két kör hatványvonala, ez a centrálisukra merőleges egyenes; metsző köröknél a közös húregyenes, érintkező köröknél a közös érintőegyenes. A hatványvonal tartalmazza azokat a pontokat, amelyekből a két körhöz egyenlő érintő húzható.

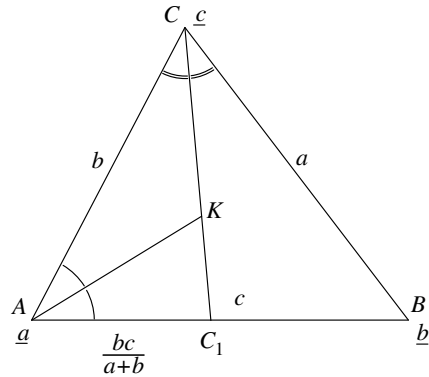
Három kör páronként vett hatványvonalai vagy párhuzamosak, vagy pedig egy ponton mennek át, az utóbbi esetben ez a közös pont e három kör hatványpontja.

- [7] *A beírt kör középpontjának helyvektora.* Az ABC háromszög csúcsainak helyvektorai legyenek rendre \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} . Mivel a C -hez tartozó szögfelező az AB oldalt olyan C_1 pontban metszi, amely AB -t $b : a$ arányban osztja, C_1 helyvektora (7.1. ábra)

$$\frac{a\mathbf{a} + b\mathbf{b}}{a + b}.$$

Az A -ból induló szögfelező a CC_1 szakaszt a beírt kör K pontjában metszi, és CC_1 -et $b : \frac{bc}{a+b} = 1 : \frac{c}{a+b}$ arányban osztja, K helyvektora, a

$$\mathbf{k} = \frac{\frac{c}{a+b} \cdot \mathbf{c} + \frac{a\mathbf{a} + b\mathbf{b}}{a+b}}{1 + \frac{c}{a+b}} = \frac{a\mathbf{a} + b\mathbf{b} + c\mathbf{c}}{a + b + c}.$$



7.1. ábra

- [8] *A háromszög köré írt körének, ill. beírt körének a sugara.* E sugarak kifejezésére a háromszög oldalai, ill. szögei segítségével számos formula ismeretes; felsoroljuk a legtöbbet használtakat. A beírt kör sugarát r , a köré írt körét R , a területet t , az oldalakat, ill. szögeket a , b , c , ill. α , β , γ , a kerület felét s jelöli.

$$R = \frac{abc}{4t} = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{b}{2 \sin \beta} = \frac{c}{2 \sin \gamma},$$

$$R^2 = \frac{2t}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma}$$

$$r = \frac{t}{s} = 4R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2},$$

$$r^2 = t \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}.$$

- [9] *Poncelet-féle záródási tétel* Ld. [5].

- [10] *A gömböt meghatározó érintkező körök.* Két, nem egysíkú kört érintkezőnek mondunk, ha egy közös pontjuk van, és ebben a pontban közös az érintőjük. Egy kör tengelyén a középpontjában síkjára állított merőleges egyenest értjük. A tengely tartalmazza a kör pontjaitól egyenlő távolságra lévő pontokat.

Ha a k_1 és k_2 körök érintkezési pontja E_{12} , E_{12} -ben a közös érintőre állított merőleges sík tartalmazza a körök tengelyeit, a tengelyek közös O pontja mindkét kör pontjaiból OE_{12} távolságra van, ezért a k_1 és k_2 rajta van az O középpontú OE_{12} sugarú gömbön.

Legyen most k_1, k_2, k_3 három nem egysíkú kör, amelyek páronként érintik egymást; érintkezési pontjaik rendre E_{12}, E_{13}, E_{23} . Legyen továbbá k_1 és k_2 közös gömbje G . Mivel egy kör és egy rajta kívüli pont egyértelműen meghatároznak egy gömböt, a k_1 kör és az E_{23} pont a G -t határozzák meg, ezért k_1 és k_3 érintkező körök közös gömbje G . Ez azt jelenti, hogy ha három kör páronként érinti egymást, de nem egysíkúak, akkor egy gömbön vannak.

- [11] *Egyenlőoldali tetraéder* az olyan tetraéder, amelynek minden lapja egybevágó. Az egyenlőoldali tetraéder lapjai hegyesszögű háromszögek; viszont minden hegyesszögű háromszög lehet egyenlőoldali tetraéder lapja.

Az egyenlőoldali tetraéder szemközti élei szükségképpen egyenlők, ezért bennfoglaló paralelepipedonja téglatest. Nevezetes pontjai: a beírt és a körülírt gömb középpontja, súlypontja egybeesnek; megfordítva: ha egy tetraédernél az előbbi nevezetes pontok közül kettő egybeesik, akkor egyenlőoldali. Csak egyenlőoldali tetraéderekre igaz, hogy négy lapjuk egyenlő területű.

- [12] *A koszinusz-egyenlőtlenség.* A háromszögek körében alapvető egyenlőtlenség, számos más egyenlőtlenség közös forrása; azt mondja ki, hogy

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2},$$

és egyenlőség csakis szabályos háromszög esetében áll fenn.

Bizonyítására válasszuk origónak a beírt kör középpontját, ennek sugarát egységnyiinek, és az érintkezési pontokba mutató egységvektorok legyenek rendre $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$. Ábránk (12.1. ábra) jelöléseit használva ekkor

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z})^2 = 3 + 2\mathbf{xy} + 2\mathbf{yz} + 2\mathbf{zx} = \\ &= 3 + 2(\cos(\pi - \gamma) + \cos(\pi - \alpha) + \cos(\pi - \beta)) = 3 - 2(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma), \end{aligned}$$

amiből

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2},$$

és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{0}$, tehát pl. $1 = \mathbf{x}^2 = (-\mathbf{y} - \mathbf{z})^2 = 2 + 2\cos(\pi - \alpha)$, $\cos(\pi - \alpha) = -\frac{1}{2}$, $180^\circ - \alpha = 120^\circ$; ez azt jelenti, hogy $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ páronként 120° -os szöget zárnak be egymással, azaz a háromszög szabályos.

- [13] *Ramsey-tétel.* Ha egy n csúcsú teljes gráf éleit kékre vagy pirosra színezzük, egyszínű élekkel rendelkező teljes részgráf létezéséről szól Ramsey tétele.

Minden pozitív egészekből álló (k, p) számpárhoz létezik olyan $R(k, p)$ pozitív egész, amelyre teljesül, hogy ha egy $n \geq R(k, p)$ csúcsú teljes gráf éleit pirosra vagy kékre színezzük, akkor vagy van k csúcsú kék, vagy p csúcsú piros teljes részgráfja; de ha $n < R(k, p)$, akkor egy n csúcsú teljes részgráf éleit még ki lehet színezni a két színnel úgy, hogy ez ne teljesüljön.

Az $R(k, p)$ ún. Ramsey-számok meghatározása nem könnyű feladat, értékük becslésére több formula ismeretes.

- [14] *Egysíkú pontok helyvektorai.* Legyenek \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{d} tetszőleges origóból kiinduló vektorok. Ha \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} nem egysíkú vektorok, akkor \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{d} végpontjai akkor és csakis akkor vannak egy síkban, ha van olyan α , β , γ valós szám, hogy

$$(1) \quad \mathbf{d} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c}, \quad \alpha + \beta + \gamma = 1.$$

Ha ui. végpontjaik egy síkon vannak, $\mathbf{a} - \mathbf{d}$, $\mathbf{b} - \mathbf{d}$, $\mathbf{c} - \mathbf{d}$ egysíkú vektorok, és akkor létezik olyan λ , μ , ν valós számhármass, amelyek nem mindegyike nulla és

$$\lambda(\mathbf{a} - \mathbf{d}) + \mu(\mathbf{b} - \mathbf{d}) + \nu(\mathbf{c} - \mathbf{d}) = \mathbf{0}$$

teljesül, ebből

$$(\lambda + \mu + \nu)\mathbf{d} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + \nu \mathbf{c}.$$

Itt $\lambda + \mu + \nu \neq 0$, mert ez azt jelentené, hogy \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} egysíkúak, ezért

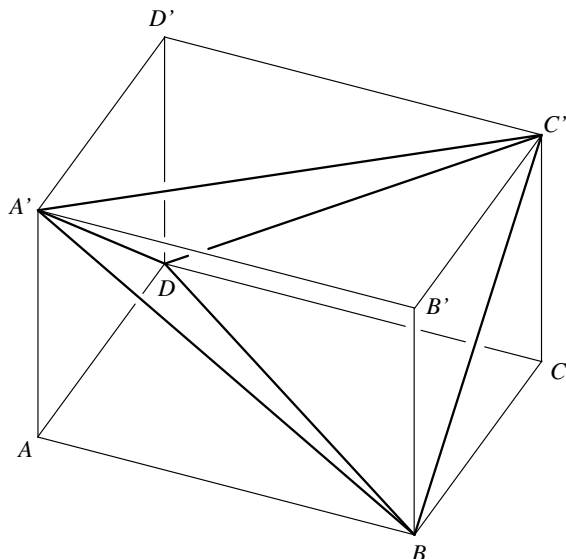
$$\alpha = \frac{\lambda}{\lambda + \mu + \nu}, \quad \beta = \frac{\mu}{\lambda + \mu + \nu}, \quad \gamma = \frac{\nu}{\lambda + \mu + \nu}$$

választással éppen (1)-et kapjuk.

A lépések megfordíthatók.

- [15] *Bennfoglaló paralelepipedon.*

Ha egy paralelepipedon két párhuzamos lapján egy-egy (egymással nem párhuzamos) átló végpontjait kiválasztjuk, egy tetraéder négy csúcsát kapjuk. Ennek a tetraédernek az élei a paralelepipedon lapátlói, szemköztes élei szemköztes paralelepipedon lapokon helyezkednek el. Ez a paralelepipedon a tetraéder bennfoglaló paralelepipedonja (15.1. ábra).



15.1. ábra

Minden tetraéderhez egyértelműen hozzátartozik egy bennfoglaló paralelepipedon: illesszük ui. a tetraéder minden élére a szemközti éllel párhuzamos síkot; az így kapott hat sík éppen a tetraéder bennfoglaló paralelepipedonját zárja közre.

A tetraéder számos tulajdonsága egyszerűen magyarázható a bennfoglaló paralelepipedon segítségével. A tetraéder súlypontja a paralelepipedon középpontjával esik egybe. Az egyenlő oldalú tetraéder bennfoglaló paralelepipedonja téglalatest, mivel a tetraéder szemközti élei, tehát a paralelepipedon egy-egy lapjának az átlói egyenlők.

- [16] *Héron képletének különböző alakjai.* A háromszög területét az oldalak segítségével előállító Héron-képletet különböző alakban szokásos felhasználni:

$$\begin{aligned} t^2 &= s(s-a)(s-b)(s-c) = \frac{1}{16}(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) = \\ &= \frac{1}{16} \left[(a+b)^2 - c^2 \right] \left[c^2 - (a-b)^2 \right] = \frac{1}{16} (2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4) = \\ &= \frac{1}{16} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

- [17] *Egyenlőoldali tetraéder nevezetes pontjai* Ld. [11].

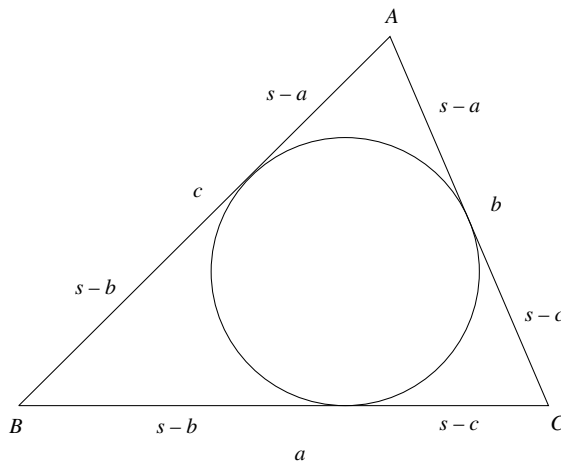
- [18] *Konvex burok.* Egy alakzat (penthalmaz) konvex burkának azt a konvex alakzatot nevezzük, amelyet az alakzatot tartalmazó minden konvex alakzat tartalmaz. Ilyen értelemben egy alakzat konvex burka az alakzatot tartalmazó „legkisebb” konvex tartomány.

Véges síkbeli pontrendszer (pl. egy sokszög csúcsai) konvex burkáról szemléletes képet nyerünk, ha úgy képzeljük, hogy a síkba minden pontba egy tűt szúrunk, és e köré gumiszalagot feszítünk ki; a szalag által határolt tartomány a konvex burok.

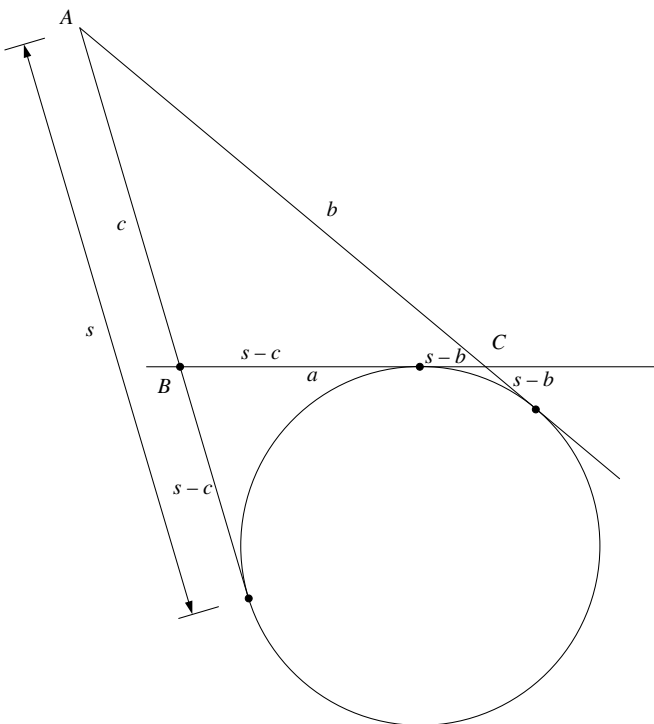
Síkbeli (térbeli) alakzat konvex burka az alakzatot lefedő félsíkok (félterek) közös részeként is értelmezhető.

- [19] *A háromszög érintőszakaszai.* Elemi megfontolásokban gyakran használjuk fel, hogy a háromszög oldalegyenesét érintő körök érintési pontjai olyan szakaszokat hoznak létre, amelyek hossza a háromszög oldalainak a hosszával egyszerűen kifejezhető. Meghatározásuknak az az alapja, hogy egy külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők. Az érintőszakaszok hosszának áttekintése a 19.1 és 19.2. ábrán látható.

- [20] *Magasságpontos (ortocentrikus) tetraéder.* A tetraéder csúcsaiból a szemközti lapokra állított merőleges egyenesek a tetraéder magasságvonalai (magasságegyenesei). Ha ezek egy ponton mennek át, a pontot magasságpontnak, a tetraédert magasságpontosnak (ortocentrikusnak) nevezzük.



19.1. ábra



19.2. ábra

A magasságpontos tetraéder jellemző tulajdonságai:

- a) a szemközti élei merőlegesek;
- b) a szemközti élek négyzetösszege mindhárom élpárra egyenlő;
- c) bennfoglaltó paralelepipedonjának a lapjai rombuszok (ún. romboéder);

d) súlypontja, magasságpontja és köré írt gömbjének középpontja egy egyenesen van (Euler-egyenes).

Az a), b), c) feltételek a magasságpontosságnak elégséges feltétele is; sőt, már az is elégséges, ha az a), b) feltételek két szemközti élpárra teljesülnek.

[21] *Euler-féle $\varphi(m)$ függvény; az Euler-féle kongruencia-tétel.* Az m -nél nem nagyobb olyan nemnegatív egészek számát, amelyek m -hez relatív prímek $\varphi(m)$ -mel jelöljük és Euler-féle $\varphi(m)$ függvénynek nevezzük. A $\varphi(m)$ függvény néhány fontos tulajdonsága:

1. $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$, ha a pozitív egész és $(a, m) = 1$. Ez az Euler-féle kongruencia-tétel.

2. Ha $(a, b) = 1$, $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.

3. Ha m prímtényezős fölbontása: $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$,

$$\varphi(m) = m \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) \quad \text{és } \varphi(1) = 1.$$

[22] *Cauchy-féle egyenlőtlenség.* Legyenek (a_1, a_2, \dots, a_n) , (b_1, b_2, \dots, b_n) valós szám n -esek („ n -dimenziós vektorok”); ezekre teljesül az

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

egyenlőtlenség. Ezt gyakran

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}$$

alakban alkalmazzuk. Ha a b_i -k nem mind nullák, egyenlőség akkor és csakis akkor teljesül, ha van olyan $\lambda \neq 0$ valós szám, hogy $a_i = \lambda b_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Legegyszerűbb bizonyítása azon alapul, hogy ha a b_i -k nem mind nullák,

$$(a_1 - \lambda b_1)^2 + (a_2 - \lambda b_2)^2 + \dots + (a_n - \lambda b_n)^2 = 0$$

λ -ra nézve másodfokú egyenletnek csak akkor lehet megoldása, ha $a_i = \lambda b_i$ (minden i -re), tehát legfeljebb egy megoldása lehet, ezért diszkriminánsa nem pozitív, ami éppen az egyenlőtlenség teljesülését jelenti. Ha a b_i -k mind nullák, az állítás nyilvánvaló.

[23] *A csoport fogalma.* Az egyik leggyakrabban használt algebrai struktúra. Az elemek egy halmaza csoportot alkot, ha közöttük értelmezve van egy ún. csoportművelet, amely a csoport tetszőleges két, meghatározott sorrendben vett eleméhez egyértelműen hozzárendel egy csoportelemet. Ezt a hozzárendelést szokás szorzásnak nevezni, és a számok körében alkalmazott szorzási módon jelölni; ha pl. a, b két csoportelem, szorzatuk: ab . A csoportművelet rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

1. ha a, b, c csoportelemek, $(ab)c = a(bc)$ (asszociativitás);

2. létezik olyan e csoportelem (ún. egységelem), amelyre tetszőleges a csoportelemmel

$$ea = ae = a$$

teljesül (e a csoport egységeleme);

3. tetszőleges a csoportelemhez létezik olyan a^{-1} -gyel jelölt csoportelem (ún. inverzelem), amelyre

$$aa^{-1} = a^{-1}a = e.$$

Ha bármely két a, b csoportelemre $ab = ba$, akkor a csoport kommutatív (ún. Abel-féle csoport), ezeknél a csoportműveletet szokás összeadásnak is nevezni és jelölni.

Példák csoportokra.

1. Az egész számok halmaza. Csoportművelet az összeadás, egységelem a 0, minden elemnek az ellentettje az inverze.

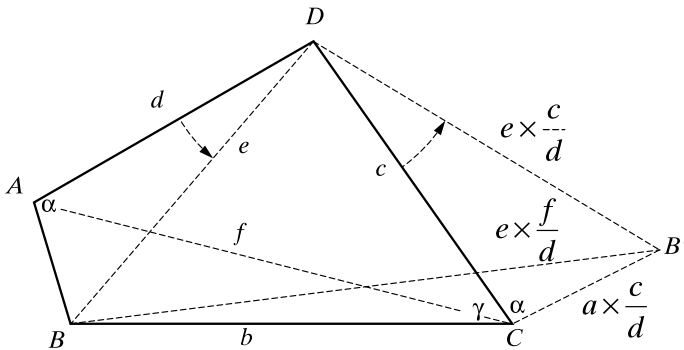
2. A valós számok halmaza a nulla kivételével. Csoportművelet a szorzás, egységelem az 1, minden elemnek a reciproka az inverze.

3. Egy szabályos hatszöget középpontja körüli önmagába átvivő elforgatások (véges csoport). Csoportműveletek: két elforgatás egymásutánja. Egységelem: a 0° -os elforgatás (azonosság). Az α szögű elforgatás inverze a $-\alpha$ -szögű elforgatás.

[24] *Ptolemaios tétele.* Általánosított formában így hangzik: ha egy konvex négyszög szemközti oldalai a, c , ill. b, d , átlói e, f , akkor

$$ac + bd \geq ef,$$

egyenlőség akkor és csakis akkor teljesülhet, ha a négyszög húrnégyszög. Bizonyításához használjuk a 24.1. ábra jelöléseit.



24.1. ábra

Alkalmazzunk a DAB háromszögre olyan D körüli forgatványújtást, amely a DCB' háromszögbe viszi át, ennek aránya $\frac{c}{d}$, s ezért $DB' = \frac{ec}{d}$, $CB' = \frac{ac}{d}$. Az ADC és BDB' háromszögek hasonlóak, mert megegyeznek D -nél levő szögükben és a szöget közrefogó oldalaik arányában; a hasonlóság aránya $\frac{e}{d}$, ezért $BB' = \frac{f \cdot e}{d}$.

A háromszögegyenlőtlenséget a BCB' háromszögre alkalmazva kapjuk, hogy

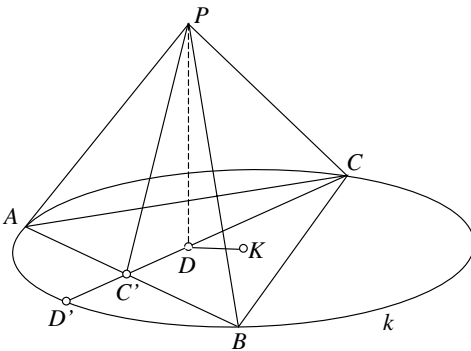
$$b + \frac{ac}{d} \geq \frac{ef}{d}, \quad \text{azaz} \quad ac + bd \geq ef,$$

és egyenlőség akkor és csakis akkor teljesül, ha C a BB' szakaszon van, azaz $\alpha + \gamma = 180^\circ$, tehát a négyszög húrnégyszög.

[25] *Egyenlő oldalú kúpok.* Egy körkúpot egyenlő oldalúnak nevezünk, ha van három, páronként egymásra merőleges alkotója.

Bebizonyítjuk a következő tételt:

Ha egy körkúpnak van három olyan alkotója, amelyek páronként merőlegesek egymásra, akkor végtelen sok van, sőt a kúp minden alkotója eleme ilyen alkotóhármassnak.



25.1. ábra

Jelöljük a kúp csúcsát P -vel, alapkörét k -val és a feltételek szerint létező, páronként merőleges alkotókból álló hármas legyen PA , PB , PC ; P vetülete k síkján D (25.1. ábra). Könnyen bizonyítható, hogy az ABC háromszög hegyesszögű. Először megmutatjuk, hogy D az ABC háromszög magasságpontja. Ehhez elegendő belátnunk, hogy D -t a háromszög tetszőleges csúcsával összekötő egyenes merőleges a szemközti háromszögoldalra. Válasszuk ki pl. a

C csúcsot! Az AB oldal merőleges PC -re, mert PC merőleges az ABP síkra (merőleges két metsző egyenesére), tehát akkor minden egyenesére. AB merőleges PD -re is, mert PD merőleges k síkjára, s így minden egyenesére is. Ennélfogva AB merőleges a PDC sík két metsző egyenesére, s így minden egyenesére, tehát CD -re is, CD ezért valóban magasságvonal.

Messe a CD egyenes AB -t C' -ben, a k kört pedig másodszor a D' pontban! Ismeretes, hogy $DC' = C'D'$, mert a háromszög magasságpontjának az oldalakra vonatkozó tükröke a háromszög köré írt körön van. A $C'PC$ derékszögű háromszögben $PD = m$ az átfogóhoz tartozó magasság, ezért (mértani közép-tétel):

$$(1) \quad PD^2 = m^2 = C'D \cdot DC = \frac{1}{2} D'D \cdot DC.$$

A $DD' \cdot DC$ szorzat a kör belső D pontján átmenő húrok metszeteinek a szorzata, ezért a D pont körre vonatkozó hatványa. (Ha a kör sugara r , D -nek a k körre vonatkozó hatványa $r^2 - d^2$, ahol d a kör K középpontjának D -től mért távolsága.) A $DD' \cdot DC$ szorzat értéke ezért független a C választásától.

Válasszunk most ki a körön egy tetszőleges C_1 pontot, C_1D messe a kört D_1 -ben, DD_1 felezőmerőlegese pedig az A_1 és B_1 pontokban, DD_1 felező-pontja legyen C'_1 ! Megmutatjuk, hogy a PA_1 , PB_1 , PC_1 szakaszok páronként merőlegesek egymásra. Mivel (1) alapján

$$C'D \cdot DC = C_1D \cdot DC_1,$$

$$PD^2 = C'_1D \cdot DC_1,$$

ezért a C'_1PC_1 háromszög derékszögű (a felhasznált mértani közép-tétel megfordítható). Minthogy A_1B_1 merőleges C_1D -re és PD -re, merőleges síkjukra, és így PC_1 -re is, és mivel PC_1 a PC'_1 -re is merőleges, szükségképpen merőleges ezek síkjában fekvő PA_1 -re és PB_1 -re is.

Most már csak azt kell megmutatnunk, hogy PA_1 és PB_1 is merőlegesek egymásra. Ehhez vegyük először figyelembe, hogy D az $A_1B_1C_1$ háromszögnek is magasságpontja, hiszen a C_1 -ből induló magasságvonalon csak egyetlen pont, a magasságpont tükörképe van a köré írt körön, és A_1B_1 szerkesztése miatt ez itt valóban teljesül. Most megismételve az előbbi gondolatmenetet kapjuk, hogy (C_1 helyett A_1 -ből indulva ki) PA_1 merőleges PC_1 -re és PB_1 -re. Ezzel megmutattuk, hogy a kúp tetszőleges alkotója részt vesz egy páronként merőleges alkotóhármásban.

A fenti tulajdonságú kúpokat egyenlő oldalú kúpoknak nevezzük. Bizonyításunkból kitűnik, hogy ha adott egy k kör és a kör síkjától m távolságra egy P pont, amelynek a kör síkján levő vetülete D , P akkor és csakis akkor csúcsa egy k alapkörű egyenlő oldalú kúpnak, ha PD^2 fele a D pont körre vonatkozó hatványának.

Ahhoz, hogy belássuk, hogy az 1978/2. feladatban egy Q pontot valóban végtelen sok téglatest P -vel szemközti csúcsaként kaphatunk meg, meg kell mutatnunk, hogy egy rögzített P pont és k kör esetén a \overrightarrow{PA} , \overrightarrow{PB} , \overrightarrow{PC} az összes megengedett helyzetben olyan téglatest élvektorai, amelynek P -vel szemközti csúcsa Q . Ehhez elegendő belátnunk, hogy a $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$ összeg állandó.

Legyen a k kör K középpontjából D -be mutató vektor \mathbf{d} (ez nyilván állandó),

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} &= 3\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \\ &= 3\overrightarrow{PD} + (\overrightarrow{KA} - \mathbf{d}) + (\overrightarrow{KB} - \mathbf{d}) + (\overrightarrow{KC} - \mathbf{d}) = \\ &= 3\overrightarrow{PD} - 3\mathbf{d} + (\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}).\end{aligned}$$

Ismeretes, hogy a háromszög köré írt kör középpontjából a csúcsokba mutató vektorok eredője a magasságpontba mutat, ezért $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \mathbf{d}$, ezért

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 3\overrightarrow{PD} - 2\mathbf{d},$$

és ez valóban független az A , B , C pontoktól.

[26] *A pozitív egészek egy előállítási módjáról.* Az 1978/3. feladatban a következő segédtevélt használtuk fel: ha α és β olyan pozitív irracionális számok, amelyekre $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ teljesül, akkor az

$$\{[n\alpha]\}, \quad [\{n\beta\}] \quad n = 1, 2, \dots$$

sorozatoknak nincs közös elemük, és együttesen előállítanak minden pozitív egész számot.

Ennek bizonyítására figyeljük meg, hogy szükségképpen α és β nagyobb 1-nél, és ezért az $[n\alpha]$, $[n\beta]$ sorozatok szigorúan monoton nőnek. Megmutatjuk, hogy ha N tetszőleges pozitív egész, akkor található olyan k pozitív egész, hogy $[k\alpha] = N$, vagy pedig olyan m pozitív egész, hogy $[m\beta] = N$ legyen, de a két állítás egyidejűleg nem teljesülhet. Legyenek k és m azok az egyértelműen meghatározott pozitív egészek, amelyekre

$$[(k-1)\alpha] < N \leq [k\alpha],$$

$$[(m-1)\beta] < N \leq [m\beta]$$

fennáll. k és m ilyen választásából következik, hogy

$$k\alpha - \alpha < N < k\alpha,$$

$$m\beta - \beta < N < m\beta.$$

Vonjunk ki az egyenlőtlenség minden oldalából N -et:

$$(k\alpha - N) - \alpha < 0 < k\alpha - N,$$

$$(m\beta - N) < 0 < m\beta - N.$$

Ezek a $d = k\alpha - N$, $d' = m\beta - N$ jelölésekkel a

$$(1) \quad 0 < d < \alpha, \quad 0 < d' < \beta, \quad \text{azaz} \quad 0 < \frac{d}{\alpha} < 1, \quad 0 < \frac{d'}{\beta} < 1$$

egyenlőtlenségekbe mennek át. Mivel $k = \frac{N}{\alpha} + \frac{d}{\alpha}$, $m = \frac{N}{\beta} + \frac{d'}{\beta}$, (1)-ből

$$k + m = N \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) + \frac{d}{\alpha} + \frac{d'}{\beta} = N + \frac{d}{\alpha} + \frac{d'}{\beta},$$

azaz

$$(2) \quad \frac{d}{\alpha} + \frac{d'}{\beta} = k + m - N$$

következik. (1) miatt azonban

$$0 < k + m - N < 2.$$

Mínt hogy k , m , N pozitív egészek, ez azt jelenti, hogy

$$k + m - N = 1.$$

(2)-re tekintettel ez azt jelenti, hogy

$$\frac{d}{\alpha} + \frac{d'}{\beta} = 1 = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta},$$

vagyis $\alpha(d' - 1) = (1 - d)\beta$.

Mivel α és β pozitív és d irracionális, ez csak úgy állhat fenn, ha d és d' közül az egyik kisebb, a másik nagyobb 1-nél. Ha pl. $d < 1$, $d' > 1$, akkor d , ill. d' definíciójából

$$\begin{aligned}\alpha k &= N + d, & [\alpha k] &= N, \\ \beta m &= N + d' & [\beta m] &> N,\end{aligned}$$

tehát N az $[\alpha k]$, $[\beta m]$ alakú egészek közül az egyikbe és csakis az egyikbe tartozik bele. Hasonló a helyzet, ha $d > 1$ és $d' < 1$.

[27] *A rekurziós sorozatok tagjainak explicit előállítása.* Gyakran van szükségünk arra, hogy a rekurzióval adott sorozatok n -edik elemét n függvényeként adjuk meg. Feladatainkban ennek az igénye az

$$(1) \quad a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

típusú rekurziónál merült fel, ahol a_1 és a_2 adottak.

Az eljárásnak az a lényege, hogy az (1) feltételt kielégítő mértani sorozatokat határozzunk meg, és a kívánt sorozatot a két mértani sorozat megfelelő tagjainak a lineáris kombinációival állítjuk elő. Az eljárás végeredményét közöljük. Az (1) alatti sorozathoz tartozó

$$x^2 - c_1 x - c_2 = 0$$

másodfokú egyenletet az (1) sorozat *karakterisztikus egyenletének* nevezzük. Legyenek ennek (valós vagy komplex) gyökei x_1 és x_2 .

Tegyük fel először, hogy $x_1 \neq x_2$. Ebben az esetben a sorozat n -edik tagjának az előállítása:

$$(2) \quad a_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n,$$

ahol λ és μ a kezdő tagoktól függő állandók; ezek értékét a

$$(3) \quad \begin{aligned}\lambda x_1 + \mu x_2 &= a_1, \\ \lambda x_1^2 + \mu x_2^2 &= a_2\end{aligned}$$

egyenletek megoldásaként kapjuk.

Ha $x_1 = x_2$, akkor az n -edik tag előállítása (az $x_1 = x_2 = x_0$ jelöléssel)

$$a_n = \lambda x_0^2 + \mu n x_0^{n-1}.$$

A λ és μ értékét most a

$$\lambda x_0 + \mu = a_1,$$

$$\lambda x_0^2 + 2\mu x_0 = a_2$$

egyenletrendszer megoldásával kaphatjuk meg.

A megoldás módszere nagy mértékben általánosítható. Legyen az $\{a_i\}$ sorozat az

$$(4) \quad a_{n+k} = c_1 a_{n+k+1} + c_2 a_{n+k+2} + \dots + c_k a_n$$

állandó együtthatós rekurzív definícióval adva, ahol a c_i -k állandók, és az a_1, a_2, \dots, a_k kezdőértékek adottak. A rekurzióhoz tartozó karakterisztikus egyenlet

most

$$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \dots - c_k = 0.$$

Ha ennek (valós vagy komplex) gyökei: x_1, x_2, \dots, x_k különbözők, akkor $\{a_i\}$ tagjainak előállítás

$$(5) \quad a_n = \lambda_1 x_1^{n-1} + \lambda_2 x_2^{n-1} + \dots + \lambda_n x_k^{n-1}$$

alakú, ahol $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ együtthatók a kezdő értékek segítségével határozhatók meg.

Ha a karakterisztikus egyenletnek többszörös gyökei is vannak, ez az előállítás akkor is lehetséges, de a másodfokú karakterisztikus egyenlethez hasonlóan, valamivel bonyolultabb.

[28] *Két összefüggés a binomiális együtthatók között.*

$$A) \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1};$$

$$B) \quad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \dots + \binom{k}{k}.$$

Az A) egyszerűen bizonyítható az $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ felhasználásával:

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \\ &= \frac{(n-1)!(n-k+k)}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

A B) bizonyításához felhasználjuk A)-t:

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{k+1} &= \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}, \\ \binom{n}{k+1} &= \binom{n-1}{k+1} + \binom{n-1}{k}, \\ \binom{n-1}{k+1} &= \binom{n-2}{k+1} + \binom{n-2}{k}, \\ &\vdots \\ \binom{n-(n-k-2)}{k+1} &= \binom{k+2}{k+1} = \binom{k+1}{k+1} + \binom{k+1}{k}. \end{aligned}$$

Az azonos oldalon levő tagokat összeadjuk, és figyelembe véve, hogy $\binom{k+1}{k+1} = \binom{k}{k}$, rendezés után éppen a bizonyítandót kapjuk.

[29] *Menelaosz tétele.* Legyenek C_1, A_1, B_1 rendre az ABC háromszög AB, BC, CA oldalegyenesének egy-egy pontja. Az A_1, B_1, C_1 pontok akkor és csakis akkor vannak egy egyenesen, ha

$$(1) \quad \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = -1.$$

A bal oldali törteket pozitívnak tekinthetjük, ha pl. az $\overrightarrow{AC_1}$ és $\overrightarrow{C_1B}$ vektorok egyirányúak, ellenkező esetben negatívnak.

Megjegyezzük, hogy ha nem irányított szakaszokban gondolkodunk, akkor (1) jobb oldalán 1 áll, ebben az esetben (1) csak szükséges feltétele A_1, B_1, C_1 egy egyenesen fekvésének.

[30] *Maradékosztályok, kongruenciák.* Ha $m > 0$ egész, az a és b egészekről azt mondjuk, hogy egy maradékosztályba tartoznak „ m -re nézve” (vagy: „az m modulusra nézve”, vagy „modulo m ”, rövidítve: „mod m ”), ha az m -mel való osztási maradékaik egyenlők. Mivel a lehetséges maradékok: $0, 1, 2, \dots, m-1$, m -re nézve m maradékosztály létezik, és minden egész eleme valamelyik maradékosztálynak, minden egész szám képviselője (reprezentánsa) egy-egy maradékosztálynak.

Két egész szám akkor és csakis akkor tartozik egy maradékosztályba mod m , ha különbségük osztható m -mel.

m darab egész szám ún. *teljes maradékrendszert* alkot mod m , ha mindegyikük más maradékosztályba tartozik, tehát az m szám minden maradékosztályt képvisel.

Az a és b egészek egy maradékosztályba tartozását a következő módon jelöljük:

$$a \equiv b \pmod{p} \quad \text{vagy} \quad a \equiv b \pmod{m},$$

(olv.: a kongruens b moduló m), és a fenti kapcsolatot kongruenciának nevezzük. A kongruenciák számos tulajdonsága a számok közötti egyenlőség tulajdonságaira emlékeztet; felsoroljuk a leggyakrabban előfordulókat (a mod m kikötést nem írjuk ki):

1. ha $a \equiv b$, akkor $b \equiv a$; $a \equiv a$ minden a egészre;
2. ha $a \equiv b, b \equiv c$, akkor $a \equiv c$;
3. ha $a \equiv b, c \equiv d$, akkor
 $a + c \equiv b + d, \quad a - c \equiv b - d, \quad ac \equiv bd, \quad a^n \equiv b^n, \quad (n \text{ pozitív egész});$
4. ha $ac \equiv bc$, akkor $a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$, ahol $d = (c, m)$.

- [31] *Blokkrendszerek.* A v elemű H halmazt blokkrendszernek nevezzük, ha H -ban úgy van b számú részhalmaz — ún. blokk — értelmezve, hogy minden blokk k elemet tartalmaz; H minden eleme r számú blokkban van benne, és H két különböző eleme pontosan λ számú blokkban van benne.

A v, b, k, r, λ számok a blokkrendszer *paraméterei*, amelyek nem függetlenek egymástól. (Értelemszerűen $2 \leq k < v$ és $\lambda > 0$). Rendeljünk hozzá a blokkrendszer elemeihez egy v sorú és b oszlopú mátrix sorait, oszlopaihoz a blokkjait; a mátrix egy eleme 1-es, ha a sorának megfelelő halmazelem benne van az oszlopának megfelelő blokkban, egyébként pedig 0. Ez az ún. illeszkedési mátrix, minden oszlopa k számú 1-est és minden sora r számú 1-est tartalmaz, ezért a mátrix 1-eseit soronként, ill. oszloponként összeszámlálva kapjuk, hogy

$$bk = vr.$$

Ugyanígy, bizonyos „illeszkedések” leszámolásával kapjuk, hogy

$$r(k-1) = \lambda(v-1).$$

A kombinatorika egy nehéz és általánosságban még megoldatlan problémája, hogy milyen paraméterekre léteznek blokkrendszerek. Pl. $v = b = p^{2\alpha} + p^\alpha + 1$, $\lambda = 1$, $k = r = p^\alpha + 1$, ahol p prímszám, α pozitív egész értékekre léteznek blokkrendszerek, ezek az ún. véges projektív síkok.

- [32] *A Fermat-féle kongruenciátétel (a „kis Fermat-tétel”).* Mivel egy tetszőleges p prímhez a p -nél kisebb, p -hez relatív egészek száma $p-1$, $\varphi(p) = p-1$, és így az Euler-féle kongruenciátétel szerint [21]

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}, \quad \text{ha } (a, p) = 1.$$

Ez a Fermat-féle kongruenciátétel. A kongruencia mindkét oldalát a -val szorozva kapjuk, hogy

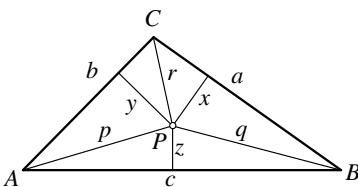
$$a^p \equiv a \pmod{p},$$

ez viszont akkor is fennáll, ha a és p nem relatív prímek, ti. ekkor p prím volta miatt p osztója a -nak.

- [33] *Erdős–Mordell egyenlőtlenség.* Legyen P a háromszöglemez egy pontja, távolsága a csúcsoktól p, q és r , az oldalaktól x, y és z . Ekkor teljesül a

$$p + q + r \geq 2(x + y + z)$$

egyenlőtlenség, és egyenlőség akkor és csakis akkor áll, ha P egy szabályos háromszög középpontja (Erdős–Mordell-egyenlőtlenség).



33.1. ábra

Tegyük fel, hogy p, q, r rendre az A, B, C csúcsoktól, x, y, z pedig a BC, CA, AB oldalaktól mért távolságok (33.1. ábra).

Először a következő segédteteleket bizonyítjuk be:

$$(1) \quad ap \geq bz + cy; \quad bq \geq cx + az; \quad cr \geq zy + bx.$$

Nilván elegendő ezek közül az elsőt igazolnunk. E célból tükrözzük a B , illetve C csúcsot az AP felezőjére; a tükröképek

C' , illetve B' (a P pont helyben marad). Az $A'B'C'$ háromszög oldalai most $AB' = c$, $B'C' = a$, $C'A = b$; P távolsága a $B'C'$, $C'A$, AB' oldalaktól rendre x' , y , z (33.2. ábra). Ha P a $B'C'$ -n van, $x' = 0$; ha az $A'B'C'$ háromszögön kívül, x' -t negatívnak vesszük.

Legyen az $AB'C'$ háromszög A -hoz tartozó magassága m_a ; ez nyilván nem hosszabb, mint az A -tól $B'C'$ egyeneshez P -n át vezető út, azaz $p + x'$. Tehát

$$(2) \quad m_a \leq p + x'.$$

Szorozzuk meg ennek mindkét oldalát a -val, majd vegyük figyelembe, hogy am_a és $ax' + bz + cy$ egyaránt az $AB'C'$ háromszögnek a kétszeres területe:

$$\begin{aligned} am_a &\leq ap + ax'; \\ ax' + bz + cy &\leq ap + ax', \end{aligned}$$

amiből már közvetlenül adódik a bizonyítandó $ap \geq bz + cy$; hasonló módon nyerhető (1) másik két egyenlőtlensége is. (A kapott összefüggések akkor is igazak, ha $x' \leq 0$.)

Alakítsuk most át (1) egyenlőtlenségeit a következő formába:

$$\begin{aligned} p &\geq \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}y; \\ q &\geq \frac{c}{b}x + \frac{a}{b}z; \\ r &\geq \frac{a}{c}y + \frac{b}{c}x. \end{aligned}$$

E három egyenlőtlenség összege:

$$(3) \quad p + q + r \geq \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right)x + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)y + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)z.$$

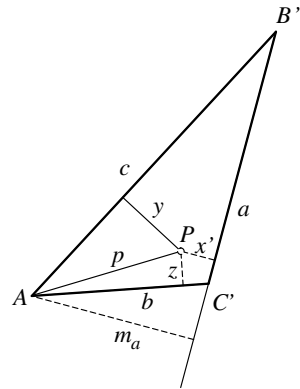
Mivel egy pozitív számnak és reciprokának összege legalább 2, ezért

$$p + q + r \geq 2(x + y + z).$$

Ahhoz, hogy egyenlőtlenségünkben az egyenlőség jele legyen érvényes, kell, hogy (2)-ben és (3)-ban is ez teljesüljön. (3)-ban ez akkor és csakis akkor teljesül, ha $a = b = c$; egy pozitív szám és reciproka ugyanis csakis akkor ad összegül 2-t, ha a szám 1; a háromszögnek tehát szabályosnak kell lennie.

Szabályos háromszög esetén viszont a bevezetésünkben szereplő ABC és $AB'C'$ háromszögek azonosak, így az AP és x' szakasz helyzete azonos az AP és x szakasz helyzetével, és m_a akkor és csakis akkor egyenlő $(p + x)$ -szel, ha P rajta van az A -ból induló magasságvonalon.

Ennek teljesülnie kell mind a három magasság esetében, s így P csakis a magasságvonalak metszéspontja, vagyis a szabályos háromszög középpontja lehet.



33.2. ábra

- [34] *Brocard-féle pontok.* Az ABC háromszög Brocard pontjainak nevezzük a Q_1 , ill. Q_2 pontokat, amelyekre

$$BAQ_1 \sphericalangle = CBA_1 \sphericalangle = ACQ_1 \sphericalangle, \quad \text{ill.} \quad ABQ_2 \sphericalangle = BCQ_2 \sphericalangle = CAQ_2 \sphericalangle.$$

A Q_1 , ill. Q_2 pontok szerkeszthetők; pl. Q_1 az A és B ponton átmenő és a BC egyenest érintő k_1 körnek és a B , C pontokon átmenő és az AC egyenest érintő k_2 körnek közös pontja. A fentebb Q_1 -gyel, ill. Q_2 -vel kapcsolatban értelmezett szögek egymás között is egyenlők, ezek ω mértékére a

$$\text{ctg } \omega = \text{ctg } \alpha + \text{ctg } \beta + \text{ctg } \gamma$$

összefüggés áll fenn (ez pl. a szinusz-tétel segítségével könnyen igazolható).

A Brocard-pontok nevezetes tulajdonsága, hogy a háromszög köré írt kör középpontján kívül csakis nekik van meg az a tulajdonságuk, hogy belőlük a háromszög oldalaegyeneseire emelt merőlegesek talppontjai a háromszöghöz hasonló háromszögnek a csúcsai. Ebből a tulajdonságból következik, hogy a háromszöget bármely Brocard-pont körül elforgatva az eredeti és az elforgatott megfelelő háromszögoldal-egyeneseinek metszéspontjai az ABC -hez hasonló háromszög csúcsai.

- [35] *Egyenlőtlenségek közös forrásáról.* Feladataink között többször szerepel egy alapegyenlőtlenség, ill. annak bizonyos formái, amelyből számos más egyenlőtlenség levezethető; ez a következő.

Legyenek a_1, a_2, \dots, a_n és b_1, b_2, \dots, b_n valós számok, és legyen a b_i -k egy permutációja $b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_n}$. Képezzük az

$$S = a_1 b_{i_1} + a_2 b_{i_2} + \dots + a_n b_{i_n}$$

összeget. Ez akkor a legnagyobb, ha az a_i -k és b_i -k azonos módon vannak rendezve, és akkor a legkisebb, ha ellentétes módon.

Legyen az a_i között a_r , a b_i -k között b_s a legnagyobb, és induljunk ki a

$$Q = a_1 b_1 + \dots + a_r b_r + \dots + a_s b_s + \dots + a_n b_n$$

összegeből. Cseréljen ebben helyet b_r és b_s , ha $r \neq s$, kapjuk:

$$Q' = a_1 b_1 + \dots + a_r b_s + \dots + a_s b_r + \dots + a_n b_n.$$

$$Q - Q' = a_r b_s + a_s b_r - a_r b_r - a_s b_s = (a_r - a_s)(b_s - b_r) \geq 0.$$

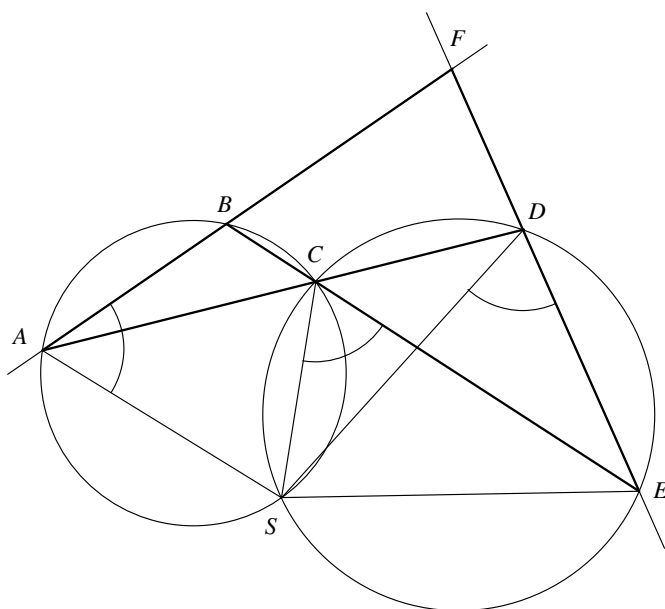
$Q' = Q$ csakis akkor áll fenn, ha $a_r = a_s$ vagy $b_r = b_s$, de ekkor a legnagyobb a_i máris a legnagyobb b_i -vel van összekapcsolva. Ilyen cserékkel elérhetjük, hogy mindkét sorozat azonos rendezettségű legyen, s közben a Q összeg nem csökken, hogy a maximum azonos rendezettség esetén lép fel. A legkisebb összegre vonatkozó állítás hasonlóan bizonyítható.

(Megjegyezzük, hogy a fenti egyenlőtlenség jelentőségére Szűcs Adolf mutatott rá egy érdekes cikkében, ezért néha tévesen a fenti tételt Szűcs Adolf egyenlőtlenségnek nevezik, holott Szűcs Adolf már az említett cikkben erre mint ismert tételre hivatkozik.)

- [36] *A négy kör tétele.* Ha négy egyenes közül bármely kettő különböző pontban metszi egymást, négy háromszög keletkezik. E négy háromszög köré írt köröknek van egy S közös pontja. (36.1. ábra.)

Legyen ui. ábránk jelöléseit használva az ABC és CDE körök közös pontja S . Elég megmutatnunk, hogy az ADF kör átmegy S -en, mert teljesen hasonló módon ez a BEF körre is igazolható. Mivel $\angle SDE = \angle SCE$ (kerületi szögek tétele) $= \angle SAF$ (húrnégyszögek tétele), az $ASDF$ négyszög húrnégyszög, és így az ADF kör valóban átmegy S -en.

A Simson-egyenesek tétele szerint S -ből a négy egyenesre állított merőlegek talppontjai egy egyenesen vannak. A parabolára vonatkozó ismert összefüggések szerint négy, fenti típusú egyenes egyértelműen meghatároz egy parabolát, amelynek e négy egyenes érintője, továbbá: a parabola fókuszából az érintőkre állított merőlegek talppontjai a csúcserintőn vannak; a parabola érintőháromszögének köréírt körei viszont átmennek a fókuszban. E tények figyelembe vételével az S pontot adott négy egyenes által meghatározott parabola fókuszának tekinthetjük.



36.1. ábra

- [37] *A sugáregyenlőtlenség.* A háromszög beírt körének átmérője legfeljebb akkora lehet, mint a köréírt kör sugara, azaz

$$R \geq 2r.$$

Ez közvetlenül következik az Euler-féle $d^2 = R^2 - 2Rr$ összefüggésből is (d a két kör középpontjának a távolsága), de számos bizonyítása ismeretes, és sok

háromszögre vonatkozó egyenlőtlenséggel, ill. összefüggéssel áll kapcsolatban, pl.:

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2},$$

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + \frac{r}{R},$$

$$(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \leq abc.$$

Az $R=2r$ egyenlőség csakis szabályos háromszögre teljesül.

- [38] *A húrok párhuzamosságának a feltétele.* A komplex számsík 0 pont körüli körének négy pontja: a, b, c, d . Az a -t a b -vel, ill. c -t a d -vel összekötő húr párhuzamosságának a feltétele:

$$ab = cd.$$

Tegyük fel, hogy a pontok pozitív körüljárási irányt követve ebben a sorrendben következnek: a, b, c, d . A két húr akkor és csakis akkor párhuzamos, ha a b, c ív egyenlő a d, a ívvel. Legyen az ezekhez az ívekhez tartozó középponti szög φ , és legyen $e = \cos \varphi + i \sin \varphi$; az e -vel való szorzás tehát φ -vel való elforgatást jelent.

$$be = c \quad \text{és} \quad de = a,$$

amiből

$$\frac{be}{de} = ca, \quad \frac{b}{d} = \frac{c}{a}, \quad \text{azaz} \quad ab = cd,$$

és a lépések megfordíthatók.

- [39] *Az n -dimenziós vektorokról.* Az (a_1, a_2, \dots, a_n) rendezett n valós számból álló szám- n -est n -dimenziós vektornak nevezzük, egyetlen vastag nyomású betűvel is szoktuk jelölni: $\mathbf{a}(a_1, a_2, \dots, a_n)$; az a_i számokat a vektor koordinátáinak mondjuk. A vektorok körében több műveletet értelmezhetünk, ezek közül számunkra fontosak:

Összeadás: $\mathbf{a}(a_1, a_2, \dots, a_n), \mathbf{b}(b_1, b_2, \dots, b_n)$ összege:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b}(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n).$$

Kivonás: $\mathbf{a} - \mathbf{b}(a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n)$.

Szorzás λ valós számmal: $\lambda \mathbf{a}(\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n)$.

Skaláris szorzás: $\mathbf{a}\mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$.

A legfontosabb műveleti tulajdonságok:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} &= \mathbf{b} + \mathbf{a}, & \mathbf{a}\mathbf{b} &= \mathbf{b}\mathbf{a}, & \lambda \mathbf{a} &= \mathbf{a}\lambda, & \lambda(\mu \mathbf{a}) &= (\lambda\mu)\mathbf{a} = \mu\lambda \mathbf{a}, \\ (\lambda + \mu)\mathbf{a} &= \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{a}, & \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}, & \lambda(\mathbf{a}\mathbf{b}) &= (\lambda \mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}(\lambda \mathbf{b}), \\ \mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= (\mathbf{b} + \mathbf{c})\mathbf{a} = \mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{a}\mathbf{c} & & & & & (\text{disztributív szabály}). \end{aligned}$$

Jelölés: $\frac{\mathbf{a}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{a}$. A $\mathbf{0}(0, 0, \dots, 0)$ -t nullvektornak mondjuk; további jelölés:

$$\mathbf{a}\mathbf{a} = \mathbf{a}^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2.$$

A disztributív szabály abban az esetben is igaz, ha mindkét szorzótényezőt többtagú; speciálisan:

$$(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_n)^2 = \mathbf{a}_1^2 + \mathbf{a}_2^2 + \dots + \mathbf{a}_n^2 + 2(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1\mathbf{a}_3 + \dots + \mathbf{a}_{n-1}\mathbf{a}_n).$$

A fenti összefüggések bizonyítása legegyszerűbben a koordináták részletes kiírásával történhet.

[40] *A súlyozott közepekről.* A különböző középértékek általánosításaként szokás bevezetni a súlyozott középértékeket (v. közepeket).

Legyenek a_1, a_2, \dots, a_k pozitív számok, és ezek mindegyikéhez egy pozitív számot, ún. súlyt rendelünk hozzá, a_i -hez az s_i súlyt. Ezeknek a számoknak a súlyozott számtani közepe:

$$A_s = \frac{s_1 a_1 + s_2 a_2 + \dots + s_n a_n}{s_1 + s_2 + \dots + s_n};$$

súlyozott mértani (geometriai) közepe:

$$G_s = \sqrt[s_1 + s_2 + \dots + s_n]{a_1^{s_1} a_2^{s_2} \dots a_n^{s_n}};$$

súlyozott harmonikus közepe:

$$H_s = \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{\frac{s_1}{a_1} + \frac{s_2}{a_2} + \dots + \frac{s_n}{a_n}},$$

súlyozott négyzetes közepe:

$$Q_s = \sqrt{\frac{s_1 a_1^2 + s_2 a_2^2 + \dots + s_n a_n^2}{s_1 + s_2 + \dots + s_n}}.$$

Ezek között is fennállnak a közönséges közepek között jól ismert egyenlőtlenségek:

$$H_s \leq G_s \leq A_s \leq Q_s.$$

Ennek a bizonyítása a következő séma szerint történhet: ha az s_i -k egész számok, a súlyozott közepek lényegében azonosak a közönséges közepekkel, csupán úgy kell tekintenünk, hogy a_i -ből s_i darab van, tehát az egyenlőtlenségek fennállnak. Egész súlyokra vezethetjük vissza egyenlőtlenségeinket abban az esetben is, ha az s_i súlyok racionálisak, erre egy egyszerű példát mutatunk be az $A_s \geq G_s$ egyenlőtlenségre kétváltozós esetben; legyenek a súlyok $s_1 = \frac{p_1}{q_1}$,

$$s_2 = \frac{p_2}{q_2} \quad (p_i, q_i \text{ egész}).$$

$$\begin{aligned} A_s &= \frac{\frac{p_1}{q_1} a_1 + \frac{p_2}{q_2} a_2}{\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}} = \frac{p_1 q_2 a_1 + p_2 q_1 a_2}{p_1 q_2 + p_2 q_1} \geq \sqrt[p_1 q_2 + p_2 q_1]{a_1^{p_1 q_2} \cdot a_2^{p_2 q_1}} = \\ &= \sqrt[p_1 + p_2]{a_1^{\frac{p_1}{q_1}} \cdot a_2^{\frac{p_2}{q_2}}} = G_s. \end{aligned}$$

Ha viszont az s_i -k között irracionális van, akkor a bizonyításban folytonossági megfontolásokat alkalmazhatunk felhasználva azt, hogy a közepek a bennük

lévő súlyok folytonos függvényei, és bármely irracionális szám tetszőleges kicsiny környezetében van racionális szám. (A legtöbb esetben a folytonossági megfontolások is kiküszöbölhetők.)

[41] *Ceva tételének trigonometriai alakja és egy alkalmazása.* Ha az ABC háromszög α , β , γ szögét az a' , ill. b' , ill. c' egyenesek α_1 és α_2 , ill. β_1 és β_2 , ill. γ_1 és γ_2 részekre osztják (a 41.1. ábrán látható módon), akkor a' , b' , c' egyenesek akkor és csakis akkor mennek át egy ponton, ha

$$(1) \quad \frac{\sin \alpha_1 \sin \beta_1 \sin \gamma_1}{\sin \alpha_2 \sin \beta_2 \sin \gamma_2} = 1.$$

Tegyük fel ui., hogy a' , b' , c' egy P ponton megy át, akkor az ABP , BCP , CAP háromszögekre alkalmazva a szinusztételt kapjuk, hogy

$$\frac{PA}{PB} = \frac{\sin \beta_1}{\sin \alpha_2}, \quad \frac{PB}{PC} = \frac{\sin \gamma_1}{\sin \beta_2},$$

$$\frac{PC}{PA} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \gamma_2}.$$

E három egyenlőtlenség megfelelő oldalainak a szorzata (1)-et adja.

Tegyük most fel, hogy az a' , b' , c' egyenesek úgy osztják fel a háromszög szögeit, hogy (1) teljesül. Legyen a' és b' metszéspontja P' , és tegyük fel, hogy $P'C$ a γ szöget γ'_1 és γ'_2 részekre vágja szét. Bizonyítottuk, hogy

$$\frac{\sin \alpha_1 \sin \beta_1 \sin \gamma'_1}{\sin \alpha_2 \sin \beta_2 \sin \gamma'_2} = 1,$$

ezt (1)-gyel összehasonlítva kapjuk, hogy $\frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = \frac{\sin \gamma'_1}{\sin \gamma'_2}$, azaz

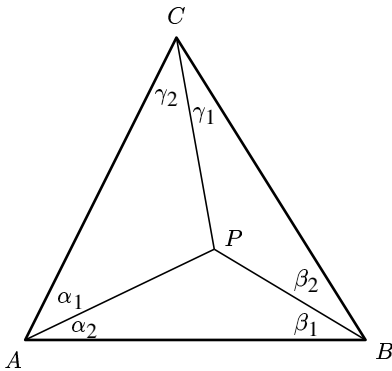
$$\frac{\sin(\gamma - \gamma_2)}{\sin \gamma_2} = \frac{\sin(\gamma - \gamma'_2)}{\sin \gamma'_2}, \quad \text{azaz}$$

$$\sin \gamma'_2 (\sin \gamma \cos \gamma_2 - \cos \gamma \sin \gamma_2) = \sin \gamma_2 (\sin \gamma \cos \gamma'_2 - \cos \gamma \sin \gamma'_2),$$

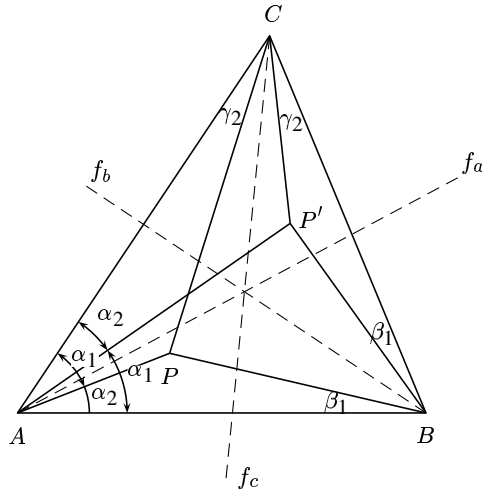
$$\sin \gamma'_2 \cos \gamma_2 = \sin \gamma_2 \cos \gamma'_2,$$

$$\sin(\gamma'_2 - \gamma_2) = 0,$$

ebből $\gamma_2 = \gamma'_2$ és $\gamma_1 = \gamma'_1$ következik, tehát P' azonos P -vel, állításunkat bizonyítottuk.



41.1. ábra



41.2. ábra

Ebből közvetlenül következik az 1996/2. feladatban felhasznált tételünk: ha P az ABC háromszög belső pontja, és a PA egyenest tükrözzük az A - \angle felezőjére, PB -t a B - \angle felezőjére és PC -t a C - \angle felezőjére, a tükörképek egy ponton mennek át; ti. tükrözésnél az α_1 és α_2 , ill. β_1 és β_2 , ill. γ_1 és γ_2 szögek szerepet cserélnek, és így (1) érvényben marad, tehát a tükörképek is egy ponton mennek át (41.2. ábra).

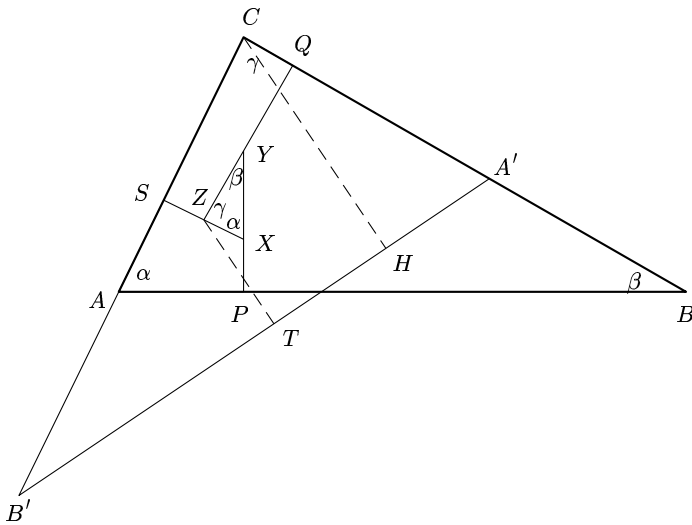
Ez az utóbbi tételünk csupán tükrözések segítségével is bizonyítható (l. pl. Reiman: Geometria és határterületei) a következő általánosabb alakban: ha az ABC háromszög A , B , C csúcsán átmenő a' , b' , c' egyenesek egy sugársorhoz tartoznak, akkor a megfelelő szögfelezőre vonatkozó tükörképeikre is ugyanaz áll. (Ez azt jelenti, hogy ha pl. a' , b' , c' egy ponton mennek át, akkor tükörképeik párhuzamosak vagy szintén egy ponton mennek át.)

- [42] Az Erdős–Mordell egyenlőtlenség egy általánosítása. Legyen P , Q , S rendre az ABC háromszög AB , BC , CA oldalának egy-egy belső pontja. A P -ben és Q -ban az AB -re, ill. BC -re állított merőlegesek az Y pontban, a Q -ban és S -ben a BC -re, ill. CA -ra állított merőlegesek a Z pontban, végül az S -ben és P -ben a CA -ra, ill. AB -re állított merőlegesek az X pontban metszik egymást, és X , Y , Z a háromszög belső pontjai. Ebben az esetben

$$AX + BY + CZ \geq XP + YP + YQ + ZQ + ZS + XS,$$

és egyenlőség akkor és csakis akkor teljesül, ha ABC szabályos és X , Y , Z az ABC középpontjába esik (42.1. ábra).

Bizonyításunk az alaptétel [33]-beli bizonyításának a gondolatmenetét követi. Az A , ill. B csúcsok tükörképe a háromszög C -beli belső szögfelezőjére



42.1. ábra

legyen A' , ill. B' ; a C -ből, ill. Z -ből az $A'B'$ -re állított merőleges talppontja legyen H , ill. T . Az $A'B'C$ területét kétféle módon is felírhatjuk:

$$2t_{A'B'C} = 2t_{A'B'Z} + 2t_{CA'Z} + 2t_{B'CZ};$$

azaz a szokásos háromszögeometriai jelölésekkel: $AB = A'B' = c$, $BC = B'C = a$, $CA = CA' = b$:

$$(1) \quad c \cdot CH = c \cdot ZT + b \cdot ZQ + a \cdot ZS;$$

a ZT hosszát negatívnak tekintjük, ha Z az $A'B'$ egyenes C -vel ellentétes oldalára esik; ezzel a kikötéssel is teljesül, hogy

$$(*) \quad CZ + ZT \geq CH;$$

ebből

$$c \cdot CZ + c \cdot ZT \geq c \cdot CH,$$

$$c \cdot CZ \geq c \cdot CH - c \cdot ZT,$$

azaz (1) figyelembe vételével

$$c \cdot CZ \geq b \cdot ZQ + a \cdot ZS,$$

$$CZ \geq \frac{b}{c} \cdot ZQ + \frac{a}{c} \cdot ZS.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$AX \geq \frac{c}{a} \cdot XS + \frac{b}{a} \cdot XP,$$

$$BY \geq \frac{a}{b} \cdot YP + \frac{c}{b} \cdot YQ.$$

E három egyenlőtlenség összegzésével kapjuk, hogy

$$(2) \quad AX + BY + CZ \geq \left(\frac{a}{b} YP + \frac{b}{a} XP \right) + \left(\frac{b}{c} ZQ + \frac{c}{b} YQ \right) + \left(\frac{c}{a} XS + \frac{a}{c} ZS \right).$$

Alkalmazzuk most a

$$kK + nN = (k+n)\frac{K+N}{2} + (k-n)\frac{K-N}{2}$$

azonosságot; pl. a következő két tagra:

$$\frac{a}{b}YP + \frac{b}{a}XP = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\frac{YP+XP}{2} + \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)\frac{YP-XP}{2}.$$

Felhasználjuk, hogy az ABC és az XYZ háromszögek hasonlóak, mivel szögeik rendre egyenlők, és ha a hasonlóság aránya λ , akkor

$$\frac{YZ}{a} = \frac{ZX}{b} = \frac{XY}{c} = \lambda,$$

továbbá, hogy $YP - XP = XY = \lambda c$, és

$$(**) \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

$$\frac{a}{b} \cdot YP + \frac{b}{a} \cdot XP \geq YP + XP + \lambda \left(\frac{ca}{2b} - \frac{bc}{2a} \right).$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{b}{c} \cdot ZQ + \frac{c}{b} YQ &\geq ZQ + YQ + \lambda \left(\frac{ab}{2c} - \frac{ca}{2b} \right), \\ \frac{c}{a} \cdot XS + \frac{a}{c} \cdot ZS &\geq XS + ZS + \lambda \left(\frac{bc}{2a} - \frac{ab}{2c} \right). \end{aligned}$$

E három egyenlőtlenség összege (2) miatt éppen a bizonyítandó

$$AX + BY + CZ \geq XP + YP + YQ + ZQ + ZS + XS$$

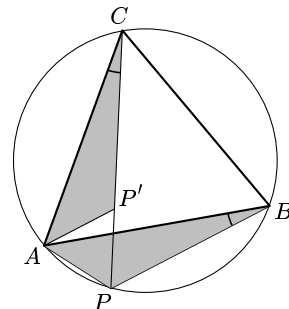
egyenlőtlenséget adja. Egyenlőség (**) miatt csak $a = b = c$ és (*) miatt csak abban az esetben állhat, ha X, Y, Z magasságvonalakon vannak, tehát ABC szabályos és X, Y, Z ennek a középpontjával azonosak.

- [43] *A szabályos háromszög egy nevezetes tulajdonsága.* Legyen P az ABC szabályos háromszög köré írt körének a C -t nem tartalmazó AB ívén levő pont; erre teljesül, hogy $AP + BP = PC$.

Forgassuk el ugyanis A körül az APB háromszöget 60° -kal az ACP' helyzetbe; P' ebben az esetben a CP szakaszra kerül, mert $\angle ACP = \angle ABP$ (az AP ívhez tartozó kerületi szögek). Az elforgatás miatt APP' szabályos háromszög, és így $AP = PP'$, továbbá $BP = CP'$, ezért

$$PC = PP' + CP' = AP + BP,$$

amit bizonyítani kellett (43.1. ábra).



43.1. ábra

Megjegyezzük, hogy állításunk közvetlen következménye Ptolemaios tétele is [24]; ezt alkalmazva az $APBC$ húrnégyszögre kapjuk, hogy

$$AP \cdot BC + BP \cdot CA = AB \cdot PC,$$

amiből minden tagot a háromszög oldalhosszával osztva a bizonyítandót nyerjük.

- [44] *Egy szám osztóinak számáról.* A pozitív egész n osztóinak a számát $d(n)$ jelöli. (Az irodalomban gyakori a $\tau(n)$ (olv. tau-n) jelölés is.) Ha n prímtényezős felbontása

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r},$$

akkor n minden osztója

$$p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_r^{\beta_r}$$

alakú, ahol $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$, és β_i minden ilyen választásához tartozik egy osztó. Mivel mindegyik β_i $\alpha_i + 1$ -féleképpen választható, n osztóinak a száma

$$d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_r + 1).$$

Ez azt jelenti, hogy $d(n)$ nem függ attól, hogy n -ben milyen prímszámok szerepelnek, hanem csupán attól, hogy mi ezeknek a kitevője. Az előállításnak következménye, hogy ha a és b relatív prímek,

$$d(ab) = d(a)d(b),$$

azaz a d függvény multiplikatív. Ez a tulajdonság véges sok relatív prím tényezőre is kiterjeszthető.

- [45] *A Turán-féle gráftételről.* Turán Pál 1941-ben a következő tételt bizonyította be: legyen $n = q(k-1) + r$, ahol q, k, r egész számok és $0 \leq r < k-1$. Ha egy n csúcsú egyszerű gráf éleinek a száma nagyobb, mint

$$E = \frac{k-2}{2(k-1)}(n^2 - r^2) + \binom{r}{2},$$

akkor a gráf tartalmaz k csúcsú teljes gráfot. Minden n -re létezik olyan n csúcsú E élszámú gráf, amely nem tartalmaz k csúcsú teljes gráfot.

Tartalom

1. Előszó	5
2. A nemzetközi versenyek helye a matematikai nevelésben	7
3. A Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák története	15
4. A Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák feladatai	81
5. A feladatok megoldásai	129
6. A magyar csapat teljesítménye	607
7. Kiegészítés a felhasznált tételekről	609