

Bac Côte d'Ivoire 2022

Série E

Coefficient : 5

Durée : 4 heures

L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.

Exercice 1

On considère deux urnes notées respectivement U et V.

L'urne U contient trois boules marquées respectivement 0 ; 1 et 2.

L'urne V contient quatre boules marquées respectivement 0 ; 1 ; 2 et 3.

Ces boules sont indiscernables au toucher.

Une expérience aléatoire consiste à tirer au hasard une boule de l'urne U, puis une boule de l'urne V.

On considère que tous les tirages de ces deux boules sont équiprobables.

1.
 - a. Représenter tous les tirages possibles dans un tableau à double entrée.
 - b. Calculer la probabilité de l'événement A : "obtenir 2 boules portant le même chiffre".
2. Un jeu consiste à tirer au hasard une boule de l'urne U, puis une boule de l'urne V. Le joueur mise 1000 FCFA. L'organisateur du jeu remet alors au joueur (en milliers de francs CFA) égal au produit des deux nombres figurant sur les deux boules tirées.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque jeu, associe le gain algébrique du joueur.

- a. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X .
- b. Présenter la loi de probabilité de X dans un tableau.
- c. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X . Ce jeu est-il équitable ?

NB : Le jeu est équitable lorsque $E(X) = 0$.

3. Déterminer la mise du joueur qui rend le jeu équitable.

Exercice 2

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que $AB = AC$ et $\text{mes}(\widehat{AB}; \widehat{AC}) = \frac{\pi}{4}$.

Soit I le point tel que le triangle CAI soit rectangle et isocèle avec $\text{mes}(\widehat{CA}; \widehat{CI}) = -\frac{\pi}{2}$.

1. Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure. On prendra $AB = 5$ cm.
2. On appelle r_A la rotation de centre A qui transforme B en C et r_C la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
On pose : $f = r_C \circ r_A$.

- a. Déterminer les images par f des points A et B.
- b. Justifier que f est une rotation dont on précisera l'angle et le centre O. Placer O sur la figure.
- c. Quelle est la nature du quadrilatère ABOC ?

3. Soit S la similitude directe de centre O qui transforme A en B .
On désigne par C' l'image de C par S , H le milieu du segment $[BC]$ et H' l'image de H par S .
 - a. Donner une mesure de l'angle de S .
 - b. Démontrer que C' appartient à la droite (OA) .
 - c. Démontrer que $(C'H')$ est perpendiculaire à (OB) .
 - e. En déduire que C' est le centre du cercle circonscrit au triangle OBC .

Problème Partie 1

Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0; 2\pi]$.

On considère la suite géométrique u de premier terme $u_0 = \cos(a)$ et de raison $\sin(a)$.

1.
 - a. Exprimer u_n en fonction de n .
 - b. Déterminer la limite de la suite (u_n) (On distinguera les cas $|\sin(a)| = 1$ et $|\sin(a)| < 1$).
2. Soit $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ la somme des $n + 1$ premiers termes consécutifs de la suite u .
 - a. Exprimer S_n en fonction de n .
 - b. Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (Unité graphique : 4cm).

1. Tracer la courbe (C_0) représentative de la fonction S_0 définie sur $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ par $S_0(x) = \cos(x)$.
2. On considère la fonction S_1 définie sur $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ par $S_1(x) = \cos(x) + \cos(x) \sin(x)$.
 - a. On admet que S_1 est dérivable sur $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ et on note S'_1 sa dérivée.
Pour x élément de $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$, calculer $S'_1(x)$ puis vérifier que $S'_1(x) = -2(\sin(x) + 1)(\sin(x) - \frac{1}{2})$.
 - b. En déduire le signe de $S'_1(x)$ pour tout x élément de $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.
 - c. Dresser le tableau de variation de S_1 sur $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.
3. On considère la fonction S définie sur $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ par $S(x) = \frac{\cos(x)}{1 - \sin(x)}$.
 - a. On admet que S est dérivable sur $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ et on note S' sa dérivée.
Démontrer que : $\forall x \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right] ; S'(x) = \frac{1}{1 - \sin(x)}$.
 - b. Dresser le tableau de variation de S sur $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.
4.
 - a. Démontrer que : $\forall x \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right] ; S_1(x) \leq S(x) \leq S_0(x)$.
 - b. Tracer les courbes représentatives (C_1) et (C) des fonctions S_1 et S dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie 3

Pour tout nombre entier naturel n , on considère la fonction S_n définie sur $[0; 2\pi]$ par

$$S_n(x) = \cos(x) (1 + \sin(x) + \dots + \sin^n(x)) \text{ et on pose } \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} S_n(x) dx.$$

1. **a.** Calculer I_0, I_1 et $I = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} S(x) \, dx$.
- b.** Justifier que $I_1 \leq I \leq I_0$.
2. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel n , on a : $I_{n+1} - I_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+2}$.
- b.** Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbf{N}, I_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}$.